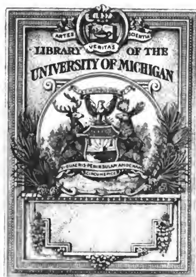


Bibliotheca mathematica



ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



Eugène Beltrami

…HRIFT FÜR G…

…CHEN WISS…HAFTEN.

…UBNER.



Eugenio Beltrami

BIBLIOTHECA MATHEMATICA.

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE
DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN.

HERAUSGEGEBEN
VON
GUSTAF ENESTRÖM
IN STOCKHOLM.

DRITTE FOLGE. ZWEITER BAND.

MIT DEM BILDNISSE VON E. BELTRAMI IN PHOTOLITHOGRAPHIE ALS TITELBILD, DEN IN TEXT GEDRUCKTEN BILDNISSEN VON K. PETERSON UND O. SCHLÖMILCH, SOWIE 18 TEXTFIGUREN.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1901.

Inhaltsverzeichnis.

Autoren-Register.

Beman, 42.
Björnbo, 10, 14.
Boll, 9.
Bosmans, 3.
Braunmühl, 33, 34, 38.
Cantor, 11, 47.
Curtze, 3, 19.
Eneström, 1, 2, 3, 6, 20, 22, 31, 32, 35, 37, 43, 52.
Engel, 44.
Favaro, 3, 26.
Günther, 5.
Hatzidakis, 50.
Haussner, 41.
Heinrich, 30.
Hellmann, 18.
Hultsch, 4.
Koppe, 3, 28.
Kutta, 29.
Loria, 48.
Müller, Felix, 3, 51.
Reuter, 3.
Schmidt, 7, 8.
Stäckel, 40, 46, 49.
Steinschneider, 21.
Sturm, 24.
Suter, 15.
Tannery, 3, 12, 16, 17.
Vacca, 3, 36.
Valentin, 25.
Vaux, 13.
Wertheim, 3, 23, 30.
Wislicenus, 27.
Wölffing, 45.

Sach-Register.

Abraham, 17.
Aganis, 12.
Ägyptische Mathematik, 4.
Aktuelle Fragen, 49—53.
Algebra, 15, 17, 20, 22, 23, 28, 32.
Algebraische Analysis, 33—35, 37.
Anaritius, 14.
Anfragen, 20, 22, 25, 31, 32, 36, 37, 39.
Antworten, 24, 35, 42.
Arabische Mathematik und Astronomie, 13—15.
Arithmetik, 4, 15, 23.
Astronomie, 5, 9, 10, 13, 26, 27.
Babylonische Astronomie, 5.
Beltrami, 48.
Bibliographie, 49, 52.
Biographien, 46—48, 52.
Bruchrechnung, 4.
Buteo, 23.
Cantor, 2, 3.
Caswell, 31.
Chrestomathie, 6.
Curtze, 14.
Cyklische Kurven, 45.
Darstellende Geometrie, 41.
Differentialquotient, 42.
El-Hassar, 15.
Elliptische Integrale, 29.
Ernennungen, 55.
Eukleides, 14.
Exponentialfunktion, 35.
Fixsternkataloge, 9, 10.
Funktionentheorie, 35, 40.
Galilei, 26.
Gauss, 44.
Geminos, 12.
Geometrie, 7, 11, 16, 19, 24, 25, 28—30, 41, 45.
Gherardo Cremonese, 14.
Gregory, 30.
Griechische Mathematik, Physik und Astronomie, 6—12.
Guimarães, 43.
Hipparchos, 9.
Hugo, 16.
Huygens, 28.
Hyperbel, 30.
Integralrechnung, 29.
Interpolation, 33.
Instrumente, 25.
Isoperimetrie, 7.
Jüdische Mathematik, 20, 21.
Kreis, 19, 28, 30.
Kugler, 5.
Kurven, 45.
Langreaus, 27.
Litterarische Notizen, 55.
Logarithmen, 28.
Mathematik im Allgemeinen, 2, 3.
Mathematiker - Versammlungen, 53, 55.
Mathematische Geschichtsschreibung, 1.
Mathematische Instrumente, 25.
Mathematische Terminologie, 50, 51.
Mathematisch - historische Vorlesungen, 55.
Maximalwerte, 32.
Mayr, 26.
Menelaos, 10.
Moivrescher Satz, 34.
Mollweidesche Gleichungen, 38.
Mondkarten, 27.
Mondrechnung, 5.
Näherungsmethoden, 28.
Neuerschienene Schriften, 54.
Obenrauch, 41.
Optik, 18.
Pellsche Gleichung, 39.
Pesch, 11.
Peterson, 46.
Philon, 8.
Physik, 8, 18.
Portugiesische Mathematik, 43.
Preisaufgaben, 55.
Preisschriften, 55.
Proklos, 11.
Ptolemaios, 9.
Quadrant, 25.
Quadratur, 30.
Radius, 24.
Recensionen, 2, 5, 6, 11, 13, 14, 41, 43, 44.
Recorde, 22.
Reihen, 33, 37.
Robertus Linconiensis, 18.
Schlömilch, 47.
Schmidt, M., 6.
Sternkataloge, 9, 10.
Stirling, 36.
Suter, 13.
Technik, 8.
Teilungsrechnung, 4.
Terminologie, 50, 51.
Todesfälle, 55.
Trigonometrie, 34, 37, 38.
Wallis, 29.
Wissenschaftliche Chronik, 55.
Zahlentheorie, 39.
Zeitschriftentitel, 49.

Allgemeines über Geschichte der Mathematik.

Seite.

1. Über litterarische und wissenschaftliche Geschichtsschreibung auf dem Gebiete der Mathematik. Von G. Eneström . . . . 1—4
2. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik III^2: 2—3 (1901). Recension von *G. Eneström* . . . . 154—156, 445—447
3. Kleine Bemerkungen zur zweiten Auflage von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik". Von H. Bosmans, M. Curtze, G. Eneström, A. Favaro, M. Koppe, F. Müller, H. Reuter, P. Tannery, G. Vacca, G. Wertheim. 143—152, 351—360, 441—443

Geschichte des Altertums.

4. Neue Beiträge zur ägyptischen Teilungsrechnung. Von F. Hultsch. 177—184
5. Kugler, Die babylonische Mondrechnung (1900). Recension von *S. Günther* . . . . 156—160, 369
6. M. Schmidt, Realistische Chrestomathie 1, 2 (1900—1901). Recension von *G. Eneström* . . . . 362—363
7. Zur Geschichte der Isoperimetrie im Altertume. Von W. Schmidt. 5—8
8. Physikalisches und Technisches bei Philon von Byzanz. Von W. Schmidt . . . . 377—383
9. Die Sternkataloge des Hipparch und des Ptolemaios. Von F. Boll . . . . 185—195
10. Hat Menelaos aus Alexandria einen Fixsternkatalog verfaſst? Von A. A. Björnbo . . . . 196—212
11. Pesch, De Procli fontibus (1900). Recension von *M. Cantor* . . . 160—161
12. Le philosophe Aganis est-il identique à Geminus? Par P. Tannery . . . . 9—11

Geschichte des Mittelalters.

13. Suter, Die Mathematiker und Astronomen der Araber (1900). Recension von *C. de Vaux* . . . . 161—164
14. Anaritii in libros Elementorum Euclidis commentarii, edidit M. Curtze (1899). Recension von *A. A. Björnbo* . . . . 363—366
15. Das Rechenbuch des Abû Zakarîjâ el-Ḥaṣṣâr. Von H. Suter. 12—40
16. Sur la „Practica geometriae Hugonis". Par P. Tannery . . . 41—44
17. Sur le „Liber augmenti et diminutionis" compilé par Abraham. Par P. Tannery . . . . 45—47
18. Zur Optik des Robertus Linconiensis. Von G. Hellmann . . . 443—444
19. Zur Geschichte der Kreismessung und Kreisteilung im fünfzehnten Jahrhundert. Von M. Curtze . . . . 48—57
20. Sur un traité d'algèbre du moyen âge en langue hébraïque. [Anfrage 89.] Par G. Eneström 152
21. Die mathematischen Wissenschaften bei den Juden 1441—1500. Von M. Steinschneider . . . . 58—76

Geschichte der neueren Zeit.

Seite.

22. Sur l'algèbre de Robert Recorde (1556). [Anfrago 90.] Par G. Eneström 152

23. Die Logistik des Johannes Buteo. Von G. Wertheim . . . . . 213—219

24. Über den Ursprung der Benennung „Radius" für Halbmesser. [Antwort auf die Anfrage 87.] Von A. Sturm 361

25. Über den geometrischen Quadranten (1594). [Anfrage 93.] Von G. Valentin 360

26. Galileo Galilei e Simone Mayr. Di A. Favaro . . . . 220—223

27. Über die Mondkarten des Langrenus. Von W. F. Wislicenus. 384—391

28. Über Huygens' Näherungsmethoden bei Kreis- und Logarithmen-Berechnung. Von M. Koppe . . . . 224—229

29. Elliptische und andere Integrale bei Wallis. Von M. Kutta. 230—234

30. James Gregorys „Vera circuli et hyperbolae quadratura". Von G. Heinrich . . . . 77—85

31. John Caswell (1685). [Anfrage 91.] Von G. Eneström . . . 152—153

32. Über elementare Herleitung von Maximalwerten. [Anfrage 94.] Von G. Eneström 360

33. Historische Untersuchung der ersten Arbeiten über Interpolation. Von A. von Braunmühl . . . . 86—96

34. Zur Geschichte der Entstehung des sogenannten Moivreschen Satzes. Von A. von Braunmühl . . . . 97—102

35. Über die „formula exponentialis replicata". [Antwort auf die Anfrage 82.] Von G. Eneström 153

36. Sur les manuscrits de Stirling. [Anfrage 92.] Par G. Vacca. 153

37. Über die Summierung zweier trigonometrischer Reihen. [Anfrage 96.] Von G. Eneström 444

38. Zur Geschichte der Trigonometrie im achtzehnten Jahrhundert. 1. Die sogenannten Mollweideschen Gleichungen. 2. Graphische Ableitung der Hauptsätze der sphärischen Trigonometrie. Von A. von Braunmühl . . . . 103—110

39. Über den Ursprung des Ausdruckes „Pellsche Gleichung". [Anfrage 95.] Von G. Wertheim . . . . 360—361

40. Beiträge zur Geschichte der Funktionentheorie im achtzehnten Jahrhundert. Von P. Stäckel . . . . 111—121

41. Obenrauch, Geschichte der darstellenden Geometrie (1897). Recension von *R. Haußner* . . . . 164—168

42. On the term „differential quotient". [Antwort auf die Anfrage 88.] By W. W. Beman 361

43. Guimarães, Les mathématiques en Portugal au XIXe siècle (1900). Recension von *G. Eneström* . . . . 168—169

44. Gaufs, Werke, Band VIII (1900). Recension von *F. Engel* . . . . 366—369

Seite.
45. Bericht über den gegenwärtigen Stand der Lehre von den cyklischen Kurven. Von E. Wölffing . . . . 235—259
46. Karl Peterson (1828—1881). Von P. Stäckel. Mit Bildnis. 122—132
47. Nachruf an Oskar Schlömilch. Von M. Cantor. Mit Bildnis. 260—281
48. Eugenio Beltrami e le sue opere matematiche. Di G. Loria. Mit Bildnis in Photolithographie als Titelbild . . . . 392—440

Aktuelle Fragen.

49. Wie sollen die Titel der mathematischen Zeitschriften abgekürzt werden? Von P. Stäckel . . . . 133—138
50. Sur quelques points de la terminologie mathématique. Par N. J. Hatzidakis . . . . 139—140
51. Über die mathematische Terminologie. Eine historisch-linguistische Skizze. Von F. Müller . . . . 282—325
52. Bio-bibliographie der 1881—1900 verstorbenen Mathematiker. Von G. Eneström . . . . 326—350
53. Congrès international d'histoire des sciences à Paris 1900. . . 141—143

54. Neuerschienene Schriften . . . . 170—173, 370—374, 448—450
Autoren-Register. — Zeitschriften. Allgemeines. — Geschichte des Altertums. — Geschichte des Mittelalters. — Geschichte der neueren Zeit. — Nekrologe. — Aktuelle Fragen.

55. Wissenschaftliche Chronik . . . . 174—176, 375—376, 451—453
Ernennungen. — Todesfälle. — Demnächst erscheinende Werke. — Mathematisch-historische und litterarische Arbeiten in Vorbereitung. — Neue Berichte erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. — Mathematisch-historische Vorlesungen. — Mathematiker-Versammlugen im Jahre 1901. — Gekrönte Preisschriften. — Preisfragen gelehrter Gesellschaften. — Vermischtes.

Namenregister . . . . 454—476

Über litterarische und wissenschaftliche Geschichtsschreibung auf dem Gebiete der Mathematik.

Von G. Eneström in Stockholm.

Die Zeit ist längst vorüber, in der man ein chronologisch geordnetes Verzeichnis mathematischer Schriften nebst gelegentlich hinzugefügten Notizen über deren Inhalt und Verfasser als Geschichte der Mathematik bezeichnete, und man ist jetzt gewohnt von einer unter diesem Namen erscheinenden Arbeit zu fordern, dafs sie in erster Linie die mathematischen Ideen historisch behandelt. Hat eine mathematische Idee nichts weiter gebracht, als was schon früher bekannt war, so ist es natürlich, dafs der Geschichtsschreiber, wenn er dieselbe überhaupt erwähnen will, dieses Umstandes gedenkt, und ebenso natürlich ist es, dafs er auf den etwaigen *unmittelbaren* historischen Zusammenhang zwischen zwei Ideen aufmerksam macht. In einer überaus grofsen Anzahl von Fällen enthält aber eine historisch gegebene mathematische Idee wirklich etwas Neues, ohne dafs ihre Abhängigkeit von einer früher notierten Idee *unmittelbar* ersichtlich ist, und in solchen Fällen kann der Geschichtsschreiber sich damit begnügen, die einzelnen Ideen vorzugsweise als Forschungsresultate an und für sich zu betrachten. Er berichtet also in chronologischer Ordnungsfolge über die Sätze und Methoden, die von verschiedenen Verfassern gefunden wurden, und fügt, so oft als es ihm möglich ist, Verweise auf verwandte Forschungsresultate früherer Verfasser hinzu, ohne jedoch auf diesen Teil seiner Darstellung ein hauptsächliches Gewicht zu legen. Eine auf diese Weise hergestellte Geschichte der Mathematik könnte „Entdeckungsgeschichte" genannt werden, wenn die mathematisch-historische Forschung nur wirkliche Entdeckungen zu berücksichtigen hätte; da aber dies wohl nicht der Fall ist, erlaube ich mir sie als „litterarische Geschichte der Mathematik" zu bezeichnen. Selbstverständlich bedeutet das Wort „litterarisch" hier nicht, dafs nur litterarische aber keine mathematischen Notizen vorhanden sind.

Es giebt aber auch eine andere Art mathematischer Geschichtsschreibung, wo man besonders den Zusammenhaug zwischen den mathemati-

schen Ideen zu ermitteln versucht und dieselben also als Glieder in der Entwickelung der betreffenden Theorien betrachtet; eine solche Geschichte der Mathematik könnte man „Entwickelungsgeschichte“ nennen, aber da ich für die erste Art den Namen „litterarische Geschichte“ gewählt habe, scheint es mir angemessen, die zweite als „wissenschaftliche Geschichte der Mathematik“ zu bezeichnen, wobei indessen bemerkt werden soll, dafs diese Geschichte selbstverständlich nicht litterarischer Notizen entbehren kann, ebensowenig als der ersten Art das Prädikat „unwissenschaftlich“ beigelegt werden darf.

Es ist offenbar, dafs die Herstellung einer wissenschaftlichen Geschichte der Mathematik fast unüberwindliche Schwierigkeiten darbieten wird, sofern man nicht eine litterarische Geschichte oder wenigstens eine ziemlich vollständige Sammlung von litterarischen Einzeluntersuchungen zur Verfügung hat. Teils ist es nämlich fast unmöglich auf einem gröfseren Gebiete der Mathematik gleichzeitig alle einzelnen in Betracht kommenden Forschungsresultate direkt aus den Quellen herbeizuholen und den Zusammenhang zwischen denselben herauszufinden, teils würde man unter solchen Umständen oft versucht werden von vornherein einen gewissen Entwickelungsgang zu konstruieren, und *die* Thatsachen zu übersehen, welche nicht in den Rahmen desselben passen. Darum hat gewifs die litterarische Geschichtsschreibung auf dem Gebiete der Mathematik eine nicht zu unterschätzende Bedeutung, und auch in den Fällen, wo sie fast nur eine Sammlung von Referaten bringt (wie z. B. die bekannten historischen Arbeiten von I. Todhunter), können die Resultate ihrer Wirksamkeit von grofsem Nutzen sein.

Auf der anderen Seite ist es klar, dafs wenn die mathematisch-histosische Forschung wirklich einen eigenen Platz unter den Wissenschaften beanspruchen will, ihr Ziel sein mufs eine wissenschaftliche Geschichte der Mathematik in dem von mir oben angegebenen Sinne hervorzubringen. Interessant und belehrend ist es zwar, wenn in ausführlicher und geschickter Darstellung die Zeitfolge und die ersten Autoren der besonderen Entdeckungen festgestellt werden, aber eine wirkliche Wissenschaft wird die Geschichte der Mathematik erst dann, wenn sie sich die Aufgabe stellt, den Zusammenhang zwischen diesen Entdeckungen anzugeben und dadurch zum Verständnis des Wesens der wissenschaftlichen Entwickelung zu führen.[1])

Überblicken wir jetzt die bisherige Wirksamkeit auf dem Gebiete der mathematisch-historischen Forschung, so ergiebt sich, dafs sie zwar

1) Vgl. F. Rosenberger, *Die Geschichte der exakten Wissenschaften und der Nutzen ihres Studiums*; Abhandl. zur Gesch. der Mathem. 9, 1899, S. 378.

in litterarischer Hinsicht belangreiche Resultate gebracht hat, dafs aber die wissenschaftliche Geschichtsschreibung bisher nur spärlich repräsentiert worden ist. Ohne Zweifel hat dies Verhältnis zum grofsen Teil seinen Grund darin, dafs die Behandlung der litterarischen Geschichte, die ja im allgemeinen der anderen vorangehen mufs, noch sehr lückenhaft ist, aber sicherlich beruht es auch auf den ganz besonderen Schwierigkeiten, die bei der wissenschaftlichen Geschichtsschreibung vorhanden sind. Für diese letztere ist es nämlich von wesentlicher Bedeutung, nicht nur die besonderen Sätze, sondern auch die Methoden, durch welche sie gefunden wurden, anzugeben, und nicht selten enthalten die Quellen keinen Aufschlufs hierüber[1]); zuweilen ist es nicht einmal möglich zu ermitteln, ob wirkliche Methoden vorhanden waren, oder ob die Sätze nur durch unvollständige Induktion erhalten wurden.[2])

Aber abgesehen von diesen und ähnlichen Schwierigkeiten, die sich eigentlich auf einzelne Entdeckungen beziehen, macht gerade die Weise, in welcher die Mathematik sich historisch entwickelt hat, der wissenschaftlichen Geschichtsschreibung nicht unerhebliche Ungelegenheiten. So z. B. ist die Entwickelung der verschiedenen Zweige der Wissenschaft oft so verwickelt, dafs man kaum entscheiden kann, zu welchem Zweige eine gewisse Gruppe von Ideen gehören soll; die Verteilung, die ein moderner Mathematiker als selbstverständlich betrachten mufs, erweist sich zuweilen vom historischen Gesichtspunkte aus als ganz unzulänglich. Eine andere Schwierigkeit rührt davon her, dafs gewisse Teile der Mathematik zeitweise fast ausschliefslich für besondere Zwecke ausgebildet wurden, die mit der genetischen Entwickelung der Begriffe wenig zu thun haben, sodafs man unsicher ist, ob man diese Ausbildung als ein wesentliches Moment in der Entwickelung der betreffenden Theorie aufnehmen darf oder nicht.

Die bisherige mehr litterarische Wirksamkeit auf dem Gebiete der mathematisch-historischen Forschung darf also nicht zu weitgehenden Folgerungen in Bezug auf die Zukunft veranlassen, und meiner Ansicht nach ist die jetzige Richtung dieser Wirksamkeit nur eine zeitweilige, die sobald als möglich in eine mehr wissenschaftliche verändert werden wird und soll, sodafs die mathematisch-historische Forschung als eine besondere Wissenschaft im eigentlichen Sinne dieses Wortes betrachtet

1) Welch grofser Aufwand von Scharfsinn und Gelehrsamkeit in einem solchen Falle nötig sein kann, geht wohl am deutlichsten aus der Zeuthenschen Behandlung der Lehre von den Kegelschnitten im Altertume hervor.

2) Bekanntlich gehört die Frage, auf welchem Wege Fermat einige seiner Sätze aus der Zahlentheorie entdeckt hat, zu den noch ungelösten mathematisch-historischen Problemen.

werden wird. Die Schwierigkeiten, auf welche ich soeben hingewiesen habe, können natürlich nur allmählich beseitigt werden, und jeder Versuch zu diesem Zwecke allgemeine Regeln aufzustellen, wird gewifs vergeblich sein. Dagegen giebt es andere schwierige Fragen mehr methodologischer Art, zu deren prinzipiellen Erledigung die Mitarbeit der Fachgenossen schon jetzt beitragen kann.

Eine solche Frage ist die folgende: „Wie soll der Geschichtsschreiber über die neuen mathematischen Ideen berichten, die zwar (wie z. B. die Wesselsche Theorie der geometrischen Bedeutung der imaginären Zahlen) bei ihrem ersten Hervortreten an und für sich epochemachend waren, die aber damals aus äufseren Gründen keinen oder wenigstens nur geringen Einflufs auf die Entwickelung der Wissenschaft übten?" Stellt man sich als einzige Aufgabe den Entwickelungsgang der Mathematik zu schildern, wäre es wohl am richtigsten, das erste Hervortreten solcher Ideen nur so weit zu berücksichtigen, als es geeignet ist, den wissenschaftlichen Charakter der betreffenden Zeit zu kennzeichnen, und eine eingehende Darstellung der Ideen selbst erst dann zu geben, wenn ihr Einflufs auf die folgende Entwickelung konstatiert werden kann. Auf der anderen Seite mag bemerkt werden, dafs eben die zeitweilige Nichtberücksichtigung gewisser urkundlich vorhandener Ideen für das Verständnis der Entwickelung einer gewissen Theorie im Laufe eines gewissen Zeitraumes so wichtig sein kann, dafs schon aus diesem Grunde ein sofortiger ausführlicher Bericht über dieselben angemessen ist. Die Frage dürfte also in verschiedenen Fällen auf verschiedene Weise zu beantworten sein, aber in jedem Fall ist wohl der Umstand, dafs das erste Hervortreten einer neuen Theorie nicht in leichtverständlicher und systematischer Form stattfand, und darum von den Zeitgenossen wenig beachtet wurde, kein hinreichender Grund, um die Geschichte dieser Theorie erst mit der ersten wirklich erfolgreichen Darstellung derselben zu beginnen.[1])

Eine andere schwierige Frage betrifft die Periodeneinteilung, die zwar auch in der litterarischen Geschichte der Mathematik eine gewisse Rolle spielt, aber dort von mehr untergeordneter Bedeutung ist. Diese Frage erfordert indessen eine ausführlichere Untersuchung, und ich werde derselben darum einen besonderen Artikel widmen. Dann beabsichtige ich auch einige andere Punkte zu behandeln, welche für die wissenschaftliche Geschichtsschreibung von Belang sind.

1) Vgl. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* **3** : 3 (1898), S. 728.

Zur Geschichte der Isoperimetrie im Altertume.

Von WILHELM SCHMIDT in Helmstedt.

Die Beschäftigung der Griechen mit der Isoperimetrie stand, da die Pythagoreer (CANTOR, *Vorlesungen* I², 167) wohl noch keine klare Vorstellung darüber hatten, bisher nur fest für ZENODOR, den man aus allgemeinen Gründen in die nächste Zeit nach ARCHIMEDES setzt (CANTOR, *Vorl.* I², 341), und die Zeit des QUINTILIAN (*Inst. orat.* I, 10, 39—42). ZENODOR hat sich in einer keineswegs unbedeutenden Schrift *Περὶ ἰσοπεριμέτρων* (so NOKK, Hss. *ἰσομέτρων*) *σχημάτων* (Über Figuren gleichen Umfangs) eingehender damit befafst.[1]

Aber schon vor ZENODOR waren die Grundsätze der Isoperimetrie beachtet worden, wie aus einer Notiz bei SIMPLICIUS *In ARISTOTELIS de coelo* (II, 412 ed. HEIBERG) hervorgeht:

δέδεικται καὶ πρὸ Ἀριστοτέλους μὲν πάντως, εἴπερ αὐτὸς ὡς δεδειγμένῳ συγκέχρηται, καὶ παρὰ Ἀρχιμήδους καὶ παρὰ Ζηνοδώρου πλατύτερον, ὅτι τῶν ἰσοπεριμέτρων σχημάτων πολυχωρητότερός ἐστιν ἐν μὲν τοῖς ἐπιπέδοις ὁ κύκλος, ἐν δὲ τοῖς στερεοῖς ἡ σφαῖρα. (Vgl. noch PROCLUS *In TIMAEUM* S. 384 und ARCHIMEDES II, 464 ed. HEIBERG.)

Sowohl vor ARISTOTELES ist im allgemeinen (wenngleich er selbst es als bewiesen mit verwendet), als von ARCHIMEDES und ZENODOR ausführlicher gezeigt worden, dafs bei den ebenen (Figuren) der Kreis, bei den körperlichen die Kugel einen gröfseren Inhalt hat als die (anderen) Figuren gleichen Umfangs.

Die Geschichte der Isoperimetrie scheint also schon vor ARISTOTELES anzufangen. Da aber ARISTOTELES *de coelo* 286ᵇ, 17—18, 32—33 die Sache nur in allgemeiner Fassung erwähnt (*πρῶτον .. τῶν ἐπιπέδων σχημάτων ὁ κύκλος, πρῶτον .. ἡ σφαῖρα τῶν στερεῶν σχημάτων*), so wird wohl erst ARCHIMEDES der Urheber einer strikten Beweisführung für die

1) Griechisch in der Baseler Ausgabe des THEON *In PTOLEMAEI Magnam constructionem* 1538, S. 11—17, ed. HALMA (Paris 1821), S. 33 ff., lateinisch von HULTSCH hinter PAPPUS, Bd. III, 1190—1211.

Hauptsätze der Isoperimetrie sein, vorausgesetzt, dafs oben nicht etwa blofs dessen Kreismessung und Schrift über Kugel und Cylinder gemeint sind.

Auch nach ZENODOR finden wir in der griechischen Litteratur Verfasser, die sich mit der Isoperimetrie beschäftigt haben. Zunächst giebt es in HERONS *Definitionen* eine Stelle, die sich mit ZENODOR berührt:[1]

ZENODOR:	HERON:
Der Kreis ist gröfser (d. h. hat einen gröfseren Inhalt) als alle (anderen) ebenen Figuren gleichen Umfangs (S. 16 ed. Bas.)	Ein Kreis ist gröfser als die (anderen) ebenen Figuren gleichen Umfangs (*Def.* 83).

1) Griechisch lauten die Stellen:

ZENODOR:	HERON:
Πάντων ἄρα τῶν ἰσοπεριμέτρων ἐπιπέδων σχημάτων μείζων ἐστὶν ὁ κύκλος (ed. Bas., p. 16)	*Τῶν ἐπιπέδων ἰσοπεριμέτρων σχημάτων μείζων ἐστὶ κύκλος* (*Def.* 83, p. 25 ed. HULTSCH).
(Vgl. dazu PAPPUS I, 352, 1 [ohne Nennung ZENODORS] *εὕρομεν τὸν κύκλον μέγιστον ὄντα τῶν ἴσην ἐχόντων αὐτῷ τὴν περίμετρον τεταγμένων πολυγώνων σχημάτων* und Anonym. *de figuris isoperimetris* hinter PAPPUS III, 1156, 26 ed. HULTSCH *ὁ κύκλος πάντων τῶν ἰσοπεριμέτρων σχημάτων μείζων ἐστίν* und ebd. 1138, 3—5).	
Λέγω δή, ὅτι καὶ ἡ σφαῖρα μείζων ἐστὶ πάντων τῶν ἴσην ἐπιφάνειαν ἐχόντων στερεῶν σχημάτων, τοῖς ὑπὸ Ἀρχιμήδους δεδειγμένοις προσχρησάμενος ἐν τῷ Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου (ed. Bas., p. 16).	*Τὸ τῆς σφαίρας σχῆμα πάντων τῶν στερεῶν ἰσοπεριμέτρων αὐτῇ σχημάτων, τουτέστι τῶν τῇ ἴσῃ ἐπιφανείᾳ κεχρημένων, μέγιστόν ἐστι* (*Def.* 83, p. 25). In der Überschrift heifst es ebenda: *Ὅτι τῶν στερεῶν ἰσοπεριμέτρων σχημάτων μείζων ἡ σφαῖρα.*
(Vgl. dazu PAPPUS I, 350, 24 [ohne Nennung ZENODORS] *πάντων τῶν στερεῶν σχημάτων τῶν ἴσην ἐχόντων τὴν ἐπιφάνειαν μεγίστη ἐστὶν ἡ σφαῖρα* und Anonym. *de figuris isoperim.* bei PAPPUS III, 1160, 10 ed. HULTSCH.)	

Dafs auch die Stelle über die Kugel wirklich noch ZENODOR angehört, wie schon HULTSCH, PAPPUS III, 1208, Anm. 3 annimmt, scheint mir nach THEON a. a. O. S. 11 sicher: *τῶν ἴσην περίμετρον ἐχόντων σχημάτων διαφόρων, ἐπειδὴ μείζονά ἐστι τὰ πολυγωνιώτερα, τῶν μὲν ἐπιπέδων ὁ κύκλος γίνεται μείζων, τῶν δὲ στερεῶν ἡ σφαῖρα. ποιησόμεθα δὴ τὴν τούτων ἀπόδειξιν ἐν ἐπιτομῇ ἐκ τῶν Ζηνοδώρῳ δεδειγμένων ἐν τῷ Περὶ ἰσο⟨περι⟩μέτρων σχημάτων.*

Zur Korrektur des Titels vergleiche noch die bei THEON unmittelbar folgenden Wendungen *τῶν ἴσην περίμετρον ἐχόντων τεταγμένων εὐθυγράμμων σχημάτων* und *ἰσο-*

Zenodor:	Heron:
Die Kugel ist gröſser als alle (anderen) körperlichen Figuren, welche gleiche Oberfläche haben (ebenda S. 16).	Die Figur der Kugel ist von allen körperlichen Figuren, welche mit ihr gleichen Umfang, d. h. welche die gleiche Oberfläche haben, am gröſsten (ebenda).

Auſserdem war schon dem Polybios IX, 21 der Grundgedanke der Isoperimetrie bekannt. Hier heiſst es, daſs die meisten Menschen die Gröſse der Städte und Lager nach dem Umfange (*περίμετρος*) beurteilten. Es erscheine vielen unglaublich, daſs Sparta mit einem Umfange (*περίβολος* Mauer) von 48 Stadien doppelt so groſs sein solle als Megalopolis mit einem Umfange von 50 Stadien oder daſs eine Stadt oder ein Lager im Umfange (*περιγραφή* Umriſs) von 40 Stadien doppelt so groſs sein könne als eine solche im Umfange (*περίμετρος*) von 100 Stadien. Obwohl das in der Schule die Geometrie lehre (*τῶν ἐν τοῖς παιδικοῖς μαθήμασι παραδιδομένων ἡμῖν διὰ τῆς γεωμετρίας*), so dächten manchmal sogar Staatsmänner und Feldherren nicht daran, geschweige denn die groſse Menge, und es komme vor, daſs Feldherren lediglich aus dem Umfange (*ἐξ αὐτῆς τῆς περιμέτρου*) der Lager auf die Zahl der Truppen schlössen, dabei aber einem Trugschlusse (*ἀδίκημα*) anheimfielen.[1])

περίμετρα in Bezug auf zwei Vielecke, S. 13: *τῶν ἰσοπεριμέτρων σχημάτων* u. ö. Die Behandlung planimetrischer Figuren überwog anscheinend. Aber auch von stereometrischen Figuren ist der Ausdruck *ἰσοπερίμετρος* durch Heron und den Anonym. 1160, 11 belegt.

1) Aus nachchristlicher Zeit seien noch erwähnt Galen (2. Jh.) *Περὶ χρείας τῶν ἐν ἀνθρώπου σώματι μορίων*, *Op.* III, 668, 10 ff. ed. Kühn: *πάντη τε γὰρ ὁμοιότατον ἑαυτῷ τὸ κυκλοτερές ἐστι, καὶ διὰ τοῦτο . . μέγιστον ἁπάντων τῶν ἴσην ἐχόντων περίμετρον. ἔστι δὲ οὐδὲ τοῦτο σμικρὸν ἀγαθὸν ἀγγείοις καὶ πόροις καὶ κοιλίαις καὶ πᾶσιν, ὅσων ἡ γένεσις ἕνεκα τοῦ δέξασθαί τινας οὐσίας· ἄριστα γὰρ ἐν αὐτοῖς, ὅσα πλεῖστον ὑποδέχεται σμικρότατα τοῖς τοῦ σώματος ὄγκοις ὑπάρχοντα . . . πολυχωρότατον τὸ περιφερές*, und Damianos (5. oder 6. Jh.?) *Schrift über Optik* ed. R. Schöne. Berlin 1897, S. 6: *οὗτος* (sc. *ὁ κύκλος*) *γὰρ τῶν ἐπιπέδων τε καὶ ἰσοπεριμέτριων αὐτῷ σχημάτων πολυχωρητότατος ἀποδείκνυται.* Dazu kommt noch eine Stelle aus Kleomedes (jünger als Posidonius) *De motu circ.* 86, 7—12 ed. Ziegler: *ἔστι πάντων μὲν σωμάτων τελεώτατον* (am vollkommensten) *ὁ κόσμος, πάντων δὲ σχημάτων ἡ σφαῖρα. αὕτη μὲν γὰρ οἵα τέ ἐστι περιλαμβάνειν πάντα τὰ τῇ αὐτῇ διαμέτρῳ κεχρημένα τῶν σχημάτων· τῶν δὲ ἄλλων σχημάτων οὐδὲν οἷόν τε περιλαμβάνειν τὴν σφαῖραν τῇ ἴσῃ διαμέτρῳ κεχρημένην αὐτῷ.* Hierzu vgl. die Originalstelle Plato *Timaeus* 33 B: *σχῆμα δὲ ἔδωκεν αὐτῷ* (sc. *τῷ τοῦ κόσμου σώματι* dem Weltkörper oder vielmehr dem Weltgebäude) *τὸ πρέπον καὶ τὸ ξυγγενές. τῷ δὲ τὰ πάντ' ἐν αὐτῷ ζῷα περιέχειν μέλλοντι ζῴῳ πρέπον ἂν εἴη σχῆμα τὸ περιειληφὸς ἐν αὐτῷ πάντα ὁπόσα σχήματα* (eine Gestalt, die alle anderen, so viele es auch giebt, rings in sich faſst)· *διὸ καὶ σφαιροειδές* (kugelförmig), *ἐκ μέσου πάντῃ πρὸς τὰς τελευτὰς ἴσον ἀπέχον* (mit gleichem Abstande von der Mitte bis überall nach

Zum Schlufs sei darauf hingewiesen, dafs sich der Name Zenodor zweimal in der jüngst edierten Herkulanensischen Rolle Nr. 1044 (W. Crönert, *Der Epikureer Philonides*[1]); Sitzungsber. der Akad. der Wiss. zu Berlin 1900, S. 954, Fragm. 31, 4; 34, 1) findet. Dieser Zenodor ist aber als Zeitgenosse des Epikureers und Mathematikers Philonides (Blütezeit 175—150 v. Chr.) anzusehen, den auch Apollonios von Perge I, 192 ed. Heiberg erwähnt (*Φιλωνίδης ὁ γεωμέτρης*). Crönert glaubt a. a. O. S. 956 Zenodor mit dem Verfasser der Schrift *Περὶ ἰσοπεριμέτρων σχημάτων* identifizieren zu können. Dem steht m. E. nichts im Wege. Ist aber diese Annahme wirklich zutreffend, so fällt die Lebenszeit des Zenodor in die erste Hälfte des 2. Jahrh. v. Chr. Wir hätten damit also eine urkundliche Bestätigung des bisherigen Ansatzes (Susemihl, *Litt.-Gesch. der Alexandrinerzeit* I, 761; Cantor, *Vorl.* I², 341).

---

den Enden hin), *κυκλοτερὲς* (kreisrund) *αὐτὸ ἐτορνεύσατο* (zirkelte ab), *πάντων τελεώτατον ὁμοιότατόν τε αὐτὸ ἑαυτῷ σχημάτων*. Sollte Simplicius bei den Worten *καὶ πρὸ Ἀριστοτέλους* an Plato gedacht haben? Oder an die Pythagoreer? Ich trage noch eine Stelle aus Geminos bei Proclus *in I. Eucl.* ed. Friedlein 39, 2—6 (vgl. auch Tannery, *La géométrie grecque*, S. 39) nach, die auch die Isoperimetrie streift: *καὶ ὁ τακτικὸς χρήσεται μὲν τοῖς θεωρήμασι τῶν μαθηματικῶν, οὐ μέντοι μαθηματικός ἐστιν, εἰ καὶ ποτὲ μὲν ἐλάχιστον δεῖξαι τὸ πλῆθος βουλόμενος εἰς κύκλον σχηματίζοι τὸ στρατόπεδον, ποτὲ δὲ πλεῖστον εἰς τετράγωνον ἢ πεντάγωνον ἢ ἄλλο τι πολύγωνον* 'Auch der Taktiker wird die Lehrsätze der Mathematiker verwenden, doch ist er kein Mathematiker, wenn er bald in der Absicht, die Truppenmasse recht klein erscheinen zu lassen, dem Lager eine kreisförmige Gestalt giebt, bald die Gestalt eines Quadrates oder Fünfecks oder irgend eines anderen Vielecks, um sie recht grofs erscheinen zu lassen.' Diese Stelle, die ich der Güte des Herrn G. Eneström verdanke, berührt sich offenbar mit Polybius.

1) Vgl. auch H. Usener, *Philonides* im Rhein. Museum N. F. **56**, 1901, S. 145—148.

Le philosophe Aganis est-il identique à Geminus?

Par Paul Tannery à Pantin.

Si le Codex Leidensis 399, 1 n'avait pas subi de mutilation, M. M. Besthorn et Heiberg n'auraient pas commencé par identifier avec Geminus le philosophe Aganis mentionné dans le commentaire de Simplicius, que le Nirizi a traduit en arabe.[1]) Ils auraient en effet tout d'abord rencontré ce nom (Anaritii *commentarii*, ed. Curtze, Leipzig 1899, p. 13) avec une épithète qui implique que Simplicius avait personnellement connu cet Aganis. Cette épithète revient encore une fois plus loin: M. M. Besthorn et Heiberg l'ont traduite (p. 119) par *magistrum nostrum*; tandisque Gérard de Crémona (ed. Curtze, p. 66) dit *socio nostro*. En fait, le mot arabe, *sahib*, est ambigu; mais la dernière traduction n'en paraît pas moins la plus exacte, car la question se ramène à celle de savoir si Simplicius avait écrit *ἑταῖρος* ou *καθηγεμών*; or, dans le second cas, le Nirizi n'aurait sans doute pas dit *sahib*, qui signifie maître dans le sens de possesseur ou de seigneur, plutôt que dans celui de professeur. En tout cas, Simplicius n'a certainement employé ni l'une ni l'autre expression pour qualifier un auteur vivant quatre siècles et demi avant lui; il serait déjà passablement étrange, eu égard à ses habitudes de langage, qu'il l'eût qualifié de philosophe.

La première mention d'Aganis dans le commentaire de Simplicius concerne une définition de l'angle qui lui est attribuée. C'est une question sur laquelle Proclus (p. 123—126) a suivi non pas Geminus, mais son maître Syrianus (*ἑπομένοις τῷ ἡμετέρῳ καθηγεμόνι*). Dans sa définition, qui en grec devait être quelque chose comme: *γωνία διαστατόν ἐστι μέγεθος οὗ τὰ πέρατα πρὸς ἑνὶ σημείῳ συνάγονται*, Aganis se prononce d'ailleurs contre Proclus, en adoptant l'opinion du maître de Syrianus, Plutarque d'Athènes, et en modifiant conformément aux indications de ce dernier (p. 121, 17), la définition d'Apollonius, de façon à reconnaître nettement l'angle comme une grandeur.

1) Euclidis *Elementa ex interpretatione* Al-Hadschdschadsch *cum commentariis* Al-Narizii, Hauniae 1893, p. 9.

Les autres mentions d'AGANIS se rapportent au postulatum des parallèles, dont il avait prétendu donner une démonstration en forme, que SIMPLICIUS a crue valable, et qu'il a reproduite in extenso (BESTHORN-HEIBERG, p. 121—131; CURTZE, p. 66—73), tandis que PROCLUS n'en souffle pas mot. A la vérité, le commentaire qui accompagne la définition des parallèles d'AGANIS (BESTHORN-HEIBERG p. 9—11; CURTZE, p. 26—27), offre au contraire des rapports évidents avec ce que PROCLUS (p. 175—177) a extrait de GEMINUS; mais ces rapports ne concernent que ce qui était un bien commun, et le commentaire appartient plutôt à SIMPLICIUS qu'à AGANIS. Ce qui est propre à ce dernier, ce n'est pas d'ailleurs l'idée-mère de sa démonstration; elle se trouve en effet dans la définition des parallèles que PROCLUS attribue nommément à POSIDONIUS (ibid. p. 176, 6), en même temps qu'il indique rapidement les conséquences qu'on peut en déduire. Voilà qui est bien de GEMINUS.

POSIDONIUS définissait deux parallèles comme jouissant de la propriété que toutes les perpendiculaires abaissées des points de l'une sur l'autre fussent égales. Cette définition revient à admettre que le lieu des extrémités des perpendiculaires égales élevées sur une droite est une autre droite. On sait que si on admet ce postulat, on peut se passer de celui d'EUCLIDE, mais l'avantage est nul.

AGANIS n'a pas reconnu le vice de la définition de POSIDONIUS, mais il l'a transformée en parlant de l'égalité constante de distance entre les deux parallèles. Il entendait d'ailleurs par distance la plus courte ligne droite tirée d'un point de l'une des parallèles sur l'autre. Il se donnait ainsi à démontrer que cette distance se compte sur une perpendiculaire commune, démonstration facile, bien entendu en admettant tacitement le même postulat que POSIDONIUS.

Quant à GEMINUS, si PROCLUS (p. 176—177 et surtout p. 192) l'a bien suivi, voici quelle position il avait prise. Il jugeait que le postulatum des parallèles était en réalité un théorème à démontrer, mais il n'entreprenait point de le prouver, et mettait en garde contre les fausses évidences, en insistant sur la possibilité hypothétique que deux droites se rapprochassent indéfiniment sans jamais se recontrer. Comment aurait-il pu admettre pour valable la définition de POSIDONIUS?

Dans la discussion de PROCLUS sur la proposition I, 29 d'EUCLIDE, cette définition ne reparaît pas. Quoiqu'elle ait excité un certain intérêt pour l'enseignement préparatoire (HERONIS *definitiones*, ed. HULTSCH, 71), elle avait été écartée à bon droit du champ des études théoriques, jusqu'à ce qu'elle fut reprise par AGANIS.

Ces remarques me semblent suffisantes pour trancher la question; non seulement AGANIS est un contemporain de SIMPLICIUS, mais encore

ses idées sont essentiellement distinctes de celles de GEMINUS et ne dépassent pas ce que l'on peut espérer d'un philosophe dn VIe siècle.

Quel était son véritable nom grec? La question semble actuellement aussi insoluble qne pour ABTHINIATUS (BESTHORN-HEIBERG, p. 119). J'ai proposé ailleurs le nom AGAPIUS, mais je n'insiste pas; si parmi les philosophes contemporains de SIMPLICIUS, il n'y a pas, je crois, de nom connu qui soit plus voisin du mot arabe, SIMPLICIUS a pu certainement avoir, soit à Alexandrie (sous AMMONIUS), soit à Athènes (sous DAMASCIUS), nombre de camarades d'études qui nous sont restés inconnus.

En revanche, dans l'APOSEDANIUS de la traduction de GÉRARD de Crémone (CURTZE, p. 3), il me semble qu'on ne doit pas hésiter à reconnaître POSIDONIUS. La définition du point qui lui est attribuée est évidemment celle qui a été conservée sous la forme *πέρας ἀδιαστατὸν ἢ πέρας γραμμῶν* dans les HERONIS *def.* (HULTSCH, 2). Elle est donc réellement antique.

Comme SIMPLICIUS paraît suivre l'ordre chronologique, le HERUNDES ou HEROMIDES de GÉRARD de Crémone (CURTZE, p. 3 et 4) me semble un géomètre inconnu plus ancien que POSIDONIUS. Sa définition dn point (à peu près *παντὸς μεγέθους ἀμερὴς ἀρχή*), celle de la ligne (à pen près *τὸ ἐφ' ἓν διαστατὸν μέγεθος*), ne se retrouvent pas, à la vérité, exactement dans les textes qne nous possédons, mais ils ne représentent aucune notion qui leur soit étrangère ou que l'on doive dater d'une époqne relativement récente.

Enfin le DIACHASIMUS *minor* (CURTZE, p. 232), dont GÉRARD de Crémone a conservé sur le livre X d'EUCLIDE un scholie postérieur au NIRIZI, ponrrait bien être le mathématicien ABÛ GA'FAR EL-CHÂZIN (voir SUTER, Abhandl. zur Gesch. der Mathem. **10**, 1900, p. 58), qui a précisément commenté le Xe livre d'EUCLIDE. Comme ce commentaire subsiste, il y aurait au moins intérêt à y rechercher si le passage traduit par GÉRARD de Crémone ne s'y retrouve pas.

Das Rechenbuch des Abû Zakarîjâ el-Ḥaṣṣâr.

Von Heinrich Suter in Zürich.

In der Biblioth. Mathem. 13$_2$ (1899), p. 87 habe ich auf die Wahrscheinlichkeit hingewiesen, dafs das Gothaer Ms. 1489 (Pertsch, *Die arab. Handschriften d. herzogl. Bibl. zu Gotha*, 3. Bd., 1881, p. 114), das eine Abhandlung über die Rechenkunst von Muḥammed b. ʿAbdallâh b. ʿAijâš Abû Zakarîjâ, genannt el-Ḥaṣṣâr, enthält, identisch mit oder vielmehr das arabische Original einer von Moses b. Tibbon gemachten hebräischen Übersetzung eines Rechenbuches des Muh. b. ʿAbdallâh Abû Bekr, genannt el-Ḥaṣṣâr, sein könnte, welche Übersetzung noch im Vatican (Nr. 396) und in Oxford (Christ Church Coll. Nr. 189) vorhanden ist, und zuerst von M. Steinschneider beschrieben worden ist[1]), der auch zuerst die Vermutung ausgesprochen hat, der Autor möchte der von Ibn Chaldûn in seinen Prolegomena erwähnte el-Ḥaṣṣâr sein, auf dessen Rechenbuch der *Talchîṣ* des Ibn el-Bennâ basieren soll. Ich habe dabei die Bemerkung hinzugefügt, für die endgültige Erledigung dieser Frage wäre eine genauere Prüfung des Gothaer Ms. sehr zu wünschen. Um diese Angelegenheit nicht länger in Schwebe zu lassen, habe ich nun selbst diese genaue Prüfung unternommen. Für die Erlaubnis der Benutzung des Ms. für längere Zeit auf der Kantonsbibliothek in Zürich spreche ich hiermit der Verwaltung der herzogl. Bibliothek in Gotha meinen verbindlichsten Dank aus.

Das Rechenbuch des Ḥaṣṣâr umfafst 128 Blätter (18, 5 × 13, 5 cm), die Seite zu 15 Zeilen, in deutlichem Neschî geschrieben, aber nicht ganz sorgfältig, denn es kommen bisweilen Auslassungen oder auch Wiederholungen vor; auch bezweifle ich, dafs die Anordnung der Kapitel, besonders aber ihrer Unterabteilungen in dieser Abschrift ganz dieselbe sei, wie sie im Original gewesen ist, ich bin der Ansicht, dafs hie und da Verschiebungen stattgefunden haben. Einen Titel hat das Buch nicht, der Anfang (fol. 1^b) lautet:

1) Abhandl. zur Gesch. der Mathem. 3, 1880, p. 109—110.

„Im Namen Gottes des Barmherzigen und Gnädigen, mein Herr, erleichtere (meine Aufgabe), oh du Gütiger! Es spricht der Meister ABÛ ZAKARÎJÂ MUḤAMMED B. ʿABDALLÂH, bekannt unter dem Namen EL-ḤAṢṢÂR[1]); Lob sei Gott etc. .... Möge Gott uns das Richtige eingeben und uns bewahren vor dem Zweifel (der Unsicherheit)! Nachdem ich die Erfahrung gemacht habe (wörtl. „gesehen habe“), dafs die Wissenschaften und die (schöne) Litteratur zur Grundlage die Wissenschaft der Zahl haben, (natürlich) nach Gott und den göttlichen Dingen, so habe ich über die Zahl ein Werk verfafst, und habe darin auf jede subtile Frage meine Achtsamkeit gerichtet, damit es den Anfängern Einsicht verschaffe und den Geübten zur Erinnerung (Auffrischung) diene. Und alles, was ich in diesem Buche zusammengestellt, beschrieben und erklärt habe, das stammt aus den Darlegungen der älteren Gelehrten, und ich habe es entnommen aus den Büchern der Vorfahren, habe es gesammelt, kommentiert, und habe es mit ihren sicheren Schlüssen (Beweisverfahren) gefunden und abgeleitet. Und zu Gott flehe ich um Bewahrung vor Irrtum, und ihn bitte ich um Beistand für die Richtigkeit des Ausdruckes und der Ausführung (der Operationen): es giebt keinen Meister aufser ihm, und kein Gutes aufser dem Guten von ihm!“

Der Verfasser des Gothaer Handschriftenkatalogs, W. PERTSCH, sagt in seiner Beschreibung unserer Handschrift (l. c. p. 115), die Abhandlung breche auf fol. 128^b ab, ohne beendet zu sein, und am Schlusse der Beschreibung bemerkt er, die Handschrift sei nicht datiert. Beides ist unrichtig; die Abhandlung EL-ḤAṢṢÂRS schliefst auf fol. 128^a mit den Worten: „Beendigt ist das gesegnete Buch mit dem Lobe Gottes, seiner Hilfe und seiner Gunst (Auszeichnung) etc. .... Schlufs (der Abschrift) am Dienstag den 13. Muḥarrem des Jahres 836“ (9. Sept. 1432). — Was auf fol. 128^b steht, gehört nicht mehr zur Abhandlung EL-ḤAṢṢÂRS, es ist eine in das Gebiet der Rechtswissenschaft gehörende Aufgabe über den gesetzlichen Almosenzehnten (*el-zakât*); sie ist allerdings von der gleichen Hand geschrieben wie das vorhergehende, was den Verfasser des Katalogs zu dem erwähnten Irrtum geführt haben wird.

Es folgen dann nach einem leeren Blatt zehn Blätter (130—139) mit Bruchstücken aus einer ebenfalls arithmetischen Abhandlung, mit ostarabischen Ziffern und von verschiedenen Händen geschrieben; vielleicht sind es Teile aus der SACHÂWischen Abhandlung, d. h. aus dem Rechen-

1) Der Schlufsbuchstabe ist zerstört, aber es ist zweifellos, dafs derselbe ein *r* war; auf fol. 1^a steht auch mit roter Tinte geschrieben: *el-haṣṣâr fi'l-ḥisâb* (EL-ḤAṢṢÂR über die Rechenkunst); was die Bedeutung von EL-ḤAṢṢÂR (= der Schilfmattenflechter) anbetrifft, so vergleiche, was ich darüber in der Biblioth. Mathem. l. c. gesagt habe.

buch des 'Abdelqâdir b. 'Alî el-Sachâwî[1]), da auf fol. 1[a] unterhalb der rot geschriebenen Worte „*el-hassâr fî'l-hisâb*" noch die schwarz geschriebenen „*el-sachâwîje fî'ilm el-hisâb*" (die Sachâwische Abhandlung über die Rechenkunst) stehen.

Eine vollständige Wiedergabe dieser umfassendsten Abhandlung über arabische Rechenkunst, die auf uns gekommen ist, hätte zu grofsen Zeitaufwand erfordert; ich gebe daher im folgenden nur eine Übersicht über den Inhalt derselben, werde aber immerhin gewisse Kapitel und Stellen, die für die Geschichte der arabischen Rechenkunst von Bedeutung und Interesse sind, dem Leser in wortgetreuer Übersetzung vorführen. Nach der oben gegebenen Einleitung fährt der Verfasser fort:

„Ich habe dieses Buch in Kapitel eingeteilt: das erste Kapitel handelt über die Operationen mit ganzen Zahlen, das zweite über die Operationen mit Brüchen. Was das erste Kapitel betrifft, das über die Operationen mit ganzen Zahlen handelt, so ist dasselbe wieder in zehn Teile[2]) geteilt: der erste handelt über die Stufen (Ordnungen) der Zahlen und ihre Namen; der zweite über die Gobârzeichen und ihre Wertänderung nach den Stufen der Zahlen; der dritte über die Addition (*ğam'*) der Zahlen; der vierte über die Subtraktion (*tarh*); der fünfte über die Multiplikation (*darb*); der sechste über die Benennung (*tasmije*)[3]); der siebente über die Division (*qisme*); der achte über die Halbierung (*tansîf*); der neunte über die Verdoppelung (*tad'îf*); der zehnte über die Radizierung (*tağdîr*).

[fol. 2[a]] *Erstes Kapitel.* Erster Teil: „Über die Stufen der Zahlen[4]) und ihre Namen und ihren Ursprung. Wisse, das es zwölf Zahlennamen[5]) giebt; der erste ist das Eins, welches der Ursprung und der Anfang der Zahl ist; füge hierauf zu dem Eins wieder Eins hinzu, so entsteht das Zwei, dieses ist die erste Zahl, denn das Eins ist keine Zahl, das Zwei ist die erste Zusammensetzung (also die erste Zahl); hierauf füge zu dem Zwei wieder Eins hinzu, so wird diese Zahl Drei genannt"... So geht es fort bis zu Neun, dann heifst es weiter: „Und diese neun Zahlen heifsen die Einer, diese bilden die erste Stufe; alsdann füge zu dem Neun Eins hinzu, so heifst das Resultat Zehn, und dieses ist der

1) Vgl. Suter, *Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke*, p. 193.

2) Der Verfasser braucht hier für diese Unterabteilungen das Wort *aqsâm* (= Teile), im Text sind aber nachher alle diese Abteilungen wieder mit *bâb* (= Kapitel) überschrieben, was die Übersichtlichkeit stört.

3) „Dénomination" in der Übersetzung des *Talchîs* durch A. Marre.

4) Hier steht im Text der Singular.

5) Nämlich die Namen der Zahlen von 1 bis 9, dann die Namen für 10, 100 und 1000, aus diesen zwölf Namen werden alle Zahlennamen gebildet.

erste Rang (*manzile*) der Zehner, sie nimmt unter den Zehnern dieselbe Stellung ein, wie das Eins unter den Einern; hierauf füge zu dem Zehn ein zweites Zehn hinzu, so erhältst du Zwanzig, dies ist ein Name, der entnommen (zusammengesetzt) ist aus (den Namen) Zwei und Zehn", etc.... So geht es fort durch alle Zehner, dann durch die Hunderter und Tausender[1]) (hier nicht mehr vollständig durchgeführt) bis fol. 4^a, Zeile 5 v. o., hier folgt ein kleiner Abschnitt (*faṣl*), welcher beginnt: „Und da die Einer die erste Stufe bilden, so sagt man, ihr Index[2]) (*ass* oder *uss* = Grundlage, Spur) sei Eins, ebenso der Index der Zehner sei Zwei, derjenige der Hunderter Drei etc.... „Und die Männer der Rechenkunst nennen dieses Kapitel der Zahlenstufen auch das Kapitel des *Ass*."

[fol. 4^a] Zweiter Teil: „Über die Ġobârzeichen und ihre Wertänderung nach den Stufen der Zahlen. Wisse, daſs die Männer der Rechenkunst neun Ġobârzeichen verwenden, welche folgende verschiedene Formen haben[3]):

9 8 7 6 4 r (3) ɛ (2) 2 1

Nun folgt fol. 4^b—6^b eine weitere Ausführung über die Darstellung mehrstelliger Zahlen mit Hinzuziehung der Null (0 = *ṣifr*), welche wir, da sie nichts Bemerkenswertes bietet, übergehen.

[fol. 6^b] Dritter Teil: „Über die Addition der Zahlen." Hierzu ist nur zu bemerken, daſs die Summe, wie allgemein bei den Arabern *über* die Summanden geschrieben wird, und daſs EL-ḤAṢṢÂR die Addition mit der niedersten Stelle beginnt.

[fol. 8^b] Vierter Teil: „Über die Subtraktion der Zahlen." Diese Operation wird mit der höchsten Stelle begonnen im Gegensatz zur Addition, und was sehr interessant ist, auch im Gegensatz zu EL-QALAṢÂDÎ. EL-ḤAṢṢÂR folgt also in Bezug auf die Subtraktion noch der älteren Methode der Ostaraber, wie des MUHAMMED B. MÛSÂ EL-CHOWÂREZMÎ, während er bei der Addition schon den bequemern Weg eingeschlagen hat. IBN EL-BENNÂ[4]) erwähnt beide Wege, fügt aber bei der Addition hinzu, man be-

1) Aus dieser Ausführlichkeit der Darstellung kann man wohl den Schluſs ziehen, daſs dieses Buch in erster Linie ein für Anfänger im Rechnen, für Schüler bestimmtes Lehrbuch war.

2) Ich brauche hier absichtlich nicht das Wort „Exponent", das Andere dafür gesetzt haben, weil es sich nicht mit diesem Begriffe deckt, allerdings braucht EL-QALAṢÂDÎ auch für den Exponenten einer Potenz das Wort *ass*.

3) Ich gebe diese Ziffern wieder, da sie etwas abweichen von den Ġobârziffern, die uns M. CANTOR im 1. Bd. seiner *Vorlesungen* vorgeführt hat; die Zeichen für 2 und 3 nähern sich im Verlaufe der Darstellung mehr den Formen in den Klammern, also den heutigen.

4) Vergl. *Le Talkhys d'*IBN ALBANNÂ, *publ. et trad. par* AR. MARRE. Extrait des Atti dell' Accad. pontif. de' nuovi Lincei, T. XVII, Rome 1865, p. 3 und 8.

ginne am meisten mit der niedersten Stelle, bei der Subtraktion aber, man beginne am meisten mit der höchsten im Gegensatz zur Addition, er hat sich also noch nicht ganz von el-Ḥaṣṣâr emanzipiert; dagegen steht el-Qalaṣâdî schon auf dem modernen Boden, er beginnt bei beiden Operationen mit der niedersten Stelle.

[fol. 10a] Fünfter Teil: „Über die Multiplikation." Dieser Teil zerfällt in 10 Unterabteilungen, welche ebenfalls wieder wie die Hauptkapitel und die Teile Kapitel (*bâb*) genannt werden. In diesen werden zuerst einstellige Zahlen miteinander multipliziert, d. h. das Einmaleins wird vollständig in Worten durchgeführt, die Tafel, die sich bei Ibn el-Bennâ (l. c. p. 17) befindet, fehlt hier; dann folgen Multiplikationen von zweistelligen mit einstelligen Zahlen, von zweistelligen mit zweistelligen, u. s. f. Ich gebe im folgenden eine Stelle aus der 10. Unterabteilung in Übersetzung wieder:

„Wenn zu dir gesagt wird, multipliziere 43 mit 76[1]), so setze das 43 in eine Zeile, wie es früher gemacht wurde, hierauf das 76 in eine andere Zeile darunter, und zwar so, dafs die erste (niederste) Stelle der untern Zeile unter die letzte (höchste) Stelle der obern Zeile zu stehen kommt, und die zweite Stelle der untern Zahl zur Linken der ersten, nach folgender Weise (Figur): $\begin{smallmatrix} & 4 & 3 \\ 7 & 6 & \end{smallmatrix}$, hierauf multipliziere die letzte Stelle der obern Zahl mit der letzten der untern, d. h. 4 mit 7, dies giebt 28, und setze das 8 genau über das 7 in die Zeile über dem 43, und das zwei links von dem 8; dann multipliziere dasselbe 4 mit dem 6 unter ihm, dies giebt 24, setze das 4 über das 4 der obern Zeile und das 2 addiere zu dem 8, das über dem 7 steht, dies giebt 10, lösche also das 8 aus und setze an seine Stelle eine Null, und füge zu dem 2, das zuvorderst ist, 1 hinzu, dies giebt 3, lösche das 2 aus und setze an seine Stelle das 3; hierauf verschiebe die untere Zahl um eine Stelle nach rechts, so dafs das 6 unter das 3 und das 7 unter das 4 zu stehen kommt; hierauf multipliziere das 3 der obern Zahl mit dem 7 der untern, dies giebt 21, füge dazu das 4, das über dem 4 der obern Zeile steht, dies giebt 25, dann lösche das 4 aus und setze an seine Stelle das 5, das 2 setze an die Stelle der Null, die vor dem 4 stand; hierauf multipliziere das 3 mit dem 6 unter ihm, dies giebt 18, setze das 8 über das 3 der obern Zeile[2]), und füge das 1 zu dem 5 hinzu, dies giebt 6, lösche das 5 aus, und setze an seine Stelle das 6, so ist das Resultat der Multiplikation 3268."

Da das Auslöschen der Ziffern im Druck nicht leicht zu bewerk-

1) Alle Zahlen sind mit Worten ausgeschrieben, nur der ursprüngliche Ansatz der beiden Faktoren und das Schlufsresultat sind in Gobârziffern hingeschrieben.

2) Der Text hat hier unrichtig „lösche das 3 aus und setze an seine Stelle das 8".

stelligen ist, so lasse ich die Darstellung dieses Multiplikationsbeispiels in Ziffern weg, es kann sich diese Jeder leicht selbst konstruieren. Ich will hier nur darauf aufmerksam machen, dafs dieses Multiplikationsverfahren mit dem von EL-QALAṢÂDÎ[1]) zuerst beschriebenen im wesentlichen übereinstimmt, doch kennt dieser kein Auslöschen der Ziffern mehr, sondern setzt die einzelnen Teilprodukte über einander und erhält durch Addition derselben das Schlufsresultat. EL-ḤAṢṢÂR hat also wohl noch mit der Staubtafel gerechnet, wo das Auslöschen der Ziffern leicht auszuführen war, EL-QALAṢÂDÎ wahrscheinlich nicht mehr, sondern nur auf Papier. Eigentümlich ist es auch, dafs EL-ḤAṢṢÂR in diesem so ausführlichen Rechenbuch die Netzmethode der Multiplikation nicht erwähnt, vielleicht ist sie blofs durch die Abschreiber weggelassen worden.

[fol. 14a] Sechster Teil: „Über die Benennnng, d. i. die Teilnng des Kleineren durch das Gröfsere.[2]) Wisse, dafs diesem Kapitel eine Einleitung vorhergehen mufs, deren Kenntnis für den Studierenden notwendig ist; dieses Kapitel ist von grofsem Nutzen in allen Rechnungsoperationen, mit seiner Hülfe wird bei jeder ausgeführten Multiplikation die Richtigkeit derselben gefunden, ferner erkannt, ob eine Zahl zusammengesetzt oder nicht zusammengesetzt sei; eine zusammengesetzte Zahl ist nämlich eine solche, welche aus der Multiplikation einer zusammengesetzten Zahl mit einer zusammengesetzten oder nicht zusammengesetzten entstanden ist[3]); die nicht zusammengesetzte Zahl ist eine solche, die keinen Teiler aufser Eins besitzt. — Einleitung in die Benennung[4]): Ihr Studium (wörtl. „Verehrung") ist von Nutzen für den Studierenden. Wisse, dafs jede Zahl, die keine Einer hat, durch 10 teilbar ist (wörtl. „einen Zehntel besitzt"); ferner, dafs die Zahlen in gerade und ungerade eingeteilt werden. Was die gerade Zahl anbetrifft, so wird sie entweder durch wiederholte Subtraktion von 9 erschöpft (*inṭaraḥa* = weggeworfen), dann ist sie durch 9 teilbar, oder sie wird nicht erschöpft und der Rest ist 3 oder 6, dann ist sie durch 6 teilbar; bleibt aber ein anderer Rest, so subtrahiere von der Zahl wiederholt 8, wird sie erschöpft, so ist sie durch 8 teilbar, wenn nicht und der Rest ist 4, so ist sie durch 4 teilbar; bleibt [fol. 14b] aber ein anderer Rest, so subtrahiere von der Zahl wiederholt 7, wird sie

1) *Traduction du traité d'arithmétique d'*ABOÛL HASAN ALÎ B. MOHAMMED ALKALÇADÎ, *par* F. WOEPCKE; Extrait des Atti dell' Accad. pontif. de' nuovi Lincei, T. XII, Rome 1859, p. 9 und 10.

2) In einem neueren Rechenbuch, verfafst von BUṬRUS EL-BISTÂNÎ, Beirût 1859 (p. 165), finde ich folgende Bemerkung: „Diese (Art der) Teilung nennen die Magrebiner (Westaraber) „die Benennung", die Perser aber „das Verhältnis" (*el-nisbe*).

3) Es ist dies nicht korrekt ausgedrückt, der Text scheint hier verdorben zu sein.

4) Im Text steht hier wohl unrichtig „Multiplikation".

erschöpft, so ist sie durch 7 teilbar, wenn nicht, so ist sie nur durch 2 teilbar. — Was die ungerade Zahl anbetrifft, so wird sie entweder durch wiederholte Subtraktion von 9 erschöpft, dann ist sie durch 9 teilbar, oder sie wird nicht erschöpft und der Rest ist 3 oder 6, dann ist sie durch 3 teilbar; bleibt aber ein anderer Rest, so subtrahiere von der Zahl wiederholt 7, wird sie erschöpft, so ist sie durch 7 teilbar, wenn nicht, so versuche es mit den stummen Teilen[1]), du findest es, so Gott will; merke dir aber noch, dafs jede Zahl, die am Ende ein 5 hat, durch 5 teilbar ist. — Kapitel der Neunersubtraktion: Wisse, dafs bei (wiederholter) Subtraktion von 9 von jedem Zehner 1, von jedem Hunderter 1, von jedem Tausender 1 übrig bleibt; deshalb nimmst du jede Zahl (d. h. Ziffer) nach ihrem Namen (ohne Stellenwert)[2]), wie es gemacht wurde bei der Multiplikation.[3]) — Kapitel der Achtersubtraktion: Wisse, dafs bei (wiederholter) Subtraktion von 8 von jedem Zehner 2, von jedem Hunderter 4 übrig bleibt, dafs die geraden Hunderter durch 8 teilbar sind, also auch die Tausender und was nach ihnen kommt.[4]) — Kapitel der Siebnersubtraktion: Wisse, dafs bei (wiederholter) Subtraktion von 7 von jedem Zehner 3, von jedem Hunderter 2, von jedem Tausender 6, von jedem Zehntausender 4, von jedem Hunderttausender 5, von jedem Millioner 1, von jedem Zehnmillioner [fol. 15ᵃ] wieder 3 übrig bleibt, d. h. es kehren nach je zwei *Tekrâr*[5]) die gleichen Reste wieder; wisse also, dafs bei jedem Tausender, dessen Wiederholungszahl (*tekrâr*) ungerade ist, der Rest 6 beträgt, dagegen bei jedem Tausender, dessen Wiederholungszahl gerade ist, der Rest 1 ist, dafs ferner bei jedem Zehntausender mit ungerader Wiederholungszahl der Rest 4, bei jedem Zehntausender mit gerader Wiederholungszahl 3 beträgt", etc. — Der Schlufs dieser Einleitung lautet: „Wisse ferner, dafs eine Zahl, die nicht durch 2 teilbar ist, es auch nicht durch 4 und 8 sein kann; dafs eine Zahl, die nicht durch 3 teilbar ist, es auch nicht durch 6 und 9 sein kann, und dafs jede Zahl, die nicht durch 5 teilbar ist, es auch nicht durch 10 sein kann."

---

1) So mufs es heifsen nach el-Qalaṣâdî, d. h. „versuche, ob 11, 13 etc. Teiler der betr. Zahl seien", und nicht *fi'l-uchrâ* (= mit der andern), wie es im Text el-Ḥaṣṣârs steht.

2) Vgl. Ibn el-Bennâ (l. c. p. 9), wo es heifst: „tu prends la valeur des sièges, comme s'ils étaient des unités."

3) d. h. bei der Anwendung der Neunerprobe in der Multiplikation.

4) Hier und bei der Siebnersubtraktion fehlt die Anwendung dieser Restregeln auf die Bestimmung des Restes einer mehrstelligen Zahl, es fehlt auch am Schlusse dieser Einleitung die Anwendung des Gesagten auf die verschiedenen Proben.

5) d. h. „Wiederholung"; so heifst jede Gruppe von je 3 Stellen einer Zahl; M. Cantor hat „*takarrur*", was auch „Wiederholung" bedeutet, allein sowohl Ibn el-Bennâ als auch el-Ḥaṣṣâr haben *tekrâr*.

„Nach dieser Einleitung kehren wir zum Kapitel der **Benennung** zurück, d. h. zur Bildung des Verhältnisses einer kleineren Zahl zu einer größeren, (zur Untersuchung) ob jene **ein** Teil oder **mehrere** von dieser sei. Wenn z. B. zu dir gesagt wird, benenne eins nach fünfzehn, so hast du nun gelernt, dafs fünfzehn eine zusammengesetzte [fol. 15b] Zahl ist, und zwar entstanden aus der Multiplikation von drei mit fünf, also ist drei ein Fünftel von ihr, und fünf ein Drittel von ihr, und eins ist ein Drittel von drei, also ist eins der Drittel des Fünftels von fünfzehn. Es ist notwendig, dafs hier noch einleitend etwas hinzugefügt werde; ich sage also: das Verhältnis von 1 zu 2 heifst ein Zweitel, dasjenige von 1 zu 3 ein Drittel, das von 2 zu 3 zwei Drittel, das von 1 zu 4 ein Viertel, das von 2 zu 4 zwei Viertel oder ein Zweitel“, etc. .... So geht es fort bis zu neun Zehntel, womit diese Einleitung beendigt ist. Dann folgt: „Ich sage also, dafs eins ein Drittel des Fünftels von fünfzehn ist, wenn du nun diese Benennung durch Ġobârzeichen (wörtl. „durch den *Ġobâr*“) darstellen willst, so schreibe dies so: $\frac{\quad 1}{5\ \ 3}$.[1]) Willst du nun eine andere Zahl nach 15 benennen, so setze sie über das 3 (den einen Faktor von 15), dann suche eine Zahl, die mit 3 multipliziert entweder die gegebene Zahl ergiebt, oder ein Produkt, das von jener Zahl subtrahiert einen Rest kleiner als 3 läfst. Soll z. B. 7 nach 15 benannt werden, so setze das 7 über das 3, hierauf suche eine Zahl, die mit drei multipliziert entweder 7 ergiebt, oder eine Zahl, die um weniger als 3 kleiner ist als 7, du findest diese Zahl gleich 2, nun setze dieses 2 über das 5, multipliziere 2 mit 3, dies giebt 6, subtrahiert von 7 bleibt 1, dieses setze nach dem 2 über das 3, so dafs du nun 2 über 5 und 1 über 3 hast; ziehe also eine Linie, schreibe unter sie das 5 und das 3, und zwar das 5 rechts vom 3, dann über das 5 das 2 und über das 3 das 1, so wird dies ausgesprochen: zwei Fünftel und ein Drittel eines Fünftels; du benennst also immer das, was über dem gröfsern Faktor des Nenners steht, nach diesem, und hierauf das, was über dem kleinern Faktor steht, nach diesem und dem gröfsern, der ihm vorangeht; geschrieben wird es:

$$\frac{2\ \ 1}{5\ \ 3}$$ [2])

1) Diese Form ist im Text weggelassen (wahrscheinlich durch die Abschreiber), an ihrer Stelle steht eine überflüssige Darstellung, welche klar machen soll, dafs man die Zerlegung von 15 in 5 mal 3 in der Tafel des Einmaleins (die aber bei el-Ḥaṣṣâr fehlt) finden könne.

2) Ich gebe diese Brüche und alle folgenden in unserer Schreibweise; nach arabischer, wo von rechts nach links gelesen wird, ist also der obige Bruch geschrieben $\frac{1\ \ 2}{3\ \ 5}$; bekanntlich kann dies auch in Form eines aufsteigenden Kettenbruches geschrieben werden, nämlich $\frac{2+\frac{1}{3}}{5}$ (vgl. Cantor, *Vorlesungen* I, 764—765, 2. Aufl.).

Hieraut wird 11 nach 15 benannt, oder $\frac{11}{15}$ zerlegt in $\frac{3}{5} + \frac{2}{5 \cdot 3}$, geschrieben $\frac{3\;\;2}{5\;\;3}$; dann wird 1 nach 96 benannt, oder $\frac{1}{96}$ dargestellt als die Hälfte eines Sechstels eines Achtels geschrieben $\frac{\;\;\;\;1}{8\;\;6\;\;2}$ [1]); u. s. w.

[fol. 18ᵃ] Siebenter Teil: „Über die Division der Zahlen." Dieses Kapitel wird sehr rasch abgethan, es ist nur wenig umfangreicher als im *Talchîṣ*, allerdings enthält der letztere unter dem Kapitel der Division auch die Benennung und die Zerlegung der Zahlen in Faktoren, welche hier in einem besondern Teil behandelt werden. EL-HAṢṢÂR unterscheidet zuerst zwei Fälle der Division, diejenige von ganzen Zahlen durch ganze Zahlen, und diejenige von ganzen Zahlen durch Brüche oder umgekehrt; bei beiden sagt er, handelt es sich darum, zu finden, was es auf die Einheit trifft. Hier wird nun blofs die Division von ganzen Zahlen durch ganze Zahlen behandelt, der andere Teil gehört in das Kapitel über die Brüche. Zuerst kommt das Beispiel: „Es soll zwanzig durch vierzig geteilt werden; benenne eins nach vierzig, dies ist ein Vierzigstel (ein Viertel eines Zehntels), dann nimm einen Vierzigstel von Zwanzig, das ist ein Zweitel, und dies trifft es auf die Einheit (wörtl. „auf jedes Eins, oder jeden Einzelnen, von den Vierzig")". [2])

Nun folgen einfache Divisionen, zweistellige Zahlen durch ein- und zweistellige, dreistellige durch einstellige, z. B. 854 durch 3 gleich $284\frac{2}{3}$; hierzu folgt eine Siebnerprobe, die darin besteht, dafs gezeigt wird, dafs sowohl Dividend als Quotient durch 7 teilbar sind. — Dann wird 98746 durch 36 geteilt, indem 36 in $4 \cdot 9$ zerlegt wird, das Resultat wird geschrieben: $2742\frac{8\;\;2}{9\;\;4} = 2742 + \frac{8}{9} + \frac{2}{36}$ [3]); auch hier [fol. 20ᵇ] folgt die Siebnerprobe: Der Dividend giebt den Rest vier; beim Quotienten wird so verfahren: die ganze Zahl giebt den Rest 5, multipliziere dieses mit dem Rest, der sich aus (der Division von) 9 ergiebt und welcher 2 ist, dies giebt 10, von diesem ist der Rest 3, zu diesem füge hinzu den Rest, der sich aus (der Division von) 8 ergiebt, also 1, dies giebt 4, multipliziere

---

1) Eigentlich sollte sowohl über dem 6 als über dem 8 eine Null stehen, wie dies auch bei gewissen Bruchformen später der Fall ist, also: $\frac{0\;\;0\;\;1}{8\;\;6\;\;2} = \frac{0}{8} + \frac{0}{8 \cdot 6} + \frac{1}{8 \cdot 6 \cdot 2}$.

2) Eigentümlicherweise tritt hier in der Division noch ein Beispiel der Benennung auf; wir denken uns, EL-ḤAṢṢÂR habe sich diesen Fall so vorgestellt, es sollen z. B. zwanzig Dinare unter vierzig Personen verteilt werden, so trifft es auf jede Person einen halben Dinar; einen solchen Fall rechnete EL-ḤAṢṢÂR zur Division und nicht zur Benennung. Gelegentlich sei hier noch bemerkt, dafs wir heutzutage statt „Benennung" vielleicht sagen würden „Bruchbildung" oder „Entstehung des Bruches".

3) Es wird nicht oder nur sehr selten abgekürzt, der Bruch $\frac{8\;\;2}{9\;\;4}$ könnte nämlich abgekürzt geschrieben werden $\frac{8\;\;1}{9\;\;2}$, dann aber könnte die Siebnerprobe nicht in der Weise ausgeführt werden, wie es unmittelbar nachher geschieht.

dieses mit dem zweiten Faktor 4 des Nenners, dies ergiebt 16, von diesem ist der Rest 2, dazu füge das 2 über dem 4, giebt 4, also denselben Rest wie beim Dividenden, also ist die Division richtig.[1]) — Weitere Divisionen mit mehrstelligem Divisor folgen nicht.

[fol. 21ᵇ] Achter Teil: „Über die Halbierung." Hier wird z. B. 8764 durch 2 geteilt, genau so wie durch irgend eine andere einstellige Zahl, und wir begreifen heute nicht mehr, wie man diese Halbierung, die wahrscheinlich ägyptischen Ursprungs ist, so lange als besondere Operation beibehalten konnte; hier lehnt sich EL-ḤAṢṢÂR in der That noch eng an die Alten an, und zwar nach unserer Kenntnis der älteren Werke, an MUḤAMMED B. MÛSÂ[2]) und EL-NASAWÎ, EL-KARCHÎ hat Halbierung und Verdoppelung nicht mehr berücksichtigt; auch der Epitomator EL-ḤAṢṢÂRS, IBN EL-BENNÂ, und EL-QALAṢÂDÎ haben diese Operationen nicht mehr aufgenommen.[3])

[fol. 22ᵇ] Neunter Teil: „Über die Verdoppelung." Von dieser ist das gleiche zu sagen wie von der Halbierung, sie wird etwas kürzer abgethan, immerhin mit einem Beispiel.

Zehnter Teil: „Über die (Quadrat-)Wurzelausziehung aus Zahlen. Wisse, daſs die zu radizierenden Zahlen die Quadratzahlen sind[4]), und deren Ursprünge (Grundlagen) sind die Wurzeln. Wisse auch, daſs die Zahlstufen teils Wurzeln besitzen, teils keine solchen; so hat es unter den Einern solche, die Wurzeln haben, z. B. 1, 4 etc., unter den Zehnern hat es keine, die Wurzeln besitzen, unter den Hunderten hat es wieder solche, so z. B. ist die Wurzel aus 100 gleich 10, u. s. f. Wenn du nun wissen willst, wie man aus einer Quadratzahl die Wurzel ziehe, so fange bei den Einern an und sage: diese haben Wurzeln, die Zehner nicht, die Hunderter haben solche, u. s. w.; wenn nun die letzte Stelle eine solche ist, die eine Wurzel hat, so fange bei ihr an, wenn nicht, so kehre um eine Stelle zurück, d. h. nimm die rechts von ihr liegende dazu und suche nun eine Zahl, die mit sich selbst multipliziert die beiden zusammen genommenen Zahlen verschwinden macht, oder aber noch einen Rest übrig läſst[5]);

---

1) Diese Restbestimmung des Quotienten ergiebt sich aus folgender Schreibweise desselben: $\frac{(2742 \cdot 9 + 8)\, 4 + 2}{36}$.

2) EL-ḤAṢṢÂR zeigt immerhin, wie wir dies auch bei der Addition gesehen haben, einen Fortschritt gegenüber MUḤ. B. MÛSÂ, als er die Halbierung mit der höchsten Stelle beginnt statt mit der niedersten.

3) Bekanntlich sind sie auch ins latein. Mittelalter übergegangen, was wohl den groſsen Einfluſs der Schriften des MUḤ. B. MÛSÂ und JOH. HISPALENSIS beweist.

4) Es handelt sich in diesem Teil nur um rationale Wurzeln, die andern kommen später.

5) Diese Eventualität ist im Texte weggelassen, der leider in dieser allgemeinen Darstellung des Verfahrens etwas fehler- und lückenhaft ist.

hierauf verdoppele die Zahl, die du mit sich selbst multipliziert hast, und stelle das Resultat um eine Stelle weiter nach rechts, dann suche eine Zahl, die du zur Rechten der vorigen setzest, und die, wenn dn sie mit der verdoppelten Zahl multiplizierst und ebenso mit sich selbst, alles verschwinden macht, was von der ursprünglichen Zahl übrig geblieben, dann [fol. 23b] ist das Verfahren zu Ende. Willst du z. B. die Wurzel aus 625 haben, so bestimme zuerst die oberste Stelle, welche eine Wurzel hat, diese ist 6, suche dann eine Zahl, die mit sich selbst multipliziert, das 6 verschwinden macht, oder einen Rest übrig läfst, der kleiner ist als sie (?), du findest diese Zahl gleich 2, multipliziere dieses mit sich selbst, giebt 4, subtrahiere dieses von 6, bleibt 2, setze dieses an die Stelle des 6; hierauf verdoppele das 2, das du mit sich selbst multipliziert hast, dies giebt 4, und setze es um eine Stelle weiter nach rechts unter das (zweite) 2; dann suche eine Zahl, die du unter das 5 setzest, und die mit dem 4 multipliziert und ebenso mit sich selbst multipliziert, die noch vorhandene Zahl verschwinden macht, du findest diese Zahl gleich 5, multipliziere sie also mit 4, giebt 20, dies von 22 subtrahiert bleibt 2, dann multipliziere 5 mit sich selbst, giebt 25, subtrahiere dieses von den 25, welche über ihm stehen, so verschwinden diese; nun halbiere die vorher verdoppelte Zahl wieder und lasse die Hälfte an derselben Stelle stehen, so hast du als Wurzel 25."

Da hier noch Ziffern durchgewischt werden, so ist die Darstellung des Verfahrens durch Ziffern etwas verschieden von der des Qalaṣâdî (l. c. p. 38), nämlich folgendermafsen: Zuerst steht die Zahl 625 da, nachdem das Quadrat von 2[1]) von 6 abgezogen ist nnd der Rest 2 an Stelle des 6 gesetzt ist, hat man die Zahl 225 auf der Tafel; das 2 wird verdoppelt und das 4 unter das zweite 2 gesetzt, also: $\begin{smallmatrix}225\\ \ \,4\ \end{smallmatrix}$, 4 in 22 geteilt giebt 5, dieses wird hinter das 4 gesetzt, also: $\begin{smallmatrix}225\\ \ \ 45\end{smallmatrix}$, nun 5 mal 45 von 225 abgezogen, bleibt Null, dann znletzt das 4 halbiert, nnd an seine Stelle die Hälfte 2 gesetzt, so hat man die Wurzel 25.

[fol. 24a] Die nächste Wurzelausziehung ist diejenige aus 583696, die Darstellung des Verfahrens durch Ziffern ist nach der Beschreibung folgende: zuerst steht die Zahl 583696 da, nachdem das Quadrat von 7 von 58 abgezogen ist und der Rest 9 an Stelle von 58 gesetzt ist, steht die Zahl 93696 da; hierauf verdoppelt man das 7, giebt 14, und setzt dieses unter das 93, also: $\begin{smallmatrix}93696\\14\ \ \ \ \ \ \end{smallmatrix}$, dann dividiere man 93 durch 14, giebt 6, und

1) Das irgendwohin, vielleicht über das 6, geschrieben wird, el-Ḥaṣṣâr sagt nichts davon; das Hinschreiben desselben ist aber auch keineswegs notwendig, wie man am Schlusse der Darstellung sieht.

setze dieses hinter das 14, also: $\begin{matrix}93696\\146\end{matrix}$, multipliziere 146 mit 6, und ziehe das Resultat von 936 ab, bleibt 60, welches an die Stelle von 936 gesetzt wird, also hat man jetzt $\begin{matrix}6096\\146\end{matrix}$; dann verdoppele man das 6 (von 146), giebt 12, füge den Zehner 1 von diesem zu 4 hinzu, giebt 5, also hat man jetzt 152, dieses setze man unter das 146, indem man es um eine Stelle nach rechts verschiebt, so hat man nun auf der Tafel: $\begin{matrix}6096\\146\\152\end{matrix}$[1]; hierauf suche man, wie oft 152 in 609 enthalten ist, es ist dies 4 mal, setze das 4 hinter das 2, also: $\begin{matrix}6096\\146\\1524\end{matrix}$ multipliziere nun 1524 mit 4, und subtrahiere das Ergebnis [fol. 25a] von 6096, der Rest ist Null; hierauf halbiere man alles, was man verdoppelt hat, d. i. 152, und setze die Hälfte 76 an seine Stelle, so hat man, wenn man das 4 dahinter dazu nimmt, die Wurzel 764.

Wie man sieht, kann dieses Verfahren auf der Staubtafel rasch und mit wenig Ziffern durchgeführt werden; es zeigt auch einige Ähnlichkeit mit dem heutigen insofern, als das jeweilige Divisionsergebnis hinter den Divisor gesetzt wird.

Nun folgt eine kurze Auseinandersetzung des Verfahrens der Wurzelausziehung aus Zahlen, die Nullen am Ende haben und als Beispiel ist die Wurzel aus 10000 gewählt. Am Schlusse dieses Kapitels heifst es dann: „Nun sind wir am Ende unserer zehn Kapitel (über die ganzen Zahlen) angelangt, und beginnen nun mit der Multiplikation[2] [fol. 25b] der Brüche in Gobârbezeichnung; dieses Kapitel haben wir in 72 (Unter-) Kapitel[3]) geteilt."

1. Teil: „Über die Multiplikation der Brüche." Dieser erste Teil bildet gleichsam eine Einleitung in das Kapitel über die Brüche, und sollte daher einen andern Titel tragen, etwa: „Über die verschiedenen Arten von Brüchen und ihre Schreibweise". Zuerst folgen nun die einfachen Brüche, die ersten neun Stammbrüche, ihre Namen und ihre Schreibweise, also $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{10}$; dann sagt der Verfasser: „Willst du nun zwei Drittel darstellen, so schreibe (in dem Bruche $\frac{1}{2}$) an die Stelle des

1) Dieses Zahlenbild steht nicht mehr im Text, ich habe es aus letzterem rekonstruiert, vielleicht wurde auch das 146 durchgewischt, und das 152 unmittelbar unter das 609 gesetzt.

2) Eigentümlicherweise kommt zuerst die Multiplikation und erst nachher die Addition und Subtraktion der Brüche; wir können nicht entscheiden, ob dies auch die Anordnung des Originals war.

3) Ich werde diese in der Folge auch wieder „Teile" nennen.

1 ein 2 und au diejenige des 2 ein 3, also $\frac{2}{3}$“, u. s. f. „Zu den einfachen Brüchen gehören auch die stummen[1]) Brüche (d. h. solche, deren Nenner eine der Primzahlen von 11 an ist), z. B. $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{13}$, $\frac{2}{11}$, $\frac{5}{17}$ etc., arabisch ausgedrückt: „ein Teil von elf[2]), ein Teil von dreizehn, zwei Teile von elf“ etc.

Nun kommt er zu den Brüchen, deren Nenner zusammengesetzte Zahlen sind, und nimmt als erstes Beispiel einen Zwölftel, dies schreibt er: $\frac{\quad 1}{6 \; 2}$ und liest es „ein Zweitel eines (des) Sechstels“; er fügt hierauf hinzu [fol. 26a]: „das ist die Darstellung (Figur) eines **Bruchbruches** (*kesru kesrin*); wenn du aber einen **Bruch mit** (und) **Bruchbruch** darzustellen hast, so schreibe die Nenner unter einen (horizontalen) Strich und über jeden einzelnen derselben die ihm zukommenden Teile (wörtl. „seinen erwähnten Teil“), z. B. wenn zu dir gesagt wird, stelle drei Fünftel und einen Drittel eines Fünftels dar, so schreibe dies so: $\frac{3 \; 1}{5 \; 3}$.“ Als zweites Beispiel folgt: $\frac{4 \; 3}{13 \; 11}$ = vier Dreizehntel und drei Elftel eines Dreizehntels (= $\frac{47}{143}$).

Nun folgen 71 Teile (Kapitel), in denen Multiplikationen von je zwei Faktoren ausgeführt werden, die alle möglichen Kombinationen aus den vier Bestandteilen: ganze Zahlen, einfache Brüche, Bruchbrüche und Brüche mit Bruchbrüchen enthalten. Es ist dies die umfangreichste[3]) aller bisher bekannten Darstellungen der Bruchrechnung (insbesondere der Multiplikation) in arabischen Rechenbüchern, so weitschweifend, daſs sie ermüdend wirkt, so unhandlich und verwirrend für den Praktiker, daſs eine kürzere Bearbeitung des hier Gebotenen eine absolute Notwendigkeit war. Es würde sich kaum der Mühe lohnen, wenn ich alle diese Fälle zur Darstellung bringen wollte, aber einige typische Beispiele muſs ich doch herausheben, um den Leser mit den mühsamen und nach unseren Begriffen komplizierten Bruchrechnungen aus der Zeit EL-ḤAṢṢÂRS bekannt zu machen.

[fol. 27b] 2. **Teil**: „Über die Multiplikation eines[4]) Bruches mit einer[4]) ganzen Zahl.“ Wenn $\frac{5}{6}$ mit 10 multipliziert werden soll, so wird dies so angeschrieben: $\begin{matrix}\frac{5}{6}\\10\end{matrix}$; dann wird gesagt, man multipliziere 5 mit 10, giebt 50, und teile dies durch 6, giebt $8\frac{2}{6}$ (wird nicht abgekürzt); hierzu folgt die Siebnerprobe.

---

1) Im Text steht hier nur *el-aǵzâ'* (= die Teile); vgl. auch den *Talchîṣ*, l. c. p. 20.

2) Zu ergänzen: „Teilen eines Ganzen“ (oder der Einheit).

3) Die Multiplikation umfaſst 46 Blätter, dann folgen noch auf 42 Blättern, allerdings mit Algebraischem und Reihensummierung vermischt, die Addition, Subtraktion und Division der Brüche.

4) Der Verfasser braucht immer den bestimmten Artikel.

3. Teil: „Über die Multiplikation eines Bruches samt Bruchbruch mit einer ganzen Zahl.“ Wenn $\frac{1}{5}$ und die Hälfte von $\frac{1}{5}$ mit 12 multipliziert werden soll, so [fol. 28ᵃ] schreibe man dies so: $\begin{array}{c}\frac{1\;\,1}{5\;\,2}\\ 12\end{array}$; dann wird gesagt: „Beginne in der obern Linie und multipliziere das 1 über dem 5 mit dem 2 unter dem Strich und addiere zum Produkt das 1 über dem 2, dies giebt 3, dies multipliziere mit 12, giebt 36, und dividiere dies durch das Produkt der Nenner[1]), d. h. durch 10, dies giebt $3\frac{3}{5}$.[2])“ Folgt Siebnerprobe.

4. Teil: „Über die Multiplikation eines Bruchbruches mit einer ganzen Zahl.“ Wenn der Drittel eines Siebentels mit 25 multipliziert werden soll, so schreibe man dies so: [fol. 28ᵇ] $\begin{array}{c}\frac{\;\;1}{7\;\,3}\\ 25\end{array}$; dann beginne man in der obern Zeile und multipliziere das 1 mit 25, und dividiere das Resultat durch 21 (durch 7 und 3), dies giebt: $1\frac{1\;\,1}{7\;\,3}$ $(= 1\frac{4}{21})$. Folgt Siebnerprobe.

5. Teil: „Über die Multiplikation zweier verschiedener (einfacher) Brüche mit einer ganzen Zahl.“ Wenn $\frac{3}{4}$ und $\frac{4}{5}$ mit 15 multipliziert werden soll, so schreibe man dies so: $\begin{array}{c}\frac{3}{4}\,\frac{4}{5}\\ 15\end{array}$[3]), dann beginne man in der obern Zeile und multipliziere das 3 mit 5 und das 4 mit 4, und addiere die beiden Produkte, dies giebt 31, dies multipliziere man mit 15, giebt 465, und teile dieses durch 4 und durch 5, dies giebt: $23\frac{1\;\,1}{5\;\,4}$ $(= 23\frac{5}{20})$.[4])

Ich habe diese vier unmittelbar aufeinander folgenden Teile wiedergegeben, um die Regellosigkeit der Anordnung zu zeigen, die das ganze Werk charakterisiert; jedermann würde hier den vierten Teil vor dem dritten erwarten und vielleicht auch den fünften vor dem dritten; auch wäre für die Ausführung der Rechnung des fünften Teils das Vorausgehen der Addition der Brüche notwendig.

[fol. 30ᵃ] 9. Teil: „Über die Multiplikation zweier verschiedener (einfacher) Brüche mit einer ganzen Zahl und einem Bruche.“

Beispiel: $\begin{array}{c}\frac{3}{4}\,\frac{4}{5}\\ 5\frac{5}{6}\end{array}$.

Gang der Ausrechnung:

$$\frac{(3\cdot5+4\cdot4)\,(5\cdot6+5)}{6\cdot5\cdot4} = \frac{1085}{6\cdot5\cdot1} = 9\frac{0\;\,1\;\,1}{6\;\,5\;\,4}\ \left(= 9 + \frac{0}{6} + \frac{1}{30} + \frac{1}{120} = 9\frac{5}{120}\right).$$

Hier folgt zum ersten Mal in diesem Kapitel die allgemeine Rech-

1) Der Text hat einfach „durch die Nenner“, d. h. nacheinander durch 5 und durch 2.

2) Im Text steht: $3\frac{3\;\,0}{5\;\,2}$, d. h. $3 + \frac{3}{5} + \frac{0}{2\cdot5}$.

3) Das blofse Nebeneinanderstellen zweier Brüche bedeutet ihre Addition.

4) Die Abkürzung $23\frac{1}{4}$ ist nicht angegeben.

nungsregel für diesen Fall, was sich noch öfters wiederholt, immerhin aber in der Mehrzahl der Fälle fehlt.

[fol. 32ᵃ] 13. Teil: „Über die Multiplikation eines Bruches samt Bruchbruch mit einer ganzen Zahl und einem Bruche samt Bruchbruch."

Beispiel: $\begin{array}{l} \frac{5\;1}{6\;2} \\ 8\frac{5\;1}{7\;5} \end{array}$.

Gang der Ausrechnung:

$$\frac{(5\cdot 2+1)\;[(8\cdot 7+5)\,5+1]}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 2} = \frac{3366}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 2} = 8\frac{3}{7\;6\;5\;2}\,{}^{1)}\left(= 8 + \frac{0}{7} + \frac{0}{42} + \frac{3}{210} + \frac{0}{420} = 8\frac{3}{210}\right).$$

[fol. 41ᵃ] 28. Teil: „Über die Multiplikation eines (einfachen) Bruches mit einem (einfachen) Bruche."[2] Es sei $\frac{7}{8}$ mit $\frac{9}{10}$ zu multiplizieren, man schreibe dies so: $\begin{array}{c} \frac{7}{8} \\ 9 \\ 10 \end{array}$; man multipliziere nun das 7 mit dem 9, dies giebt 63, und teile dies durch 8 und 10, dies giebt: $\frac{7\;7}{10\;8}$ $\left(=\frac{63}{80}\right)$. Hier folgt, wo man es am ehesten erwarten würde, keine allgemeine Rechnungsregel für diesen Fall.

[fol. 47ᵇ] 41. Teil: „Über die Multiplikation eines Bruches von einer ganzen Zahl und einem Bruche mit einem ähnlichen Ausdruck.[3]) Soll z. B. $\frac{2}{3}$ von $5\frac{5}{6}$ mit $\frac{6}{7}$ von $8\frac{4}{9}$ multipliziert werden, so schreibe man dies so:

$$\begin{array}{l} \frac{2}{3}\,5\frac{5}{6} \\ \frac{6}{7}\,8\frac{4}{9}\,{}^{4)}. \end{array}$$

Das Resultat der Multiplikation ist: $28\frac{1\;2\;2\;0}{9\;7\;6\;3}$ $\left(=28\frac{56}{378}\right)$. Diese Aufgabe und eine ganze Reihe der noch folgenden können, wie der Verfasser selbst angiebt, auf zwei und mehr verschiedene Arten aufgefaſst werden; als solche Beispiele gebe ich die beiden folgenden:

[fol. 55ᵇ] 55. Teil: „Über die Multiplikation einer ganzen Zahl und eines Bruches und einer ganzen Zahl und eines Bruches mit einem ähnlichen Ausdruck."

Beispiel: $\begin{array}{l} 3\frac{1}{2}\;5\frac{1}{3} \\ 4\frac{3}{4}\;6\frac{4}{5} \end{array}$.

Nach dem Wortlaut des Titels dieses Teils ist allerdings nur folgende Auffassung zulässig: $(3\frac{1}{2} + 5\frac{1}{3})\,(4\frac{3}{4} + 6\frac{4}{5})$ und nach dieser ist das Ergebnis: $102\frac{0\;0\;3}{6\;5\;4}$ $\left(=102\frac{3}{120}\right)$; nach der arabischen Schreibweise des Zahlen-

1) So geschrieben, damit alle Nenner, die in der Aufgabe vorkommen, auch im Schluſsresultat figurieren; es könnte einfacher geschrieben werden: $8\frac{1}{7\;5\;2}$ $\left(=8\frac{1}{70}\right)$; auch sollten von rechtswegen über 7, 6 und 2 Nullen stehen, bisweilen aber sind diese weggelassen.

2) Auch diesen Fall würde man wohl früher erwarten.

3) Der Text hat „mit dem gleichen".

4) Wenn ein Bruch vor einer ganzen oder gemischten Zahl steht, so bedeutet dieses die Multiplikation beider, also nach unserer Schreibweise: $\left(\frac{2}{3}\cdot 5\frac{5}{6}\right)\left(\frac{6}{7}\cdot 8\frac{4}{9}\right)$

beispiels aber kann die Aufgabe auch so aufgefafst werden: $(3+\frac{1}{2}\cdot 5\frac{1}{3})$ $(4+\frac{3}{4}\cdot 6\frac{4}{5})$; dann wäre das Resultat $= 51\frac{3}{6}\frac{2}{5}\,(= 51\frac{17}{30})$.

[fol. 59ᵃ] 58. Teil: „Über die Multiplikation eines Bruches und einer ganzen Zahl und zweier einfacher Brüche und einer ganzen Zahl und eines Bruches mit einem ähnlichen Ausdruck.“

Beispiel: $\frac{3}{4}\,5\,\frac{1}{2}\,\frac{5}{6}\,3\,\frac{2}{5}\cdot$
$\frac{2}{3}\,4\,\frac{1}{7}\,\frac{3}{8}\,2\,\frac{3}{11}$

Nach dem Wortlaut des Titels könnte diese Aufgabe nur so aufgefafst werden: $(\frac{3}{4}+5+\frac{1}{2}+\frac{5}{6}+3+\frac{2}{5})\;(\frac{2}{3}+4+\frac{1}{7}+\frac{3}{8}+2+\frac{3}{11})$; der Verfasser bemerkt aber, man könne die Aufgabe auf verschiedene Arten auffassen, je nachdem man die beiden Faktoren in 2, 3, 4 oder 5 Summanden zerlege, z. B.

in 2 Summanden:	$(\frac{3}{4}\cdot 5\frac{1}{2})+(\frac{5}{8}\cdot 3\frac{2}{5})$ $(\frac{2}{3}\cdot 4\frac{1}{7})+(\frac{3}{8}\cdot 2\frac{3}{11})$ [1]
in 3 Summanden:	$(\frac{3}{4}\cdot 5)+(\frac{1}{2}+\frac{5}{6})3+(\frac{2}{5})$ $(\frac{2}{3}\cdot 4)+(\frac{1}{7}+\frac{3}{8})2+(\frac{3}{11})$
oder anders:	$(\frac{3}{4}\cdot 5\frac{1}{2})+(\frac{5}{6})+(3\frac{2}{5})$ $(\frac{2}{3}\cdot 4\frac{1}{7})+(\frac{3}{8})+(2\frac{3}{11})$
in 4 Summanden:	$(\frac{3}{4}\cdot 5)+(\frac{1}{2})+(\frac{5}{6})+(3\frac{2}{5})$ $(\frac{2}{3}\cdot 4)+(\frac{1}{7})+(\frac{3}{8})+(2\frac{3}{11})$ etc.

Man sieht aus diesen beiden Beispielen, wie das Fehlen von Additions- und Multiplikationszeichen die Rechnungsaufgaben mehrdeutig machen mufste; um so befremdender ist es, dafs man nicht zur Einführung solcher Zeichen gekommen ist. Das komplizierteste Beispiel solcher Bruchrechnungen enthält der

[fol. 61ᵇ] 59. Teil: nämlich $\frac{5}{6}\frac{1}{2}\,3\,\frac{3}{4}\,\frac{4}{5}\,2\,\frac{3}{8}\,4\,\frac{3}{3}\frac{2}{3}$ zu multiplizieren mit einem ähnlichen Ausdruck. Diese Aufgabe läfst natürlich noch viel mehr Auffassungen zu, auf deren Wiedergabe ich aber verzichte.

[fol. 62ᵃ] Vom 60. Teil an tritt noch eine weitere Bruchform auf, die el-Ḥaṣṣâr „den Bruch mit Weglassung des »und«“ oder „den Bruch genommen von einem Bruch“ nennt.[2]) Er schreibt diese Form ganz gleich wie den Bruch samt Bruchbruch, es bedeutet nun aber z. B. $\frac{3}{7}\frac{3}{5}$ nicht mehr $\frac{3}{7}$ und $\frac{3}{5\cdot 7}$, sondern $\frac{3}{7}$ von $\frac{3}{5}$, d. h. $\frac{3}{7}\cdot\frac{3}{5}=\frac{9}{35}$. El-Qalaṣâdî unterscheidet diese Bruchform von der erstern (Bruch samt Bruchbruch)

1) Ich setze die beiden Faktoren nach arabischer Schreibweise untereinander.

2) Bei Ibn el-Bennâ (l. c. p. 20) heifsen diese Brüche „des fractions subdivisées“, bei el-Qalaṣâdî (l. c. p. 29) „des fractions divisées en partie“; die Weglassung des „und“ ist am letztern Orte ebenfalls erwähnt.

dadurch, dafs er nach WOEPCKE[1]) vertikale Striche zwischen die einzelnen Brüche setzt, also: $\frac{3}{7}\big|\frac{3}{5}$, $\frac{7}{8}\big|\frac{4}{5}\big|\frac{3}{4}$ etc.[2]) Wir nehmen an, es habe auch EL-ḤAṢṢÂR auf irgend eine Weise die beiden Formen unterschieden, diese Unterscheidung aber sei von den Abschreibern nicht berücksichtigt worden. Ich bediene mich im folgenden Beispiel der Schreibweise EL-QALAṢÂDÎS.

[fol. 67ᵃ] 67. Teil: „Über die Multiplikation einer ganzen Zahl und eines Bruches mit Weglassung des »und« und eines einfachen Bruches mit einem ähnlichen Ausdruck."

Beispiel: $2\frac{3}{7}\big|\frac{3}{5}\ \frac{2}{3}\cdot$
$3\frac{3}{4}\big|\frac{5}{6}\ \frac{1}{2}$

d. h. in unserer Schreibweise: $(2\frac{9}{35}+\frac{2}{3})\ (3\frac{15}{24}+\frac{1}{2})\cdot$

Resultat: $12\frac{0\ \ 3\ \ 2\ \ 0\ \ 0}{8\ \ 7\ \ 5\ \ 9\ \ 2}$ [3]) $(=12+\frac{0}{8}+\frac{3}{56}+\frac{2}{280}=12\frac{17}{280})\cdot$

[fol. 69ᵃ] 70. Teil: Dieser enthält die Aufgabe folgendes Produkt zu berechnen: $1\frac{1}{2}\cdot 1\frac{1}{3}\cdot 1\frac{1}{4}\cdot 1\frac{1}{5}\cdot 1\frac{1}{6}\cdot 1\frac{1}{7}\cdot 1\frac{1}{8}\cdot 1\frac{1}{9}\cdot 1\frac{1}{10}\cdot$

Resultat $=5\frac{1}{2}\cdot$

Die beiden letzten Teile (71. und 72.) dieses Kapitels handeln über die Multiplikation von Brüchen mit Ausschliefsung[4]) (*istiṯnâ'*). Wir geben das Beispiel des

[fol. 70ᵃ] 71. Teils: $\frac{3}{4}$ *illâ* $\frac{1}{6}$
$\frac{4}{5}$ *illâ* $\frac{1}{3}\cdot$

d. h. in unserer Schreibweise: $(\frac{3}{4}-\frac{1}{6})\ (\frac{4}{5}-\frac{1}{3})\cdot$

Resultat $=\frac{2\ \ 3\ \ 3}{9\ \ 8\ \ 5}$ $(=\frac{2}{9}+\frac{3}{72}+\frac{3}{360}=\frac{98}{360})\cdot$

EL-ḤAṢṢÂR fafst aber die Aufgabe noch anders auf, nämlich:

$$(\tfrac{3}{4}-\tfrac{1}{6}\text{ von }\tfrac{3}{4})\ (\tfrac{4}{5}-\tfrac{1}{3}\text{ von }\tfrac{4}{5})=(\tfrac{3}{4}-\tfrac{1}{8})\ (\tfrac{4}{5}-\tfrac{4}{15})=\tfrac{1}{3}\cdot$$

[fol. 72ᵃ] Am Schlusse dieses Kapitels sagt der Verfasser: „Was wir nun über die Multiplikation der Brüche gesagt haben, sollte für den, der es aufmerksam studiert, genügen; wir haben weggelassen, was jeder schon wissen mufs (wörtl. „dessen Nichtwissen für Keinen möglich ist"), und haben die Weitläufigkeit vermieden (!), was wir erwähnt haben, findet in dem was nachher kommt, jeweilen sein Analoges, etc."

Drittes[5]) *Kapitel*: „Über die Verwandlung (*ṣarf*) der Brüche."[6])

1) EL-QALAṢÂDÎ, l. c. p. 29.

2) In der Feser Ausgabe des QALAṢÂDÎ (v. J. 1315, 1897/98) sind diese Brüche geschrieben: $\frac{7}{8}\ominus\frac{4}{5}\ominus\frac{3}{4}\cdot$

3) Könnte einfacher $12\frac{0\ 3\ 2}{8\ 7\ 5}$ geschrieben werden.

4) Bei IBN EL-BENNÂ (l. c. p. 20) „des fractions séparées en deux par un moins".

5) Dieses Wort fehlt im Text; überhaupt hört von hier an jede Zählung von Kapiteln auf.

6) Vgl. den *Talchîṣ*, l. c. p. 22 („sur la conversion") und EL-QALAṢÂDÎ, l. c. p. 36 („de la transformation").

Hier handelt es sich darum, einen Bruch in einen andern mit größerem oder kleinerem Nenner zu verwandeln; es wird bemerkt, daß das erstere das bessere (wohl nützlichere) sei, was an seiner Stelle, nämlich bei der Addition und Subtraktion der Brüche, sich zeigen werde. Dieses Kapitel zerfällt in fünf Unterkapitel oder Teile, ich gebe davon die zwei ersten:

[fol. 72ᵇ] 1. Teil: Es sei $\frac{5}{6}$ in Siebentel zu verwandeln, man schreibe dies so: $\frac{\frac{5}{6}}{7}$. Dann multipliziere man das 5 mit dem 7, dies giebt 35, und teile dies durch die beiden Nenner (d. h. zuerst durch 6 und nachher durch 7), dies giebt $\frac{5}{7}\frac{5}{6}$ $\left(= \frac{5}{7} + \frac{5}{42} = \frac{35}{42}\right)$. Es folgt die allgemeine Regel für diesen Fall.

2. Teil: Es sei $\frac{5}{6}\frac{1}{2}$ in Zehntel zu verwandeln, man schreibe dies so: $\frac{\frac{5}{6}\frac{1}{2}}{10}$. Dann bestimme man wie früher den Zähler von $\frac{5}{6}\frac{1}{2}$, er ist 11, multipliziere ihn mit 10, giebt 110, und teile dies (nach einander) durch die Nenner 2, 6 und 10, dies giebt: $\frac{9}{10}\frac{1}{6}\frac{0}{2}$ $\left(= \frac{9}{10} + \frac{1}{60} = \frac{55}{60}\right)$.

[fol. 75ᵃ] *Viertes Kapitel*: „Über die Addition der Brüche." Dasselbe zerfällt in 22 Teile, deren Inhalt aber ein ziemlich bunter ist; neben Additionen von Brüchen treten hier auch algebraische Aufgaben auf, die auf Gleichungen ersten und zweiten Grades führen, ebenso Summationen von Reihen, die man wohl eher im Kapitel über die ganzen Zahlen erwartet hätte. Aus der Addition von Brüchen gebe ich folgende zwei Beispiele:

[fol. 76ᵃ] 3. Teil: „Addition eines Bruches samt Bruchbruch zu zwei einfachen Brüchen."

Beispiel: $\frac{5}{6}\frac{1}{2}$
$\frac{7}{8}\ \frac{8}{9}$.

Resultat: $2\frac{6}{9}\frac{1}{8}$ $\left(= 2 + \frac{6}{9} + \frac{1}{72} = 2\frac{49}{72}\right)$.

[fol. 78ᵃ] 8. Teil: „Addition eines Bruches von einer ganzen Zahl zu einem ähnlichen Ausdruck."

Beispiel: $\frac{2}{3}\,7$
$\frac{7}{8}\,9$,

d. h. in unserer Schreibweise: $\frac{2}{3} \cdot 7 + \frac{7}{8} \cdot 9$.

Gang der Ansrechnung: $\frac{2 \cdot 7 \cdot 8 + 7 \cdot 9 \cdot 3}{3 \cdot 8} = 12\frac{4}{8}\frac{1}{3}$ $\left(= 12 + \frac{4}{8} + \frac{1}{24} = 12\frac{13}{24}\right)$.

[fol. 79ᵇ] „Anderer Teil (Kap.) aus der Addition der Brüche: über die Addition der Vermögen. Wenn zu dir gesagt wird, es giebt ein gewisses Vermögen (*mâl*), addiere seinen dritten Teil zu seinem vierten, so erhältst du 21 Dirhem. Die Auflösung ist folgende: 3 und 4 sind in 12 enthalten, du nimmst nun $\frac{1}{3}$ von 12 und $\frac{1}{4}$ von 12 und addierst dies, so hast du 7; nun ist das Verhältnis von diesem 7 zu 12 dasselbe wie

das Verhältnis von 21 zu dem gesuchten Vermögen; multipliziere also 12 mit 21 und dividiere das Produkt durch 7, so hast du 36 und dies ist das Vermögen. — Wenn du willst, kannst du die Aufgabe auch mit (Hilfe) der Algebra lösen: Setze das Vermögen gleich einer unbekannten Zahl (*šai'* = Ding), dann nimmst du einen Drittel und einen Viertel davon, dies ist drei Sechstel und die Hälfte eines Sechstels[1]) der unbekannten Zahl, und dies ist gleich 21; nun frägst du, mit wieviel mufs ich drei Sechstel und die Hälfte eines Sechstels der unbekannten Zahl wiederherstellen[2]), damit die unbekannte Zahl selbst herauskommt? Du findest, dafs du mit $1\frac{5}{7}$ multiplizieren mufst, wie wir dies im Kapitel über die Wiederherstellung der Brüche beweisen werden; multipliziere also auch 21 mit $1\frac{5}{7}$, dies giebt 36, und dies ist das (gesuchte) Vermögen. — Wenn du willst, kannst du die Aufgabe auch mit Hilfe der Wagschalen (*el-kiffāt*) lösen. Dies Verfahren besteht darin, dafs du für eine der Wagschalen irgend eine beliebige Zahl wählst, also z. B. die Zahl 3; nimm nun ihren Drittel und ihren Viertel, dies macht zusammen $1\frac{3}{4}$, vergleichst du dieses mit 21, so findest du, dafs in der Wagschale der Drei $19\frac{1}{4}$ fehlen; behalte nun diesen Fehler im Gedächtnis, und wähle nun für die zweite Wagschale irgend eine Zahl, z. B. 4, nimm ihren Drittel und ihren Viertel, dies macht zusammen $2\frac{1}{3}$; vergleichst du dieses mit 21, so findest du, dafs in der Wagschale der Vier $18\frac{2}{3}$ fehlen; nun multipliziere den Fehler der ersten Wagschale, also $19\frac{1}{4}$, mit der Zahl der zweiten Wagschale, also mit 4, dies giebt 77, dann multipliziere den Fehler der zweiten Wagschale, also $18\frac{2}{3}$, mit der Zahl der ersten Wagschale, also mit 3, dies giebt 56, subtrahiere dieses Ergebnis vom ersten, der Rest ist 21, subtrahiere auch den kleinern Fehler vom gröfsern, der Rest ist drei Sechstel und die Hälfte eines Sechstels, dann teile 21 durch dieses, das Resultat ist 36, und dies ist das Vermögen. Ich werde diese Lösung beweisen an ihrem Orte, so Gott will."

Wir sehen in der Behandlung dieser Aufgabe[3]) die drei Hauptlösungsarten derselben vereinigt, wie sie teilweise schon die Ägypter und Indier kannten: die Methode des falschen Ansatzes oder das Verfahren mit der angenommenen Zahl, die Methode der Algebra und die Regel der beiden Fehler oder die Methode der Wagschalen. Die

1) Also $= \frac{3}{6}\frac{1}{2} = \frac{7}{12}$, was aber nicht im Text steht, alle Zahlen sind mit Worten ausgeschrieben.

2) *Ǵabara*, d. i. das Verbum, dessen nom. act. *el-ǵabr* oder *el-ǵebr* (= Algebra = Wiederherstellung) ist; vgl. unten p. 36 den Teil „über die Wiederherstellung".

3) Dieselbe Aufgabe findet sich auch bei EL-QALAṢĀDI (l. c. p. 50), aber er nimmt für die beiden Wagschalen nicht 3 und 4, sondern 12 und 24, und vermeidet damit Brüche.

erstere Methode ist im *Talchîṣ* sowohl als bei EL-QALAṢÂDÎ das „Proportionsverfahren" genannt, bei EL-HAṢṢÂR trägt sie keinen besondern Namen.

Es folgen nun eine Reihe anderer Aufgaben, die auf Gleichungen ersten Grades führen, die komplizierteste ist folgende:

[fol. 83ᵃ] „Es ist ein Vermögen gegeben; du addierst seinen dritten und fünften Teil, und nimmst hiervon einen Viertel und dazu die Hälfte des Restes (der übrig bleibt, wenn du das vorhergehende vom Vermögen abgezogen hast)[1]), so erhältst du 11."

Die algebraische Lösung führt auf die Gleichung:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{5}x\right)+\frac{x-\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{5}x\right)}{2}=11; \quad x=30.$$

[fol. 84ᵃ] Nun folgt auch eine unbestimmte Aufgabe: „Es sind zwei verschiedene Zahlen gegeben; du addierst den dritten Teil der einen zum vierten Teil der andern, dies giebt 6. Diese Aufgabe läfst viele Antworten zu, eine davon ist: Nimm von dem 6 was du willst, und setze es gleich dem Drittel der einen Zahl, dann ist das was von 6 übrigbleibt gleich einem Viertel der andern Zahl, oder du setzest das zuerst von 6 genommene gleich einem Viertel der einen Zahl, dann ist der Rest gleich dem Drittel der andern; z. B. nimm 2 von 6 und setze es gleich einem Drittel der einen Zahl, dann ist der Rest 4 gleich einem Viertel der zweiten Zahl, also ist die erste Zahl 6 und die zweite 16; es kann aber auch die erste Zahl 9 und die zweite 12, oder die erste 3 und die zweite 20 sein etc."

Es folgen nun Summationen von Reihen.

[fol. 84ᵇ] Ein anderer Teil (Kap.) der Addition: „Über die Addition der Zahlen.[2]) Wenn gesagt wird: addiere von 1 bis 10 nach der (natürlichen) Reihenfolge der Zahlen, so addiere 1 zu 10, dies ist 11, und multipliziere dieses mit der Hälfte von 10, d. i. 5, so erhältst du 55, und dies ist die gesuchte Summe." Es folgt die allgemeine Regel für diesen Fall.

„Ein anderer Teil (Kap.): Addiere von 1 bis zu einer unbekannten Zahl nach der Reihenfolge der Zahlen, die Summe ergiebt 55, welches ist die unbekannte Zahl? [fol. 85ᵃ] Auflösung: Multipliziere 55 mit 2, dies giebt 110, behalte dies im Sinn; hierauf nimm die Hälfte des 1, mit dem du angefangen hast, und multipliziere es mit sich selbst, dies giebt $\frac{1}{4}$, addiere dies zu den im Sinn behaltenen 110, dies giebt $110\frac{1}{4}$, ziehe hieraus

1) Das Eingeklammerte fehlt im Text.

2) Hier fehlt: „nach ihrer natürlichen Reihenfolge".

die Quadratwurzel, wie wir im Kapitel über die Wurzelausziehung zeigen werden, so Gott will, dies giebt $10\frac{1}{2}$, von diesem subtrahiere das $\frac{1}{2}$, das du mit sich selbst multipliziert hast, so hast du 10, und dies ist die gesuchte Zahl. — Willst du diese Aufgabe auf dem Wege der Algebra lösen, so setze die unbekannte Zahl $= x$ (*šai'*), addiere zu ihr 1, giebt $x + 1$, multipliziere dies mit der Hälfte der unbekannten Zahl, dies giebt $\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}$ [1], dies mufs gleich 55 sein; nun stellst du das vollständige Quadrat[2]) her, indem du es mit 2 multiplizierst, und ebenso das ihm gleichgesetzte, d. i. das 55, mit 2 multiplizierst, dies giebt $x^2 + x = 110$; so ist die Aufgabe auf den vierten Fall[3]) der Algebra gebracht worden, mit dem du verfährst, wie wir es an seiner Stelle zeigen werden, so Gott will."[4])

[fol. 85b] Nun folgen Summationen von Reihen der geraden und ungeraden Zahlen, alle ohne Angabe der allgemeinen Regel, dann die Aufgabe: Man summiere von 1 bis zu einer unbekannten Zahl nach der Reihenfolge der ungeraden Zahlen und erhalte 36, welches ist die unbekannte Zahl? — Erste Lösung: Ziehe die Wurzel aus 36, diese ist 6, verdoppele dieses, giebt 12, davon 1 abgezogen, giebt 11, dies ist die unbekannte Zahl. — Zweite (algebraische) Lösung: Setze die unbekannte Zahl $= x$, addiere dazu 1, nimm die Hälfte von der Summe, giebt $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, quadriere dies, giebt $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$, dies ist gleich 36; hieraus erhält man die Gleichung $x^2 + 2x = 143$, die nach dem vierten Fall gelöst $x = 11$ ergiebt. — Hierzu bemerkt er noch, man könne auch so verfahren: man multipliziere das 36 mit 4, dies giebt 144, ziehe daraus die Wurzel, diese ist 12, und subtrahiere davon 1, dies giebt 11. — Am Schlusse sagt er, wenn man algebraisch gerechnet habe und die Wurzel nicht rational werde, dann liege in der Aufgabe ein Fehler vor.

Es folgen die Summationen der Quadrat- und Kubikzahlen; da nirgends allgemeine Regeln ausgesprochen sind, so gebe ich nur kurz in moderner Schreibweise die Aufgabe, den Gang der Lösung und das Resultat an, falls dies letztere im Text steht.

---

1) Es ist wohl unnütz zu bemerken, dafs nirgends im Text Gleichungen mit algebraischen Zeichen vorkommen, alles ist in Worten ausgeschrieben, obiger Ausdruck lautet also: *nișf māl we nișf šai'* (= Hälfte eines Quadrates und Hälfte eines Dinges).

2) Fehlt: „und das vollständige Ding".

3) Vgl. Muh. b. Mûsâ, edid. Fr. Rosen, p. 38.

4) Dies zeigt er aber nirgends in diesem Buche; er hat vielleicht später noch ein Kapitel über Algebra hinzugefügt, das im Laufe der Zeit verloren gegangen ist; dies letztere ist deshalb nicht unwahrscheinlich, weil der *Talchîș* und sein Kommentar am Ende ein besonderes Kapitel über Algebra enthalten.

[fol. 86ᵇ] $(1^2+\cdots+10^2) = (1+\cdots+10)\left(\frac{2}{3}\cdot 10+\frac{1}{3}\right)$ [1] $= 55\cdot 7 = 385.$

$(5^2+\cdots+12^2) = (1^2+\cdots+12^2) - (1^2+\cdots+4^2).$

[fol. 87ᵃ] $(2^2+\cdots+10^2) = (2+\cdots+10)\left(\frac{2}{3}\cdot 10+\frac{2}{3}\right)$ [2] $= 30\cdot 7\frac{1}{3} = 220.$
(nur die gerad. Z.) (gerade Z.)

$(1^2+\cdots+9^2) = (9+2)\left(\frac{9+1}{2}\right)\left(\frac{9}{3}\right)$ [3] $=165.$
(nur die ungerad. Z.)

[fol. 87ᵇ] $(1^3+\cdots+10^3) = [(1+\cdots+10)]^2 = 55^2 = 3025.$ [4]

$(4^3+\cdots+10^3) = (1^3+\cdots+10^3) - (1^3+2^3+3^3).$

[fol. 88ᵃ] $(1^3+\cdots+9^3) = (1+\cdots+9)\,[2\,(1+\cdots+9)-1]$ [5] $=$
(nur die unger. Z.) (unger. Z.) (unger. Z.)

$$= 25\,(2\cdot 25-1) = 1225.$$

$(7^3+\cdots+11^3) = (1^3+\cdots+11^3) - (1^3+\cdots+5^3).$
(nur die nngerad. Z.) (unger. Z.) (unger. Z.)

[fol. 88ᵇ] $(1^3+\cdots+x^3) = 1225$; wie grofs ist x?

Algebraische Lösung: $\left(\frac{x+1}{2}\right)^2\left\{2\left(\frac{x+1}{2}\right)^2-1\right\} = 1225.$

Diese Gleichung wird nicht gelöst, es heifst nur, es ergebe sich hieraus $x=9$: allein vorher steht folgende Lösung (in Worten): $\sqrt{\frac{1225}{2}+\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 24\frac{3}{4}$; dann $\sqrt{\left(24\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)4} - 1 = 9$; dieselbe entspricht der Auflösung der obigen Gleichung, wenn dieselbe als quadratische in Bezug auf $\left(\frac{x+1}{2}\right)^2$ als Unbekannte betrachtet wird. Dann wird weiter bemerkt: „Wenn du willst, kannst du auch die mit ihrem Doppelten multiplizierte Zahl $\left(\text{d. h } \left(\frac{x+1}{2}\right)^2\right)$ als Unbekannte annehmen ($=z$), multipliziere sie dann mit ihrem Doppelten weniger 1, dies giebt $2z^2-z$, und dies setzest du gleich 1225, hieraus ergiebt sich $z=25$; nun ist dies, wie wenn du sagst: summiere von 1 bis

---

1) Allgemein: $\frac{n\,(n+1)}{2}\left(\frac{2n}{3}+\frac{1}{3}\right) = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$. Vgl. el-Karchî bei Cantor, *Vorl.* I, 724 (2. Anfl.).

2) Allgemein: $\frac{2n\,(n+1)\,(2n+1)}{3}$, wo $2n$ die letzte gerade Zahl der Reihe ist.

3) Allgemein: $\frac{(2n+1)\,(2n+2)\,(2n+3)}{6}$, wo $2n+1$ die letzte ungerade Zahl der Reihe ist.

4) Allgemein: $\frac{n^2\,(n+1)^2}{4} = \left[\frac{n\,(n+1)}{2}\right]^2$.

5) Allgemein: $(n+1)^2\{2\,(n+1)^2-1\}$, wenn $2n+1$ die letzte ungerade Zahl der Reihe ist.

zu einer unbekannten Zahl nach der Reihe der ungeraden Zahlen, die Summe sei 25, so findest du hieraus wie früher die unbekannte Zahl = 9."

[fol. 89a] $\underset{\text{(nur gerade Z.)}}{(2^3 + \cdots + 10^3)} = \underset{\text{(gerade Z.)}}{(2 + \cdots + 10)} \cdot 2 \cdot \underset{\text{(gerade Z.)}}{(2 + \cdots + 10)}$ [1]) $= 30 \cdot 60 = 1800.$

$$(2^3 + \cdots + x^3) = 1800; \text{ wie grofs ist } x?$$

Auflösung: $\sqrt{\frac{1800}{2}} = 30$; „nun ist dies, wie wenn du sagst: summiere von 2 bis zu einer unbekannten Zahl nach der Reihe der geraden Zahlen, die Summe sei 30, so findest du hieraus die unbekannte Zahl wie früher = 10."

[fol. 89b] Es folgt die Aufgabe über die Verdoppelung der Häuser (Felder) des Schachbrettes. Die Summation wird ausgeführt wie bei Ibn el-Bennâ (l. c. p. 4) [2]) und die Summe richtig angegeben.

[fol. 90a] *Fünftes Kapitel*: Über die Subtraktion der Brüche. [3]) Diese wird ziemlich rasch abgethan, indem im Anfang gesagt wird: „Wisse, dafs alle Fälle, die im Kapitel der Addition vorgekommen sind, sich bei der Subtraktion wiederholen."

Von den 12 Beispielen, die bis zu den Aufgaben, die auf Gleichungen führen, behandelt werden, gebe ich nur zwei wieder, bei den meisten sind die Resultate gar nicht angegeben.

1) Es sei $\frac{1}{4}$ von $\frac{5}{6}$ zu subtrahieren, man schreibe dies so:

$$\left.\begin{matrix}\frac{1}{4}\\ \frac{5}{6}\end{matrix}\right\}^{4)} = \frac{5}{6} - \frac{1}{4} = \frac{5 \cdot 4 - 1 \cdot 6}{4 \cdot 6} = \frac{3}{6}\frac{1}{2} \left(= \frac{7}{12}\right).$$

[fol. 90b] 2) Es sei $\frac{4}{5}$ und die Hälfte von $\frac{1}{5}$ von $\frac{10}{11}$ zu subtrahieren, man schreibe dies so:

$$\left.\begin{matrix}\frac{4}{5}\frac{1}{2}\\ \frac{10}{11}\end{matrix}\right\} = \frac{10}{11} - \frac{4}{5}\frac{1}{2} = \frac{10 \cdot 10 - (2 \cdot 4 + 1)\, 11}{10 \cdot 11} = \frac{1}{11 \cdot 10} \left(= \frac{1}{110}\right).$$

[fol. 93b] Anderer Teil (Kap.): „Über die Subtraktion der Vermögen." Hier folgen ähnliche Aufgaben wie in dem Teil „über die Addition der Vermögen"; ich gebe die folgenden wieder:

„Es sei ein Vermögen gegeben, du subtrahierst (von ihm) seinen dritten und seinen vierten Teil, es bleibt 10 übrig, wie grofs ist das Vermögen?"

---

1) Allgemein: $2\,[n\,(n+1)]^2$, wenn $2n$ die letzte gerade Zahl der Reihe ist.

2) Durch wiederholte Anwendung der Formel:

$$1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

3) Im Text steht nur „Kapitel der Subtraktion".

4) Eigentümlicherweise wird der Subtrahend über den Minuend gestellt.

Es folgen nun wieder die drei verschiedenen Auflösungsarten wie bei der analogen Aufgabe im Kapitel der Addition (p. 29—30). Nach der Auflösung mit Hilfe der Wagschalen folgt die allgemeine Darstellung (kein Beweis!) dieser Regel mit Unterscheidung der beiden Fälle, da die beiden Fehler gleiches oder ungleiches Zeichen haben.

[fol. 96ᵃ] „Aufgabe (Kap.) von den Schilfrohren (*qaṣab*). Von einem Schilfrohr steht im Boden (wörtl. „Schlamm“) ein Drittel seiner Länge, im Wasser ein Viertel, und über dem Wasser 10 Spannen (*aŝbâr*), wie lang ist es?“

Algebraische Lösung: $x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x = 10$ $(x = 24)$.

Es folgt noch eine Aufgabe über das Schilfrohr, die auf die Gleichung führt:

$$x - (\tfrac{1}{3}x + 2) - (\tfrac{1}{4}x + 3) = 10 \qquad (x = 36).$$

Dann kommt die Aufgabe: „Bei einem Fisch nimmt der Kopf einen Drittel seines Gewichtes, der Schwanz einen Viertel [fol. 96ᵇ] desselben in Anspruch, das Mittelstück wiegt 10 Pfund (*arṭâl*, pl. v. *riṭl* oder *roṭl*), wie schwer ist der Fisch?“

Sechstes Kapitel: „Über die Division der Brüche.[1]) Dieses Kapitel zerfällt in zwei Hauptteile, in die Benennung, d. h. Division von Kleinerem durch Gröſseres, und die eigentliche Division, d. h. Division von Gröſserem durch Kleineres. Der Teil über die Benennung zerfällt in 23 Unterkapitel mit den verschiedensten Kombinationen von Ganzen, Brüchen, Brüchen von Brüchen, etc., ich gebe hier folgende zwei Beispiele:

Es soll $\frac{1}{3}$ durch 4 geteilt werden, dies wird geschrieben:

$$\left.\begin{matrix}\frac{1}{3}\\ 4\end{matrix}\right\} = \frac{1\ }{6\ 2}{}^{2)} = \frac{1}{12}.$$

Nach diesem Beispiel folgt [fol. 97ᵃ] die allgemeine Regel, wie ein Bruch durch eine ganze Zahl geteilt wird.

[fol. 98ᵇ] Es soll $\frac{3}{5} + \frac{7}{8}$ durch 6 geteilt werden, dies wird geschrieben:

$$\left.\begin{matrix}\frac{3}{5}\ \frac{7}{8}\\ 6\end{matrix}\right\} = \frac{3\cdot 8 + 7\cdot 5}{5\cdot 6\cdot 8} = \frac{2\ \ 3\ \ 2}{10\ \ 8\ \ 3} \left(= \frac{59}{240}\right).$$

Der Teil über die eigentliche Division zerfällt in 25 Unterkapitel, ebenfalls mit den verschiedensten Kombinationen, ich gebe daraus die folgenden Beispiele:

---

1) Im Text steht nur „Kapitel der Division“.

2) Man beachte, daſs $\frac{1}{12}$ in diesem Falle nicht etwa geschrieben ist $\frac{1\ }{4\ 3}$, sondern wie immer $\frac{1\ }{6\ 2}$ (= die Hälfte eines Sechstels).

[fol. 107b] Es soll 10 durch $\frac{1}{5}$ geteilt werden, dies wird geschrieben:

$$\left.\begin{matrix}10\\ \frac{1}{5}\end{matrix}\right\}=10\cdot 5=50.$$

Es folgt nun die allgemeine Regel für die Division einer ganzen Zahl durch einen Bruch, und es werden zwei Fälle unterschieden, je nachdem der Bruch den Zähler 1 oder einen andern Zähler hat. Erstes Beispiel für den letzteren Fall:

$$\left.\begin{matrix}9\\ \frac{3}{8}\end{matrix}\right\}=\frac{9\cdot 8}{3}=24.$$

[fol. 108b] Es soll 10 durch einen Drittel eines Fünftels geteilt werden, dies wird geschrieben:

$$\left.\begin{matrix}10\\ \frac{1}{5\ 3}\end{matrix}\right\}=10\cdot 5\cdot 3=150.$$

[fol. 117a] Es soll $\frac{3}{4}$ von 5 durch $\frac{2}{5}$ von 3 geteilt werden, dies wird geschrieben:

$$\left.\begin{matrix}\frac{3}{4}\,5\\ \frac{2}{5}\,3\end{matrix}\right\}=(3\cdot 5\cdot 5):(2\cdot 3\cdot 4)=3\tfrac{1}{8}\cdot$$

[fol. 118b] „Anderer Teil (Kap.) der Division: Über die Wiederherstellung (*el-ǵebr*)[1]) der Brüche. Dieses Kapitel ist von grofsem Nutzen in den gesamten Rechnungsoperationen und vor allem in der Algebra. Wenn z. B. gesagt wird, mit was mufst du $\frac{1}{3}$ wiederherstellen, damit du 1 erhältst, so ist dies dasselbe, wie wenn gesagt wird, mit welcher Zahl mufst du $\frac{1}{3}$ multiplizieren, um 1 zu erhalten. Das Verfahren ist das, dafs du 1 durch $\frac{1}{3}$ teilst, dies giebt 3, und dies ist die Zahl, mit welcher $\frac{1}{3}$ multipliziert 1 ergiebt."

[fol. 119a] Zweites Beispiel dieser Art: „Mit wieviel mufst du $\frac{3}{4}$ wiederherstellen, damit du 1 erhältst? Teile 1 durch $\frac{3}{4}$, dies giebt $1\frac{1}{3}$, und dies ist das Gesuchte."

Es folgen weitere Beispiele, auch solche, wo nicht die Einheit erhalten werden soll, z. B.: „Mit wieviel mufst du $2\frac{1}{2}$ wiederherstellen, um 6 zu erhalten? Teile 6 durch $2\frac{1}{2}$, dies giebt $2\frac{2}{5}$, dies ist das Gesuchte."

[fol. 120a] „Teil (Kap.) des Erniedrigens[2]) (*el-ḥaṭ*) der Brüche. Wisse, dafs das Erniedrigen das Gegenteil des Wiederherstellens ist; wenn z. B. gesagt wird, mit welcher Zahl mufst du 1 erniedrigen, damit du $\frac{1}{2}$ erhältst, so teile (benenne) $\frac{1}{2}$ durch 1, dies giebt $\frac{1}{2}$ und dies ist das Gesuchte."

---

1) Vgl. den *Talchiṣ*, l. c. p. 22 („sur la réintégration"), und EL-QALAṢÂDÎ, l. c. p. 35 („de la restauration"), und oben p. 30.

2) Vgl. ibid. („sur l'abaissement des fractions").

Anderes Beispiel: „Mit wieviel mufst du $2\frac{1}{2}$ erniedrigen, um 1 zu erhalten? Teile (benenne) 1 durch $2\frac{1}{2}$, dies giebt $\frac{2}{5}$ und dies ist das Gesuchte.“ Es folgen noch weitere Beispiele.

[fol. 120ᵇ] *Siebentes Kapitel*: „Über die Ausziehung der Wurzeln aus ganzen Zahlen und Brüchen. Die Beschreibung des Verfahrens, wie man aus ganzen Quadratzahlen die Wurzel zieht, ist schon vorausgegangen; in diesem Kapitel wollen wir jetzt die Wurzelausziehung aus Brüchen, die Quadratzahlen sind, und aus ganzen Zahlen und Brüchen, die keine Quadratzahlen sind, erklären.“

[fol. 121ᵃ] Erstes Beispiel[1]):

$$\sqrt{\tfrac{1}{4}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \tfrac{1}{2};$$

dann folgen:

$$\sqrt{\tfrac{1}{9}} = \tfrac{1}{3} \text{ und } \sqrt{\tfrac{4}{9}} = \tfrac{2}{3};$$

hierauf:

$$\sqrt{\tfrac{4\ 1}{8\ 2}} = \frac{\sqrt{2\cdot 4+1}}{\sqrt{8\cdot 2}} = \tfrac{3}{4};$$

[fol. 122ᵃ] weiter:

$$\sqrt{\tfrac{7\ 4\ 1}{9\ 8\ 2}} = \frac{\sqrt{(8\cdot 7+4)\,2+1}}{\sqrt{9\cdot 8\cdot 2}} = \tfrac{11}{12} = \tfrac{5\ 1}{6\ 2};$$

[fol. 124ᵇ]

$$\sqrt{2\tfrac{1}{4}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \tfrac{3}{2} = 1\tfrac{1}{2};$$

[fol. 125ᵃ]

$$\sqrt{4\tfrac{4\ 1}{8\ 8}} = \frac{\sqrt{(4\cdot 8+4)\,8+1}}{\sqrt{8\cdot 8}} = \tfrac{17}{8} = 2\tfrac{1}{8};\ \text{etc.}$$

[fol. 125ᵇ] „Teil (Kap.) der Ausziehung der irrationalen (*el-ṣumm*) Wurzeln durch Annäherung. Wenn gesagt wird: welches ist die Quadratwurzel aus 5, so nimm die nächste Quadratzahl an 5, diese ist gleich 4, subtrahiere sie von 5, der Rest ist 1, benenne dieses nach 4, dies giebt $\frac{1}{4}$, und addiere dieses zu der Wurzel aus 4, die gleich 2 ist, dies giebt $2\frac{1}{4}$, und dies ist die angenäherte Wurzel aus 5; multiplizierst du nämlich $2\frac{1}{4}$ mit sich selbst, so erhältst du $5\frac{1}{16}$, der Fehler ist $\frac{1}{16}$ Überschufs.“ [2])

[fol. 126ᵃ] „Willst du aber eine gröfsere Annäherung haben, so verdoppele $2\frac{1}{4}$, dies giebt $4\frac{1}{2}$, benenne nach diesem $\frac{1}{16}$ (d. h. teile $\frac{1}{16}$ durch

1) Ich mache darauf aufmerksam, dafs sich nirgends bei el-Ḥaṣṣâr ein Zeichen für die Wurzelausziehung findet.

2) Es ist dies die bekannte Annäherung $\sqrt{a^2+r} = a + \frac{r}{2a}$; der Fall, wo $r > a$, und $\sqrt{a^2+r} = a + \frac{r}{2a+1}$ oder $= a + \frac{r+1}{2a+2}$ gesetzt wird, wie im *Talchiṣ*, bez. bei el-Qalaṣâdi, findet sich bei el-Ḥaṣṣâr nicht in dieser Weise behandelt, sondern er nimmt in diesem Falle die nächst höhere Quadratzahl (vgl. unten die Ausziehung der Wurzeln aus 15 und 20) und subtrahiert von deren Wurzel den Quotien-

$4\frac{1}{2}$, dies giebt $\frac{1}{72}$ (ein Achtel eines Neuntels), subtrahiere dieses von $2\frac{1}{4}$, so bleibt $2\frac{2}{9}\frac{1}{8}$ $(= 2\frac{17}{72})$; multiplizierst du dieses mit sich selbst, so erhältst du $5\frac{1}{8\;8\;9\;9}$ $(= 5\frac{1}{5184})$ und dies ist näher (an 5) als $5\frac{1}{16}$.[1]) — Wenn du noch eine gröfsere Annäherung willst, so verdoppele $2\frac{17}{72}$, „benenne nach dem Resultat $(\frac{1}{72})^2$ und was du so erhältst, subtrahiere von $2\frac{17}{72}$, so ist das Ergebnis noch angenäherter als die erste und zweite Wurzel; so kannst du fortfahren, soweit du willst.“

„Um die Wurzel aus 10 zu erhalten, nimmst du die nächste Quadratzahl an 10, also 9, subtrahierst diese von 10, bleibt 1, benennst dieses nach der doppelten Wurzel aus 9, also nach 6, dies giebt $\frac{1}{6}$, dies addierst du zu der Wurzel aus 9, so erhältst du $3\frac{1}{6}$; dieses mit sich selbst multipliziert giebt $10\frac{1}{36}$.“

Nun folgt ein anderes Annäherungsverfahren als das vorhergehende:

[fol. 126b] „Willst du eine gröfsere Annäherung haben, so multipliziere 10 mit irgend einer Quadratzahl, z. B. mit 100, dies giebt 1000, ziehe hieraus die Wurzel nach dem eben beschriebenen Verfahren, sie ist $31\frac{19}{31}\frac{1}{2}$ $(= 31\frac{39}{62})$, und teile dieses durch die Wurzel aus 100, also durch 10, so erhältst du $3\frac{5}{31}\frac{0}{10}\frac{1}{2}$ $(3\frac{101}{620})$, und dies ist näher als $3\frac{1}{6}$.“

„Um die Wurzel aus 15 zu erhalten, nimmst du die nächste Quadratzahl an 15, also 16, subtrahierst davon 15, bleibt 1, benennst dieses nach der doppelten Wurzel aus 16, d. h. nach 8, und subtrahierst das Ergebnis $(\frac{1}{8})$ von der Wurzel aus 16, dies giebt $3\frac{7}{8}$, und dies ist die angenäherte Wurzel aus 15.“

Es folgt Wurzel aus 20, zu der er bemerkt, man könne als nächste Quadratzahl entweder 16 oder 25 nehmen, in beiden Fälle erhalte man dasselbe, nämlich $4\frac{1}{2}$.

[fol. 127a] Für die Ausziehung der Wurzel aus $2\frac{1}{2}$ giebt er zwei Wege an; der eine besteht darin, dafs man es in einen Bruch verwandelt, dessen Nenner eine Quadratzahl ist, also z. B. in $\frac{10}{4}$, dann die Wurzel aus 10 zieht und das Resultat $(3\frac{1}{6})$ durch die Wurzel aus 4, also 2, teilt, dies giebt $1\frac{3}{6}\frac{1}{2}$ $(= 1\frac{7}{12})$; der andere ist derselbe, wie der oben bei der Wurzel-

---

ten aus dem Rest $((a+1)^2 - (a^2 + r))$ durch das Doppelte der Wurzel, was auf dasselbe herauskommt wie das Verfahren EL-QALASÂDÎS, denn es ist in der That:

$$(a+1) - \frac{2a+1-r}{2(a+1)} = a + \frac{r+1}{2a+2}.$$

1) Es ist dies die zweite Annäherung bei EL-QALASÂDÎ (l. c. p. 41):

$$\sqrt{a^2+r} = a + \frac{r}{2a} - \frac{\left(\frac{r}{2a}\right)^2}{2\left(a + \frac{r}{2a}\right)}$$

(vgl. auch CANTOR, *Vorl.* I, 765 (2. Aufl.)).

ausziehung aus 10 angewandte, d. h. es wird $2\frac{1}{2}$ mit irgend einer geraden Quadratzahl, also z. B. mit 36, multipliziert, dies giebt 90, hieraus die Wurzel angenähert gezogen, giebt $9\frac{1}{2}$, und dieses durch die Wurzel aus 36, also 6, dividiert, giebt $1\frac{7}{12}$.

[fol. 127b] Um die Wurzel aus $\frac{1}{3}$ zu erhalten, multipliziert er $\frac{1}{3}$ mit 36, giebt 12, nimmt die angenäherte Wurzel hieraus, welche $3\frac{1}{2}$ ist, und teilt dieses durch die Wurzel aus 36, also 6, giebt $\frac{7}{12}$.

Er erwähnt aber auch, dafs man nach dem gewöhnlichen Verfahren dasselbe erhalte, d. h. man nehme den nächsten Bruch an $\frac{1}{3}$, welcher ein Quadrat ist, also $\frac{1}{4}$, subtrahiere diesen von $\frac{1}{3}$ und benenne den Rest $\frac{1}{12}$ nach dem Doppelten der Wurzel aus $\frac{1}{4}$, also nach 1, und addiere das Ergebnis zu $\frac{1}{2}$, giebt $\frac{7}{12}$.

Als letztes Beispiel folgt die Wurzel aus $\frac{3}{7}$; man multipliziere $\frac{3}{7}$ mit einer durch 7 teilbaren Quadratzahl, also z. B. 49, giebt 21, ziehe hieraus die Wurzel, giebt $4\frac{3}{5}$, teile dies durch die Wurzel aus 49, also durch 7, giebt $\frac{23}{35}$.

Hierauf folgt der oben (p. 13) schon angeführte Schlufs.

Es unterliegt wohl keinem Zweifel, dafs dieses Werk dasjenige sei, das Moses ben Tibbon ins Hebräische übersetzt hat (immerhin wäre noch eine Kollation mit dem Ms. des Vaticans zu wünschen, die mir leider unmöglich war); ebenso können wir die Angabe Ibn Chaldûns, dafs dieses Buch die Grundlage für den *Talchîṣ* des Ibn el-Bennâ gebildet habe, als richtig annehmen, man wird beim Studium beider Schriften Vergleichungspunkte in hinreichender Zahl finden, auf die wesentlichsten habe ich jeweilen den Leser aufmerksam gemacht; der Stoff, die Darstellungsweise und die Verfahrungsarten bei den verschiedenen Operationen sind also im Grofsen und Ganzen dieselben, nur die Anordnung des Stoffes ist eine andere, und diese Änderung war sehr geboten, denn das Buch el-Ḥaṣṣârs zeichnet sich, wie ich oben schon angedeutet habe und wie auch jeder Leser es finden wird, durch grofse Inkonsequenz in der Anordnung aus. Es ist übrigens möglich und keineswegs unwahrscheinlich, dafs el-Ḥaṣṣâr selbst eine Umarbeitung und Verkürzung seines Werkes vorgenommen hat, und dafs dieser Auszug aus seiner gröfsern Arbeit vielleicht „das kleine Buch des Ḥaṣṣâr“ (*kitâb el- ḥaṣṣâr el- ṣaġîr*, wie es bei Ibn Chaldûn heifst) genannt worden ist; aus diesem Auszug (oder dieser Umarbeitung) hätte dann Ibn el-Bennâ einen weitern, seinen *Talchîṣ* gemacht; hierbei ist er aber zu kurz und zu gelehrt verfahren (bekanntlich giebt er keine Zahlenbeispiele, sondern nur Regeln), so dafs für praktische Zwecke ein Kommentar zu diesem *Talchîṣ* notwendig wurde; diesen hat

dann el-Qalaṣâdî verfaſst, und hat sich darin, einige Vorteile und Neuerungen bei den Operationen und Änderungen in der Anordnung abgerechnet, wieder in deutlich erkennbarer Weise dem Originale genähert.

Wir haben gesagt, daſs der Stoff, den el-Ḥaṣṣârs Werk, der *Talchîṣ* und sein Kommentar behandeln, im Groſsen und Ganzen derselbe sei; es ist dies richtig bis auf die letzten arithmetischen Kapitel des *Talchîṣ*, nämlich diejenigen über die vier Operationen mit Wurzeln, und den Abschnitt über die Algebra, die bei el-Ḥaṣṣâr fehlen. Was die Algebra anbetrifft, so vergleiche man, was ich darüber oben p. 32 Note 4) gesagt habe; auch der Abschnitt über die Operationen mit Wurzeln mag im Originalwerk el-Ḥaṣṣârs gestanden haben, im Laufe der Zeit aber durch Verschulden der Abschreiber verloren gegangen sein; es wäre aber auch möglich, daſs Ibn el-Bennâ zum Werke seines Vorgängers eigene Zusätze gemacht hätte.

Was die Lebenszeit el-Ḥaṣṣârs anbetrifft, so können wir leider nur eine untere Grenze angeben, es ist dies die Blütezeit seines Übersetzers Moses ben Tibbon, d. h. die Jahre 1240—1275; wir glauben aber nicht, daſs seine Lebenszeit viel weiter zurückreiche, wahrscheinlich war er ein Gelehrter des 12. Jahrhunderts. Alle meine Nachforschungen in westarabischen Quellenwerken über diesen Mathematiker waren bis jetzt erfolglos.

Sur la „Practica geometriæ Hugonis“.

Par PAUL TANNERY à Pantin.

Parmi les „Kleine Bemerkungen“ insérées dans la Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, sur la seconde édition des *Vorlesungen* de M. CANTOR, il s'en trouve, p. 269, une (sur **2** : 53) qui présente HUGO PHYSICUS comme l'auteur de la *Practica geometriæ* éditée par CURTZE dans les Monatshefte für Mathem. 8, 1897, p. 193—224.

Ayant la première responsabilité de cette attribution, je dois déclarer qu'elle est purement conjecturale et que la probabilité n'en est pas assez grande pour qu'il y ait lieu de l'adopter sans la réserve d'une *peut-être*.

Le fait matériel est le suivant: comme je recherchais les ouvrages d'un HUGO SANCTELLIENSIS ou SANCCELLIENSIS (qui a surtout traduit de l'arabe des écrits sur les pratiques divinatoires et qui a dû écrire entre 1120 et 1150), et comme, d'après une indication de STEINSCHNEIDER, j'examinais un ms. de Cambridge (Caio-Gonvilensis 413) qui contient une *Practica geometriæ Hugonis*, j'ai constaté que, sous cette rubrique, se trouvait le texte publié par CURTZE. Comme un arabisant, tel que HUGO SANCCELLIENSIS, l'aurait certainement écrit tout autrement d'un bout à l'autre, j'ai exclu ce traducteur, et j'ai proposé HUGO PHYSICUS, dont je trouvais le nom dans les *Vorlesungen*.

A cette attribution on peut faire une objection assez grave; le manuscrit anonyme dont CURTZE s'est servi, aurait, d'après lui, été copié par un SIGIBORO, ayant travaillé à un autre ms. entre 1163 et 1168. Or HUGO PHYSICUS n'est mort qu'en 1199. A la vérité nous ignorons à quel âge il est mort et nous ne savons pas davantage pendant combien de temps SIGIBORO a pu faire des copies. Le rapprochement de dates que je fais n'entraîne donc pas une impossibilité, mais, sans aucun doute, il diminue la probabilité.

Une autre difficulté est la suivante: la *Practica geometriæ* se trouve en plusieurs exemplaires à Paris, toujours anonyme, mais le plus souvent accompagnée d'opuscules attribués au célèbre théologien HUGUES DE SAINT-VICTOR (mort en 1140); en particulier on rencontre la *Practica* dans un manuscrit provenant de la bibliothèque de l'abbaye de St. Victor

(aujourd'hui à la Mazarine, n° 717) et qui est un recueil exclusif d'écrits de l'illustre maître. Pour ces motifs, HAURÉAU (*HUGUES DE ST. VICTOR*, Paris, Hachette, 1886) n'a pas hésité à lui attribuer la *Practica*, en la classant parmi les écrits inédits, ainsi que cela avait déjà été fait au reste dans l'*Histoire littéraire de la France.*

D'autre part le catalogue de l'Amplonienne de 1412 mentionne un ms. aujourd'hui perdu, qui contenait une *Practica venerabilis Hughonis in geometria.* Ce titre doit valoir ponr une attribution formelle à HUGUES DE SAINT-VICTOR, dans un manuscrit au moins du XIV° siècle.

A cette attribution on ne peut opposer une fin de non-recevoir a priori. Dans nne de ses lettres, HUGUES DE SAINT-VICTOR dit que, dans sa jeunesse, il prenait grand plaisir à la géométrie. Si de très bonne heure il s'est exclnsivement consacré à la théologie, la *Practica* pourrait être un essai antérieur.

Ainsi on se trouve en présence de trois possibilités:

1°. La *Practica* serait de HUGUES DE SAINT-VICTOR.

2°. Elle serait d'un antre HUGO (par exemple le *physicus*) et aurait été, par suite d'une confusion de nom, attribuée à HUGUES DE SAINT-VICTOR.

3°. Elle serait d'nn inconnu, et la rubriqne dn mannscrit de Cambridge, comme celle dn manuscrit d'Erfurt, ne proviendrait que de l'attribution à HUGUES DE SAINT-VICTOR, résultant de l'insertion dans le recueil de ses œuvres, insertion faite à la suite de circonstances qui nous échappent.

Le fait capital est l'existence du manuscrit de la Mazarine; il est certain qu'à la date où il fut copié, les Victorins attribuaient la *Practica* à leur maitre; ce point serait à peu près décisif, si, comme le dit HAURÉAU, ce manuscrit était du XII° siècle; mais en réalité, on doit le considérer comme au plns tôt de la première moitié du XIII°; le ms. de Cambridge est de la même époque.

Les autres mss. de Paris dans lesquels la *Practica* se trouve accolée à des écrits de HUGUES DE SAINT-VICTOR, ne peuvent guère être considérés que comme dérivant de celui de la Mazarine; aucun par son ancienneté ne mérite d'entrer en ligne de compte.

Mais deux faits matériels ébranlent l'autorité de la tradition victorine:

La *Practica*, quoique copiée de la même main que le reste des manuscrits de la Mazarine, s'y trouve sur un cahier spécial, intercalé après coup et tronblant le numérotage primitif des quaternions. Donc la tradition qui a fait, au XIII° siècle, admettre cet opuscule parmi les œuvres de HUGUES DE SAINT-VICTOR, n'a dû prendre naissance qu'à cette époque.

En second lieu, la *Practica*, qui dans le manuscrit de la Mazarine,

se prolonge par des développements sur la cosmimétrie (supprimés dans les mss. de Munich et de Cambridge), se termine par un renvoi à un second livre sur l'astronomie, présenté comme déjà rédigé.

La perte de ce second livre est incompréhensible, si les Victorins avaient réellement conservé le premier comme venant du maître, auquel d'ailleurs aucun écrit sur l'astronomie n'a jamais été attribué.

D'après ces deux circonstances, le plus probable me paraît être que l'admission de la *Practica* dans le recueil a eu lieu au XIII[e] siècle, alors qu'elle portait déjà le nom de HUGO, et que cette admission a été faite d'après ce nom et sur une tradition orale sans contrôle.

Restent à peser les preuves intrinsèques; le mode d'exposition de la *Practica*, l'érudition générale dont l'auteur fait preuve, l'annonce d'un livre sur l'astronomie, donnent certainement l'impression que l'on a affaire à un maître-ès-arts professant le quadrivium, comme le fut HUGO PHYSICUS, comme ne le fut jamais le Victorin. Mais il serait peut-être difficile de mettre en avant quelque passage décisif.

Des comparaisons de style, il ne me paraît pas pratique d'essayer de tirer parti, pour quiconque ne s'est pas rendu à l'avance, familier avec HUGUES DE SAINT-VICTOR; on peut simplement constater que la *Practica* est, pour l'époque, d'une bonne latinité; mais elle ne l'emporte pas à cet égard sur les écrits du Victorin, pas plus qu'elle ne leur cède.

Deux points cependant attirent l'attention; l'auteur de la *Practica* distingue une *geometria theorica* et une *geometria practica*. Or, dans les aperçus relatifs aux arts libéraux que renferment les écrits de HUGUES DE SAINT-VICTOR intéressant la culture générale, aucune division de ce genre n'apparaît. Bien plus, la géométrie, quoique plutôt certainement conçue dans son rôle pratique, est comptée toute entière comme connaissance théorique; or dans la langue du Victorin, *practica* a un sens tout spécial; ce terme ne s'applique qu'à l'action considérée au point de vue moral; autrement dit, il est synonyme d'*éthique*.

En revanche, dans le *Didascalicon*, apparaît, dans des termes très-voisins de ceux de la *Practica*, la singulière division en *altimetria*, *planimetria et cosmimetria*. Cette division serait donc antérieure à l'auteur de la *Practica*, qui d'ailleurs ne la revendique nullement comme sienne, et si son origine doit probablement être cherchée dans la composition de la *Geometria* GERBERTI, il n'en serait pas moins intéressant d'en retrouver l'inventeur.

Malheureusement, là encore, une affirmation catégorique semble imprudente. Car si le *Didascalicon* est, sans conteste, authentique, c'est un ouvrage qui, par sa forme, se prêtait singulièrement aux interpolations, et il n'en a certainement pas été exempt. Du moins, en ce qui me con-

cerne, je ne puis attribuer à un homme de la valeur du Victorin une sottise aussi ridicule que l'insertion, parmi les définitions de la Géométrie, d'une phrase comme «Geometria est fons sensuum et origo dictionum».[1]) D'autre part, le *Didascalicon* revient deux fois successivement sur chacune des quatre branches du quadrivium; il y a eu certainement là un remaniement. Si l'on considère comme une interpolation postérieure les développements ajoutés en second lieu, il se peut que la division de la géométrie ait été empruntée à la *Practica*, qu'il faut en tous cas, semble-t-il, supposer écrite aux environs de 1150.

En résumé, il faut constater comme fait, à partir du XIII[e] siècle, l'attribution à Hugues de Saint-Victor de la *Practica Geometriæ*.

Néanmoins les motifs pour rejeter cette attribution, sans être décisifs, me paraissent prépondérants.

Entre la double alternative qui subsiste (l'auteur s'appelait Hugues ou le nom de Hugues ne vient que de la fausse attribution), le choix ne me semble pas davantage impérieusement commandé; cependant la première hypothèse est plus simple et entraîne moins de difficultés.

Si l'on suppose en outre que Hugo physicus est mort à quatre-vingts ans ou plus, l'attribution qu'on lui ferait de la *Practica* reste encore la solution la plus plausible; mais elle est loin d'être élevée à la hauteur d'une certitude.

1) *Eruditionis didascalicæ lib.* 11, *c.* 16. — Sur l'origine de cette ridicule définition, voir Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, p. 46.

Sur le „Liber augmenti et diminutionis“ compilé par Abraham.

Par PAUL TANNERY à Pantin.

Je n'ai pas la prétention de répondre immédiatement à la question 80 posée dans la Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, p. 272, mais il peut être utile aux autres chercheurs d'être renseignés dès à présent sur les trois manuscrits de la Bibl. Nat. de Paris, où se trouve l'opuscule publié par LIBRI.

Ces trois manuscrits sont du XIV[e] siècle; le plus ancien (jadis Suppl. lat. 49), le Lat. 9355, semble bien voisin de l'an 1300. Ce manuscrit, in-fol., qui a appartenu à ISMAËL BOULLIAU, mais où je n'ai trouvé aucun indice sur les possesseurs autérieurs, est remarquablement soigné, écrit avec très peu d'abréviations, et bien lisible. C'est évidemment celui qui a servi à LIBRI. Les nombres y sont inscrits en toutes lettres, tandis qu'ils sont chiffrés dans les deux autres mss., de même que les abréviations y sont systématiquement multipliées autant que possible.

Le Ms. lat. 7377A est d'une lecture très difficile; les titres (rubriqués dans le 9355) y sont à l'encre noire; ils manquent dans le Lat. 7266, recueil factice qui, pour la partie coutenant l'opuscule en question, doit être, comme date, intermédiaire entre les deux autres. L'écriture, quoiqu'un peu plus lisible que celle du 7377A, laisse beaucoup encore à désirer et la copie semble moins fidèle. Néanmoins les trois mss. paraissent bien représenter un même original, qui d'ailleurs peut très bien être le 9355. On remarque dans ce dernier des annotations marginales critiques sur le texte; *ces annotations sont de première main* et ont passé dans le 7377A, mais manquent dans le 7266.

La lecture de LIBRI, pour le nom d'auteur cité dans l'opuscule, est correcte; les trois manuscrits portent, sans incertitude:

«Et ipsa est regula IOB filii SALOMONIS (salamonis 9355) diuisoris.»

Les deux mss. 9355 et 7377A ajoutent la note marginale:

«Dicitur diuisor qui res a defuncto relictas partitur: hoc apud Arabes.» [1])

1) Cette note semble bien permettre de conclure qu'il s'agit d'un auteur arabe. Si le prénom «Iob» est évidemment suspect, on peut croire que l'original portait, en

Il importe enfin de remarquer que notre opuscule forme le dernier morceau d'une suite algébrico-géométrique insérée, dans le ms. 9355 (lequel est un *corpus* mathématique très intéressant), entre d'autres suites d'un caractère différent (en avant, l'optique d'EUCLIDE; en arrière, un traité astronomique d'ALKINDI). Voici le détail de cette suite:

1. (f° 92v—110v). Sous la rubrique *Abbacus*, une traduction du Xe livre des *Eléments* d'EUCLIDE, commençant: «Cum quantitates ad in«uicem comparantur, alie earum sunt communicantes, alie incommunican«tes . . .» et finissant: « . . . et illud est quod demonstrare voluimus. *Ex«pletus est liber*».

2. (f° 110v—116v) «*Liber* MAUMETI *filii* MOYSI ALCHOARISMI *de algebra «et almuchabala incipit.* Hic post laudem Dei et ipsius exaltationem «inquit . . . . . et proueniunt viginti quinque dragme, cuius radix est quinque».

3. (f° 116v—125v) «*Liber in quo terrarum corporumque continentur «mensurationes* ABHÂBUCHRI *qui dicebatur* HEUS, *translatus a magistro* «GIRARDO CREMONENSI *in Toleto de arabico in latinum. Abreuiatus incipit «cuius hec sunt verba.* Cum aliquis tibi dixerit: est quadratum equi«laterum . . . .
« . . . et hec est eius forma. *Expletus est totus liber mensurationis.*»

4. (f° 125v—126r) «*Incipit liber* SAYDI ABUOTHMI. Scias quod scien«tia figurarum superficialium . . . .
« . . . hec ergo sunt ea que in omni contingunt triangulo quadrato.»

5. (f° 126r—126v) «*Incipit liber* ADERAMEN. Scias quod aree cuius«que quadrati orthogonii . . . .
« . . . erit area illius corporis.»

6. (f° 126r suiv.) «*Liber augmenti et diminutionis etc.*»

La même suite se retrouve intégralement dans le ms. 7377A, lequel débute précisément par le n° 1. Le *liber augmenti et diminitionis* se trouve au f° 58v; il est suivi de morceaux géométriques anonymes.

Dans le ms. 7266, au f° 113, commence une série de cahiers d'une main différente des autres du même manuscrit. On y trouve la même suite, à partir du début du n° 3 (sans le titre) et jusqu'à la fin du n° 6, qui y commence d'ailleurs au f° 125r; aucun morceau étranger n'est ajouté ni intercalé dans cette suite.

En résumé, l'opuscule algébrique qui porte le nom d'ABRAHAM, doit être antérieur au XIVe siècle. Il se rencontre dans une suite exclusivement formée (en dehors de lui) par des traductions faites sur l'arabe et

abrégé, le mot «Iacob». Ce mot, mal écrit, a pu conduire aussi à la leçon «Isac», plutôt que celle-ci n'aurait donné «Iob» par corruption.

dont l'une au moins serait du XIIe siècle. La solution de la question posée me paraît donc demander la recherche des autres exemplaires de ces traductions, leur étude et la détermination de leur âge. Cette recherche se complique de la circonstance que trois des auteurs traduits (ABOU-BEKR?, SÉID ABOU-OTHMAN?, ABD-EL-RAHMAN?) sont aussi peu connus[1]) que notre ABRAHAM ou IBRAHIM et son IOB (IAKOUB?) BEN SOLIMAN.

1) Comparer sur ABOU-BEKR la remarque de M. SUTER dans les Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wiss. **10**, 1900, p. 216. — ABOU-OTHMAN est probablement le n° 98 dans l'ouvrage cité de M. SUTER (p. 49). (G. E.)

Zur Geschichte der Kreismessung und Kreisteilung im fünfzehnten Jahrhundert.

Von Maximilian Curtze in Thorn.

1.

Die nachfolgend abgedruckte Abhandlung über die Möglichkeit einer Kreisquadratur, beweist den Hauptsatz der Archimedischen Kreismessung, dafs der Kreis einem Dreieck gleich sei, dessen eine Seite der Kreisumfang, dessen andere der Radius des Kreises sei, wenn dieselben einen rechten Winkel einschliefsen, im Anschlufs an den Archimedischen Beweis in gutes Verständnis verratender Weise. Sie zeigt, dafs der anonyme Verfasser ein klarer Kopf gewesen sein mufs, welcher dem nicht leichten Gedankengange des Archimedischen Exhaustionsbeweises zu folgen im stande gewesen ist. Die Beweise für jeden in demselben benutzten Satz hat er natürlich selbständig hinzugefügt. Für den Anfang des XV. Jahrhunderts, dem diese Abhandlung entstammt, ist sie jedenfalls eine bedeutende Leistung. Dafs der Verfasser offenbar, wie allgemein im Mittelalter, den Umfang des Kreises als durch den Radius gegeben ansieht, und natürlich, wenn auch nicht ausdrücklich ausgesprochen, als das $3\frac{1}{7}$fache des Durchmessers, macht seine Arbeit keineswegs unfruchtbar. Sie dürfte manchen Leser zu tieferem Nachdenken gebracht haben.

Jedenfalls ist sie für die Beurteilung der Kenntnisse des Mittelalters nicht ohne Bedeutung.

De quadratura circuli.

(Codex latinus Monacensis 56. S. XV ineuntis).

[182] Ad probandum, quod sit dare quadratum equale aree circuli, assumitur ista proposicio Archimedis in *Mensura:*

Triangulus orthogonius, cuius unum latus est semidyameter circuli, et reliquum angulum rectum cum semidyametro constituens equale circumferencie circuli fuerit, equalis est circulo.

Formatur enim sic demonstracio. Si triangulus *a* ex circumferencia et semidyametro dati circuli rectum angulum ambientibus et tertio latere opposito recto angulo constitutus ⟨est⟩, dico, hunc triangulum esse equa-

lem circulo dato. Sed huic triangulo *a* dabo quadratum equale per ultimam secundi libri EUCLIDIS, et tunc erunt circuli dati et huius quadrati superficies eqnales uni et eodem triangulo *a*: ergo erunt inter se equales per communem animi conceptionem. Sunt ergo due proposiciones accepte ad probandnm, quarum prima est, quod triangulus constitutus ex circumferencia scilicet dati circuli et eius ⟨semi⟩dyametro est equalis circulo dato; et hic triangulus vocetur *a*. Secunda proposicio, quod triangulo *a* erit datum qnadratum equale. Et tunc seqnitur conclusio, scilicet, quod circulus datus et quadratum illud inter se adequantur.

Prima sic probatur.

Describatur circulus circa centrum *e*, qui sit *bcdgh*, secundum quantitatem semidyametri *ec*, tunc sic triangulus *a* est equalis circulo dato, aut maior, aut minor. Si primum, habetur propositum. Si autem idem triangulus sit minor circulo dato, tunc possibile est, quantitatem circuli dividi in quantitatem, qua excellitur, et in eam, qua excellit, que est communis conceptio, quam posuit ARISTOTELES *quarto physicorum capitulo de vacuo*. Et equale huius, in quo excellit circulus triangulum addatur triangulo, et hoc equale excessui triangulo additum vocetur *p*. Tunc ergo triangulus *a* cum illa quantitate *p* erit equalis circulo dato. Sed hoc posito, quod circulus sit maior triangulo *a* in illa quantitate *p*, sequitur, quod esset polygonium infra eundem circulum inscribi maius triangulo *a*, quod est impossibile. Ergo est impossibile, quod circulus datus sit maior triangulo *a* in aliqua quantitate, que dicatur *p*, quantacumque sit illa.

[182'] Nunc ergo ostendendum est, quod sequitur hoc impossibile, et postea quod hoc, quod sequitur, sit impossibile, ut dicitur. Quomodo autem sequatur polygonium posse inscribi circulo maius triangulo *a*, sic demonstratur.

De maiori quantitate possum demere maius suo dimidio, et iterum de residuo possum demere maius suo dimidio, et hoc semper, donec relinquatur minor quantitas qualibet proposita. Et hoc posse fieri demonstrat prima decimi EUCLIDIS. Dematur ergo de dato circulo isto modo,

Fig. 1 u. 2

donec relinquatur minor quantitas de circulo quantitate *p*. Dematur autem hoc modo. Inscribatur quadratum infra datum circulum, secundum quod docet sexta quarti Euclidis. Inscribi autem quid sit, docet prima diffinitio posita in principio quarti Euclidis. Sit ergo dato circulo quadratum inscriptum *bdgh*, et hoc quadratum est maius dimidio circuli dati, quod sic patet. Quia quadratum *bdgh* est medietas quadrati *lmqr* circumscripti ipsi dato circulo per penultimam primi Euclidis, quia latera *bd* et *dg* trianguli *bdg* sunt equalia per sextam primi; sed quadratum linee *bg* est equale duobus quadratis duarum linearum *bd* et *dg* per illam penultimam primi, ergo idem quadratum linee *bg* est duplum ad alterum duorum quadratorum, quia illa duo sunt equalia. Sed quadratum inscriptum circulo est super linea *bd*, quia cetera sunt isti equalia, quia omnia sunt invicem equalia per diffinicionem quadrati et inscriptionis et per sextam primi et per primam partem 30^{e} Euclidis tercii; quadratum autem circumscriptum eidem circulo est super lineam *bg*, quia linea *bg* est equalis alteri *lm* quadrati circumscripti, quia sunt inter se equedistantes: patet igitur, quod quadratum inscriptum est dimidium quadrati circumscripti eidem circulo. Hoc eciam docet Campanus demonstracione secunda duodecimi. Sed quadratum circumscriptum est maius circulo dato, cui circumscribitur, per communem conceptionem, que dicit, quod omne totum est maius sua parte: est ergo quadratum inscriptum maior quantitas, quam sit medietas circuli, est ergo idem quadratum inscriptum maius medietate eiusdem circuli dati. Demptum est igitur, secundum quod prima decimi iniungebat.

Porciones ergo relicte simul sumpte minus sunt medietate circuli. Demam iterum de ultimis [183] porcionibus plus medietate, quod faciam isto modo. Ab angulis porcionum ducam lineas ad punctum in medio arcus signatum. Primum ad *c* in medio arcus *bcd* signatum ducam lineas *bc* et *dc*; similiter faciam in aliis porcionibus omnibus, et demam triangulum *bcd* ab ipsa porcione *bcd*, tunc scio me dempsisse a porcione eadem plus medietate porcionis, quia idem triangulus est medietas maioris quantitatis, quam sit porcio, ergo est maior medietate porcionis. Hoc autem, quod sit maioris quantitatis, quam sit medietas porcionis, patebit, quia, si super lineam *bd* constituas parallelogrammum, cuius altitudinem attingat punctus *c* trianguli *bcd*, hoc parallelogrammum constat esse duplum ad triangulum *bcd*. Sit autem parallelogrammum hoc *bdon*. Cum enim triangulus *bcd* et parallelogrammum *bdon* sint in equedistantibus lineis et super eandem basim *bd*, erit parallelogrammum duplum ad triangulum per 41^{am} primi. Similiter demam de aliis porcionibus similes triangulos. Quo facto plus dempseris medietate porcionum, et si illud, quod relinquitur de eisdem porcionibus demptis triangulis predictis, ⟨non⟩ fuerit

minus quantitati *p*, demam simili modo triangulos a porcionibus residuis; quod similiter faciam, ut feci cum predictis, scilicet demendo lineas ab angulis porcionum ⟨ad punctum⟩ in medio arcus eiusdem porcionis signatum etc. Quo peracto, quod relinquitur, si sit minor quantitate *p*, habeo, quod quero. Quod si non est minus, demam semper modo simili, sicut feci. Qua operacione demendi completa dum, quod relinquitur, erit minus quantitate *p*, tunc polygonium factum intra circulum continet quantitatem totius circuli dati excepto residuo, quod est minus quantitate *p*. Cum ergo circulus datus continet quantitatem trianguli *a* et quantitatem *p*, erit polygonium inscriptum eidem circulo maius triangulo *a* in tanto, quantum ipsius polygonii residuum in circulo est minus quantitate *p*: conclusum est igitur, quod fuit premissum, scilicet quod, si triangulus *a* esset minor circulo dato in quantitate aliqua, que dicta est *p*, erit datum polygonium intra circulum eundem inscriptum, quod erit maius triangulo *a*, quod erat probandum.

Sequitur ergo demonstrandum, hoc esse impossibile, scilicet quod intra datum circulum est datum polygonium maius triangulo *a*. Demonstratur autem sic, sumpta ista communi sciencia, quod, quando quecumque dupla sint maiora ad aliud ipsorum, media sunt maiora ad medium alterius. Si duplum trianguli *a* est maius duplo [183'] polygonii infra circulum inscripti, tunc ipsum medium maioris, scilicet triangulus *a*, est maius dimidio minoris, scilicet polygonio predicto. Quod autem duplum trianguli *a* sit maius duplo polygonii dicti sic patet. Quia ex lineis maioribus utriusque angulum rectum in parallelogrammo ambientibus maius fict parallelogrammum per diffinitionem primam positam in principio secundi Euclidis; sed linee due trianguli *a*, quarum altera equalis est circumferencie dati circuli ex ypotesi, et altera semidyametro, ex quibus parallelogrammum duplum fit triangulo, sunt maiores lineis ex quibus fit duplum polygonii predicti: ergo et duplum trianguli *a* est maius duplo polygonii predicti. Quod autem ex illis duabus lineis trianguli, rectum angulum constituentibus in triangulo *a* fiat parallelogrammum, patere potest per diffinicionem parallelogrammi positam in principio secundi Euclidis. Quod autem idem parallelogrammum sit duplum ad triangulum *a* patet per 41^{am} primi. Quod autem ille linee trianguli *a* sunt maiores lineis, que faciunt duplum polygonii predicti, sic constat. Sit enim polygonium octogonum *bcdkgfhs*, cuius centrum sit *e*, et ducatur linea orthogonaliter a centro *e* ad unum suorum laterum, quod gracia exempli sit *hs*, et hec linea egrediatur a puncto *e* in lineam *hs*. Tunc dico, quod ex ducta linea *ex* in omnes ⟨lineas⟩ laterales polygonii constituitur duplum polygonii huius. Sed omnes linee laterales non adequantur circumferencie circuli, que est alterum latus trianguli *a*. Quod autem non adequatur,

patet, quia quilibet corda et arcus ducuntur ab eodem puncto ad eundem, recta autem linea, que est corda, brevior, que esse potest intra illa duo puncta: ergo omnes corde, que sunt latera polygonii inscripti circulo, sunt minores ipsa circumferencia. Similiter linea *ex* brevior est semidyametro, quia non procedit ad circumferenciam. Patet ergo, quod utraque est brevior in polygonio sua correlativa in triangulo *a*. Quod autem duplum polygonii proveniat ex ductu linee *ex* in omnes lineas laterales polygonii, sic demonstratur. Ex ductu enim *hx* in *ex* fit parallelogrammum per primam diffinitionem positam in principio secundi Euclidis. Sed illud parallelogrammum est duplum ad triangulum *ehx* per 41^am^ primi. Eodem modo provenit duplum trianguli *esx* ex ductu *sx* in *ex*: ergo ex ductu *ex* [184] in totam *hs* proveniet duplum utriusque trianguli *ehx* et *esx* per primam diffinicionem secundi Euclidis. Similiter ex ductu linee equalis *ex* in similia latera polygonii provenit duplum tocius parallelogrammi in eosdem triangulos resoluti: patet ergo, quod querebatur, scilicet, quod ex ductu *ex* in omnia latera polygonii provenit duplum polygonii. Sed hoc duplum, ut patuit, est minus duplo trianguli *a*: ergo et polygonium inscriptum in circulo dato esse maius triangulo *a* est impossibile. Hoc tamen impossibile concludebatur ex ypostasi illa, que dicebat, triangulum, cuius duo latera sunt circumferencie et semidyametro circuli dati equalia, esse minorem circulo dato: non est ergo possibile, quod triangulus ille sit minor circulo dato.

Restat nunc ostendere, quod non sit maior idem triangulus *a*, cuius latera angulum rectum ambiencia sunt circumferentie et semidyametro circuli dati equalia.

Circumscribatur eidem circulo dato quadratum *bcde*. Describatur in hoc quadrato polygonium octo angulorum *fghklmno* extra circulum datum: dico, hoc quadratum circumscriptum esse maius triangulo *a*, quia est maius polygonio intra se inscripto, quia est totum respectu ipsius tanquam partis. Contentum enim polygonium par est quadrato cuiusdam. Scilicet idem polygonium maius est triangulo *a*, quia duplum polygonii maius est duplo trianguli *a*, quia duplum polygonii constituitur ex maioribus lineis quam duplum trianguli *a*. Quod autem duplum polygonii constituitur ex maioribus lineis quam duplum trianguli *a*, sic demonstratur. Duplum trianguli *a* per 41^am^ primi constituitur ex duobus lateribus, quorum aliud per ypostasim circumferencie circuli dati, aliud vero eiusdem dati circuli semidyametro est equale; duplum vero polygonii constituitur per eandem 41^am^ primi et per primam secundi Euclidis ex dyametro eiusdem circuli ducto in omnia latera polygonii. Omnia autem latera polygonii sunt quantitates maiores quam circumferencia, cui est equale aliud trianguli latus: ergo, quam vis semidyameter utrobique sit

idem vel eius equale in dnctu facto in triangulo *a* et in polygonio, tamen reliquum, in quo ducitur, est maius in polygonio qnam in triangulo *a*. Quod autem maioris sint quantitatis omnia latera polygonii quam circumferencia, cui est circumscriptum polygonium, [184′] liquet, quod maius continet spacium polygonium quam circulus idem, quia circulus continetur a polygonio. Si ergo continet maius spacium ipsum polygonium circulo dato, etiam in lineis ambientibns est maior quantitas ponenda, quia circularis linea equalis plus continet de spacio quam recta, ut dicit Aristoteles primo *celi et mundi* et Ptolomeus primo libro *almagesti* dicit cap. 3° sic: „*Et est circulus maior figuris superficialibus, et est spera maior figuris corporeis*". Conclusum est ergo, quod duplum polygonii maius est duplo trianguli *a*, ergo polygonium est maius triangulo *a* per communem scienciam: quorum dupla sunt maiora, ipsa sunt maiora multo forcius. Ergo quadratum circumscriptum circulo, qnod continet idem polygonium octogonium, est maius triangulo *a* per communem scienciam: quod est maius maiore, est maius minore.

Hoc habito circumscribatur idem polygonium octogonium ipsi circulo dato per hnnc modum. A puncto *f* signato in latere *bc* quadrati circumscripti ducatur linea contingens in puncto *o* lateris quadrati *be*, fiuntque partes *bf*, et *bo* equales, que resecate sunt de predictis lateribus. Simili modo ducantur liuee contingentes circulum intra cetera latera, ut a puncto *g* lateris *bc* ducatur linea *bh* ad punctum *h* lateris *cd*, et a puncto *k* lateris *cd* ad punctum *l* lateris *de* ducatur linea *kl*, et a puncto *m* lateris *de* ducatur linea *mn* ad punctum *n* lateris *be*, eritque polygonium octo angulorum *fghklmno*. Quod autem sit linea contingens circulum, docet diffinicio secunda in principio secundi Euclidis posita. Hijs ergo sic dispositis demonstratur, quod triangulus *a* datus non sit maior circulo dato, cuius trianguli duo latera talia sunt, quod aliud est equale circumferencie et alind semidyametro circuli dati, fiatqne talis conclusio: si triangulus *a* est maior semicirculo dato, sequitur, qnod erit datum polygoninm circumscriptum cir-

Fig. 3 u. 4.

culo dato, quod quidem polygonium erit minus triangulo *a*. Sed hoc est impossibile: ergo et illud, ex cuius posicione sequitur hec conclusio. Non ergo est possibile, quod triangulus *a* sit maior circulo dato.

Primo ostendatur conclusio secunda, quod quidem sit impossibile, sic demonstratur. Resumatur secundum ypostasim, quod triangulus *a* est maior circulo dato. Sit hoc ergo in aliqua quantitate, que vocetur *p*. Nunc enim est dividi excellens item ut supra. Hic autem excessus *p* minor est excessu, in quo quadratum circumscriptum circulo [185] excedit circulum, quia et triangulus *a* est minor quadrato circumscripto, ut demonstratum fuit. Possis autem demere de excessu, qua excedit quadratum circulum, quia hoc docet prima decimi, donec reliqua minus est ipso *p*, quod faciam isto modo. Ducam a centro ad angulum *b* quadrati circumscripti lineam, que secat lineam *fo* contingentem in puncto *v*. Tunc dico, quod latus *bf* trianguli *bvf*, quod est oppositum angulo recto, maius est latere *fv* eiusdem per 14^{am} primi. Sed latus *fv* est equale linee *fx* per 16^{am} proposicionem tercii. Est autem *x* punctus, in quo latus *bc* quadrati *bcde* contingit circulum datum. Sed cum angulus *bvf* trianguli *bvf* sit rectus, quia quatuor anguli, qui sunt ad *v* punctum contingencie sunt recti per 17^{am} tercii, ergo *bf* erit ipso *fv* maior per 18^{am} primi: igitur *bf* est maior *fx*. Ducatur igitur *vx*. Dico, quod triangulus *fbv* qui est super *fb* basim maiorem, maior est triangulo *fvx*, qui habet *fx* basim minorem inter latera quadrati inscripti eiusdem distancia per conversam 38^{am} primi. Si enim inter equedistantes trianguli equalium basium fuerint, sunt equales, ergo, qui sunt equales trianguli inter equedistantes habent equales bases. Igitur, qui non habent equales bases, non sunt equales. Si enim ille, qui habet minorem basim, sit equalis habenti maiorem, ut, quod trianguli *fxv*, qui habet minorem basim, ut probatum est, sit equalis triangulo *bfv*, tunc producatur *fx* linea usque ad *s* punctum, ubi sit equalis *bf sx*, et ducatur linea *sv*. Tunc dico, quod, cum triangulus *bfv* habeat basim *bf*, et triangulus *fvs* habeat *fs* basim equalem basi *bf* et in eadem linea, igitur triangulus *fsv* est equalis triangulo *bfv* per 38^{am} primi. Sunt enim inter equedistantes per 41^{am} primi. Igitur, si eidem *bfv* sunt equales, inter se sunt equales illi duo scilicet *fxv* et *fsv*, scilicet pars et totum, quod est impossibile. Verum est igitur, quod triangulus *bfv* est maior triangulo *fxv*, ergo idem triangulus *bfv* multo a forciori est maior parte trianguli *fxv*, que est porcio contenta ex arcu *xv* et inter duas lineas *fv* et *fx*. Dempto ergo triangulo *bfv* a porcione, que erat inter lineas *bv* et *bx* et extra arcum circuli dati inter [185'] illas contentum, demptum erit maius medietate eiusdem porcionis. Similiter si dempsero triangulum *bvo* de alia simili porcione, demptum erit maius dimidio eiusdem porcionis. Similiter operabo circa alias porciones inter

reliquas quadrati angulos contentas. Qno peracto, si quod relinqnitur inter latera polygonii circumscripti et arcus circuli lateribus subiectis hiis demptis, minus est quantitate p, tunc habeo, quod quero; si non sit minus, adhuc demam similiter, sicnt feci; de lateribus enim polygonii circa angulum f, que latera sunt fo et fg, sumam equalia circa f, et dncam lineam rq, ita quod r sit in latere fo et q sit in latere fg, sic quod linea rq contingens sit circulum. Tunc similiter probabo ut prius, triangulum frq esse maiorem dimidio porcionis prius relicte. Sicque probo in ceteris porcionibus. Et hos triangulos cum dempsero, subtractum erit maius dimidio portionum relictarum. Sicqne faciam, donec excessus, qui est inter latera polygonii circumscripti et circumferenciam circuli, quo polygonium ultimo formatum excedit circulum datum, minor sit quantitate p. Tunc igitur, cum circulns cum quantitate p equaretur triangulo a, sequitur, quod polygonium, in quo est circulus datus, cnm minore quantitate, quam sit p, sit minns ipso triangulo a. Conclusum est igitur, quod est datum polygonium extra circulum datum, quod est minus ipso triangulo a, quod dixi esse impossibile; et per hoc posicio erit impossibilis.

Nunc superest demonstrare, quod hoc consequens sit impossibile, quod scilicet possit circumscribi circulo dato polygonium minus triangulo. Ducantur linee a centro circuli dati ad singulos angulos polygonii. Ponatur enim gracia exempli, quod polygonium istud sit ipsum octogonium $fghklmno$. Ducantur insuper linee a centro ad singula puncta contactus laterum polygonii, de quibus primo pro exemplo ea, que egreditur a centro y ad v punctum contactus lateris fo, facit angulos rectos ad eandem lineam fo per 17am tercii EUCLIDIS. Similiter et alie ducte ad alia puncta contactuum faciunt angulos rectos. Hec autem directa in punctum v si dncatur in latus fv, facit per 41am primi duplum trianguli fyv. Ponatur enim in centro y. Similiter si ducatur eadem linea yv in latus vo faciet duplum trianguli oyv per eandem [186] 41am primi. Est enim parallelogrammum rectangulum hoc, quod fit ex yv in vo per diffinitionem primam positam in principio secundi EUCLIDIS. Similiter si eadem yv, vel sibi equalis, ducatur in quamlibet ceterarum, faciet dupium trianguli cuiuslibet, in cuius latus ducetur: ergo, si ducatur yv in omnia latera polygonii faciet duplum omnium sive duplum tocius polygonii per primam secundi. Tunc sic duplum polygonii circumscripti circulo dato maius est duplo trianguli a, ergo polygonium est maius triangnlo a per communem scienciam: *quorum dupla sunt maiora, ipsa sunt maiora.* Quod autem duplum polygonii sit maius duplo trianguli a, patet, quia, ut dictum est supra et probatum in ista demonstracione, omnia latera polygonii circumscripti sunt maioris quantitatis ipsa circumferencia, cum polygonium contineat maius spacium circulo. Sed maius latus trianguli a est equale

circumferencie circuli dati, et minus latus eiusdem trianguli est equale linee *yv*, quia est semidyameter: cum ergo aliud latus in polygonio, scilicet quantitas omnium laterum eius, sit maius altero latere trianguli *a*, reliquis existentibus equalibus, quia sunt equalia semidyametro reliqua duo, fiet maius parallelogrammum ex ductu semidyametri in latera polygonii quam ex ductu eiusdem semidyametri, qui est latus in triangulo *a*, in aliud latus trianguli eiusdem. Universaliter ergo verum est, omne polygonium circumscriptum dato circulo esse maius triangulo, cuius aliud latus est equale circumferencie, et aliud latus semidyametro, que duo latera ambiunt rectum angulum. Sequebatur autem, quod esset minus hoc polygonium predicto triangulo, ex ypostasi, que ponebat triangulum predictum esse minorem circulo dato: ergo ypostasis illa est falsa. Non ergo maior triangulus talis circulo dato, nec minor, ut superius est probatum: ergo est equalis.

Invenitur autem quadratum, quod huic triangulo sit equale, per doctrinam 14e proposicionis secundi, que est ultima eius secundi EUCLIDIS, ad quod eciam faciunt 42a aut 44a primi et 5ta secundi. [186']

Proposicio autem 16a tercii est: „*Puncto extra circulum signato si ab eo ducantur due linee circulum contingentes, ipse sunt sibi invicem equales*".

Hanc enim sic demonstrat CAMPANUS super penultimam tercii EUCLIDIS. Sit punctus *a* extra circulum *bcd*, cuius centrum est *e*, et ab ipso ducantur due linee *ab* et *ad* contingentes circulum in punctis *b*, *d*: dicam, ipsas esse equales. Producam enim lineas *eb* et *ed* et *ea*, eruntque per 17am tercii anguli *b* et *d* sibi invicem equales. Ducatur insuper linea *bd*, eritque angulus *ebd* per 5am primi equalis angulo *edb*, quia latera *eb* et *ed* sunt equalia; ita et duo residui anguli *abd* et *adb* sunt equalia per communem scienciam: si ab equalibus equalia demantur etc. Igitur duo latera *ad* et *ab* sunt equalia per 6am primi, quod volebam. Patet ergo, cum in nostro parallelogrammo a puncto *f* ducantur linee *fv* et *fx* circulum contingentes, quod ipse sunt equales. Sed cum angulus *bvf* trianguli *bvf* sit rectus, quia quatuor anguli, qui sunt ad *v* punctum contingencie sunt recti per 17am tercii, igitur *fv* erit minor ipso *bf*. [187]

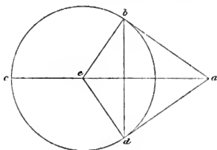


Fig. 5.

2.

Trotz der andern Form, in welcher die folgende Konstruktion auftritt, ist sie doch mit der sogenannten indischen Teilung identisch. Die gefundene, näherungsweise richtige Seite des regulären Siebenecks ist die halbe Seite des regulären Dreiecks, wie leicht zu zeigen ist.

(Codex latinus Monacensis 14111 (S. XV.) Blatt 212)

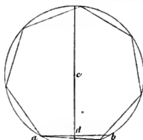


Fig. 6.

Ad faciendam divisionem circuli in 7 partes recipe semidyametrum circuli, et per ipsum divide circumferentiam faciendo duo puncta, et trahe lineam de uno puncto ad alium rectam; et postea trahe lineam diametralem a centro circuli per medium linee ducte a punctis. Postea pone pedem circini immobilem ad centrum circuli, et duc pedem mobilem a centro circuli ad lineam *ab*. Per hanc mensuram divide circulum in 7 partes.

Die mathematischen Wissenschaften bei den Juden 1441—1500.

Von Moritz Steinschneider in Berlin.

Die Kürze, welche mir für die nachfolgenden Notizen über Schriften der Juden im bezeichneten Zeitraum (wo keine andere Sprache angegeben, ist es die hebräische) zur Bedingung gemacht ist, gebietet mir auch die gröfste Beschränkung dieser Vorbemerkungen.

Die bezeichnete Periode charakterisiert sich durch Übertragung christlicher Quellen, meist lateinischer, für deren Geschichte selbst die hebräischen Bearbeitungen, namentlich wenn ihre Originale arabischen Ursprungs sind, nicht wertlos erscheinen. Die Bedeutung astrologischer Schriften für die Astronomie und als Produkte mathematisch gebildeter Gelehrten ist in neuerer Zeit wiederholt anerkannt worden, z. B. von Mensinger (*Über neue und alte Astrologie*, Berlin 1871), Billwiller (*Über Astrologie*; Vorträge, gehalten in der Schweiz, Bd. V, Basel 1878), Häbler (*Astrologie im Alterthum*; Progr. Zwickau 1879). Aufser den mit astronomischen Rechnungen zusammenhängenden eigentlichen Abhandlungen über Chronologie und Kalender, rühren auch Tabellen über Cyklen und Perioden in der Regel nur von Astronomen oder Mathematikern her, hingegen habe ich Tabellen von kürzerer Zeit übergangen, wie z. B. vom J. 1469 (ms. Bodl. Neub. 31), 1472/3 (so! ms. München 401, *Catal.*, S. 221 Ed. II), 1482 ff. (Paris 1284[3]), 1487—93 (ms. Parma, de Rossi 1365). — Verweisungen auf die Stellen, wo ich von den hier genannten älteren jüdischen Gelehrten gehandelt habe, sind nur ausnahmsweise angefügt. — Mein nächstes Ziel ist eine chronologische Zusammenfassung des Materials, welches in unserer Zeit auf allen Gebieten aufgesucht wird, für Fachmänner, deren Sache die historisch-kritische Verwertung ist.

1441—1450.

1443 ist ein anonymes arabisches Werk über Chronologie verfafst, in dessen praktischem Teil auch die Tafeln enthalten sind; ein defektes Exemplar, ms. Bodl. Neub. 2078, geschrieben von Josef ben Zedaka u. s. w. im Orient 1471 (Geiger, Jüd. Zeitschr. IX, 180).

1445 datieren astronomische Tabellen eines Anonymus mit Erklärungen, ms. des Buchhändlers Schönblum, also nicht von Isak ibn Sid, wie Halberstam in seinem *Catalog* zu n. 188 bemerkt, s. meine Berichtigung das., S. 146.

1446—1450 lebte Simon Motot (?) in Italien. Er verfafste:

1) eine hebräische Abhandlung über die von Maimonides erwähnten 2 Linien (hyperbolische Kurve und Asymptote), ms. München 36 und Wien 75, welche nach meiner Vermutung (*Die hebräischen Übersetzungen d. Mittelalt.*, S. 426) von Moses Provinciale (1549) erwähnt ist, dessen Abhandlung Barocius unter dem falschen Namen „Narboni" übersetzt hat (Abhandl z. Gesch. d. Mathem. 9, 1899, 480).

2) eine *Algebra* mit Benutzung christlicher Quellen, gewidmet dem Italiener Mordechai Finzi (s unten), ms. in Berlin, Florenz, Mantua, Parma; eine französ. Übersetzung lieferte G. Sacerdote in der Revue des études juives, auch Sonderabdr. Versailles 1894 (vgl. Biblioth. Mathem. 1899, S. 56).

1441—1473 blühte Mordechai (italienisch Angelo) Finzi in Mantua, ein fruchtbarer Schriftsteller auf dem Gebiete der Mathematik, insbesondere als Übersetzer, wahrscheinlich überall aus lateinischen Quellen, wie auch seiner Bearbeitung einer Mnemotechnik, beendet 2. Jan. 1445, wohl eine lateinische des Pat. Fr. d'Orvieto zu Grunde liegt. Finzis Schriften bedürfen und harren der Prüfung eines Fachmannes. Ich mufs mich auf eine trockene Aufzählung beschränken.[1])

1) Tafeln über die Tageslänge (anonym), Mantua vor 1480, höchst selten.

2) Eine Abhandlung über Chronologie, betitelt: *Netib Chochma* (Pfad der Wissenschaft), enthaltend astronom. Tabellen, wahrscheinlich in Verbindung mit verwandten Schriften in ms. Bodl. Neub. 2052 (Mich. 570) und vielleicht auch sonst.

3) Ein Buch „der Forschung" *(ha-Chakira)*, nur aus einem Zitat bekannt.

Übersetzungen und Erläuterungen.

4) Ms. (Parma) de Rossi 336^5 enthält: „ex tabulis Alfonsi et consideratione Angeli Finzi". Näheres unbekannt.

5) Eine Beschreibung des von Bartolomeo dei Manfredi, genannt

1) Über Mordechai Finzi s. *Die hebr. Übersetz.*, u. s. w., Register, S. 1061, wo 613 u. 630 wahrscheinlich falsche Zahlen sind; zu 372 fehlt §; s. S. 592, A. 412, S. 625, A. 241 und Riccardis Beschreibung eines von Finzi kopierten und mit Noten versehenen Ms., dessen Herausgabe wünschenswert sei, in Biblioth. Mathem. 1892, 54—56 und dazu meine Bemerkungen daselbst S. 73; s. auch unten zu Nr. 5 und 11.

degli Orologi, erfundenen Instrumentes, gen. *Celidario*, hebr. ms. Florenz, Pl. 88 C. 47, ist ohne Zweifel von Finzi, s. unten n. 11.

6) Ms. Scal. in Leyden 14 enthält 10 Kapitel aus den Tafeln des „Jochanan ha-Libni“, d. i. Johannes Bianchinus, wahrscheinlich ebenfalls von Finzi.

7) Ms. Parma de Rossi 101, enthält vier Tafeln über die Stunden der Tageshälfte von Juan Bianchino, wahrscheinlich hebräisch übersetzt von Finzi, der zwischen der zweiten und dritten Tafel eine Bearbeitung für die Breite von 44° einschaltet. Diese Einschaltung ist auch in ms. Bodleiana Mich. 525 u. ms. Benzian 46 enthalten. Vgl. oben n. 2.

8) Ms. hebr. Paris 1029[5] enthält 194 Probleme oder Aequationen, welche aus den „5 numerischen Quantitäten: Zahl, Wurzel, Produkt (*censo*) Kubus und Produkt des Prod. (4. Potenz) hervorgehen“. Der Verf. heifst דארדי (Dardi?) von Pisa. Ich habe vergeblich nach einem Autor dieses Namens herumgefragt; vielleicht ist der Namen anders zu lesen oder verstümmelt? Der hebr. Übersetzer dürfte Finzi sein?

9) Ms. Parma de Rossi 336[4] enthält: *Motus orbitae octavae ex Theorica decerptus et hebr. versus ab Angelo Finzi;* hier kann kaum von Purbachs *Theorica* (verf. 1460) die Rede sein, sondern nur von Gerard's von Sabionetta.

10) Von einem algebraischen Werke des Arabers abu Kamil Schudjâ ben Aslam (900—950) existiert wahrscheinlich eine latein. Übersetzung in ms. Paris 7377 A, und daraus (?) eine spanische oder italienische, aus welcher ich eine hebräische Bearbeitung unseres Finzi, betitelt *Tachbulot ha-Mispar* (Kunstgriffe oder Finessen der Zahl), ableite: ms. München 225, Paris 1029[7], und Bislichis vormals 37 (nicht in Zunz' Katalog). Ich gebe hier nur die wesentlichen Resultate noch unerledigter Untersuchungen (*Die hebr. Übersetz.*, S. 584—87).

11) Mein ms. 14 und das von Riccardi beschriebene (unter IV) enthalten als Anhang zu Jakob ben Machirs Übersetzung der Scheibe des Zarkali eine Anweisung Finzis zur Anfertigung der „allgemeinen Scheibe“, nach Mitteilungen des Bartolomeo degli Orologi (s. oben n. 5).

12) Ms. München 225 f. 17 ff. enthält ungefähr die Hälfte eines Kompendiums der Geometrie in 11 Kap., wahrscheinlich von Finzi übersetzt, dessen Noten angefügt sind, zusammen mit den Abhandlungen des Schudjâ (s. oben n. 10). Der Übersetzer und Ergänzer zitiert Campanus und Jordanus [Nemorarius]. Vorrede und Index gab ich in der 2. Aufl. meines Katal. der Münchener mss., S. 246. — Finzi erwähnt hier das J. 1473; im J. 1476 wird er als Verstorbener zitiert.

13) Von Finzi sind vielleicht (vor 1476) Noten zu den astronomischen Tafeln des Jakob Poël, ms. Bodl. 1483[3], Benzian 48.

1446 ff. Chronologische Tabellen nach dem 13jährigen Cyklus des NACHSCHON, ms. Leyden, Scal. 13[4] (Catal. p. 339).

Tabellen über Cyklus 274—286 (1447 ff.) enthält ms. München 343[13]; f. 221 dieses ms. wird etwas für das J. 1461 berechnet.

(1447) Astronomische und astrolog. Tabellen; dann 2 Tafeln, welche für 1447—1466 den christlichen Kalender mit dem muhammedanischen und jüdischen zusammenstellen, enthält ms. Paris 259[3].

1412—1447 unter dem letzten VISCONTI Filippo Maria in Mailand diente der Astrolog „HELIAS" = ELIA (MURATORI XX 1017, bei JAC. BURCKHARDT, *Die Kultur der Renaiss. in Ital.* 1877, II, 345).

1449 hat eine jüngere Hand eine chronolog. Notiz zu ms. Bodl. NEUB. 1106 eingetragen.

Um die Mitte des 15. Jahrhunderts verfaßte ein Anonymus eine hebr. Abhandl. über den Kalender, ms. Paris 1047, f. 139—46. — Das J. 1450 wird erwähnt in den anonymen Kalenderregeln in ms. Bodl. NEUB. 907[2].

Um diese Zeit lebten mehrere Übersetzer ins Hebräische: Der Arzt in Italien JEHUDA BEN SAMUEL SCHALOM, auch ASTRUC genannt, der die Logik des nachmaligen Papstes PETRUS HISPANUS den Juden zuführte und die Aphorismen des HIPPOKRATES erläuterte, übersetzte die *Theorica* des GERARD VON SABIONETTA, unter dem Titel *Ijjûn* ... (Betrachtung oder Theorie der 7 Planeten), ms. Bodl. NEUB. 2244, p. 1146 berichtigt, Brit. Mus. Add. 26921 und Paris 1051[2], zu unterscheiden von einer anonymen unvollständigen Übersetzung, welche dem in hebr. vokalisierten Buchstaben umschriebenen Texte in ms. München 249 gegenübersteht und wohl ebenfalls dem 15. Jahrhundert angehört (*Die hebr. Übersetz.*, S. 632, vgl. Register S. 1053).

1451—1460.

Um 1451—1460 lebte in Constantinopel SCHALOM (auch SALOMO) BEN JOSEF ANABI (arab. Namen), welcher eine bisher im Original noch nicht aufgefundene interessante Arithmetik des Persers KUSCHJAR B. LABBAN AL-DJILI (um 968) unter dem Titel *Ijjun ha-Ikkarim* (Theorie der Prinzipien) aus dem Arabischen übersetzte und kommentierte; ms. unicum Bodl. NEUB. 362[3] (*Die hebr. Übersetz.*, S. 566). SCHALOM begleitete auch physische Schriften des AVERROES mit Noten (das. S. 124, 150).

[1451. BARUCH BEN SALOMO B. JOAB ist Kopist, nicht Übersetzer der Rechenkunst des IBN AL-'HA'SSAR, s. *Die hebr. Übersetz.*, S. 552, wonach Biblioth. Mathem. 1899, S. 87 zu ergänzen ist; die Bedeutung des Namens ist noch nicht „erwiesen".]

Ein kulturgeschichtliches Kuriosum aus dieser Zeit (1451 notiert der

Kopist?) ist der christliche Kalender mit allen Tagesheiligen in hebr. Buchstaben, aus ms. Paris 1234 mit Umschreibung in latein. Buchstaben abgedruckt in *Hist. Litt. de la France* t. **31**, p. 766—770.

JEHUDA B. ELASAR, Verf. einer hebr. Abhandlung über ein neues Astrolab, ms. Luzzatto, dann Halberstam 129, jetzt Montefiore Coll., ist vielleicht identisch mit J. „de Sir" ELASAR, 1453 Besitzer von ms. München 263.

Dem Ritualwerke des JAKOB B. ASCHER (gest. um 1340) sind in ms. Bodl. NEUB. 700 Kalenderregeln hinzugefügt im J. 1454.

1457 beginnt ELIA BASCHIATSCHI (gest. in Constantinopel 1490) den Abschnitt über Astronomie und den eigentümlichen Kalender seiner Sekte der Karaiten in dem lehrreichen Werke: *Adderet Elijjahu* (Mantel Elijjas), gedruckt Constant. 1530/1 (höchst selten) und Kosloff 1839, worin eine Anleitung zum Studium der Wissenschaften auch die klassischen Werke der Griechen und Araber erwähnt. Das unvollendete Werk und insbesondere obigen Abschnitt ergänzte KALEB AFENDOPOLO; s. unten, S. 70. ELIA kennt die Tafeln des OLUG BEG (Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. **9**, 1899, 475).

Der durch eine Kompilation über die Kalamitäten der Juden weltbekannte JEHUDA VERGA, als Mathematiker kaum genannt, verfafste:

1) (1457 in Lissabon) ein astronomisches Kompendium, beginnend mit den Worten (Genes. 24): „Dieses Buch der Entstehung von Himmel und Erde, als sie geschaffen wurden", ms. Bodl. NEUB. 2309, Brit. Mus. Add. 27. 107, Paris 1005[14], Vatican 387[1]. Verf. zitiert ZARKALI.

2) Über ein von JEHUDA erfundenes Instrument, genannt das horizontale (auf den Horizont bezügliche), ms. Brit. Mus. Add. 27107, Paris 1005[12], 1031[9]; über die Bezeichnung *Risala* (= Canon), s. *Die hebr. Übersetz.*, S. 384.

3) Über Messung von Höhen (mit dem obigen Instrument?), ms. Paris 1005[13].

4) Commentar zur hebr. Übersetzung des AL-FERGANI, ms. Bodl. NEUB. 2013[4], Paris 1090[2].

5) Compendium der Arithmetik, mss. Brit. Mus., s. n. 1, Paris 1005[11], 1087. — S. die Zitate in *Hebr. Übersetz.*, S. 557.

1460 übersetzte MOSES BEN ABRAHAM aus Nîmes (daher hebr. *Jaari* = Silvaticus) auf den Wunsch des maestro CRESCAS NATAN BEN DON ISAK in Avignon aus dem Lateinischen die Tafeln ALFONS X. mit dem Kommentar des JOHANNES „DANICORO" (vulgo JO. DANCK oder DE SAXONIA) und den Tafeln des (wenig bekannten) JOH. DE SANCT ARCHANGEL. Die *Canones* des ersteren, welche MONTUCLA für unediert hielt, haben hier

das richtige Datum 1326/7. Mss. sind selten, ich kenne nur München 126, Vat. 381², 382 (bloſs Tafeln mit Komm.). Näheres in *Die hebr. Übersetz.*, S. 618—24.

1460 ist notiert am Rande eines anonymen Anhangs zu dem etwas älteren Ritualwerk des JAKOB LEVI (in Deutschland) in ms. Benzian 13, jetzt Merzbacher in München 56.

1461—1470.

Astronomische und chronologische Tabellen für 1461—1540 enthält ms. Paris 263².

Um diese Zeit etwa (1461—1480) lebte in Constantinopel und Adrianopel ein sehr angesehener und fruchtbarer Gelehrter, MORDECHAI COMTINO BEN ELIESER, der allerdings schon 1425 als Schriftsteller aufgetreten sein dürfte. Leben und Schriften desselben hat J. GURLAND in einer russischen Dissertation (Petersburg 1866) behandelt, worin der Namen in „*CUMATIANO*" verstümmelt wird. Ich verstehe nicht russisch und kann nur die Auszüge aus zehn Schriften COMTINOS benutzen, welche auch besonders ediert sind als „*Ginse* St. Petersburg" mit deutschem Titel: „*Neue Denkmäler der jüdischen Literatur, Heft 3*" (1866). Eine Würdigung des Mathematikers COMTINO bleibt jedenfalls noch ein Desideratum. Ich muſs hier hervorheben, daſs COMTINO, wohl zunächst als Lehrer der Mathematik, eine Annäherung der Sekte der Karaiten bewirkte, welche so weit ging, daſs sie einen Hymnus mit seinem Akrostichon (abgedruckt bei GURLAND III, 13) in ihr gedrucktes Gebetbuch aufnahmen[1]); wir finden unter den Karaiten der Türkei in der nächsten Zeit das Studium der Mathematik gefördert und durch Schriften vertreten; COMTINO widmet seinem Schüler unter ihnen, JOSEF RACHIZI (sprich RAKHI'SI?) seinen Kommentar über das Buch *Jesod Mora* von ABRAHAM IBN ESRA (*Die hebr. Übersetz.*, S. 366); ein solcher über ABRAHAMS „Buch des Namens" ist für den Rabbaniten MENACHEM [TAMAR] verfaſst (1463); beide Texte bieten mathematische, mehrfach erklärte Stellen (s. mein *ABRAHAM IBN ESRA*, S. 95). In seiner Vorrede zum Pentateuchkommentar (1464, GURLAND III, 7) bezeichnet er als seine Hilfswissenschaften: Grammatik, Logik, Physik, Sternkunde, Zahlkunde, Geometrie, Metaphysik, von seinen Vorgängern werde er nur „das Haupt", IBN ESRA berücksichtigen, ihm aber nicht unbedingt folgen. Hiermit ist seine allgemeine Wissenschaftlichkeit gekennzeichnet. Von seinen Schriften ist nur der Kommentar zur logischen Terminologie des

1) S. L. LANDSHUTH, *Onomasticon*, S. 200. Vgl. auch Abhandl. zur Gesch. der Mathem. 9, 1899, 37.

Maimonides erst in Warschau 1865 gedruckt; die direkt hierher gehörenden sind (spezielle Zeitangaben fehlen meistens):

1) Kommentar über die Tafeln „der persischen Weisen“, oder „des Jezdedjerd“, das sind die von Salomo b. Elia Scharbit ha-Sahab (um 1374) bearbeiteten, ms. Paris 1084, 1085, mit dem Datum 1425 in der Vorr.; ein Fragm. über den Ort des sog. Drachen, vielleicht im ms. Petersburg, Firkowitz 545.

2) Ein mathematisches Werk ohne Titel in 2 Teilen: 1. Arithmetik, 2. Geometrie (über deren Verhältnis zu einander auf Nikomachus Gerasenus verwiesen wird) nach der kurzen Methode der Christen; für π wird $3^1/_7$ oder $3^8/_{61}$ angegeben; ms. Berlin 49, Brit. Mus. 27107, A. Lehren in Amst., Paris 1031^5, Petersburg, Firkowitz 343.

3) Glossen zu Euklid, ms. 340^5 des Baron David de Günzburg in Petersburg.

4) Comtino hatte seine astronomische Scheibe (*'Safi'ha*, nach Zarkali) dem Seraskir geschenkt, und da er kein anderes Exemplar auftreiben konnte, so verfafste er, auf die Bitte seines Schülers Menachem [Tamar?], eine Abhandlung über die Anfertigung dieses Instruments (10. Dez. 1462), ms. München 36^{13}, Paris 1030^5, Petersburg, Firkowitz 353.

5) Über die Anfertigung *(Tikkun)* des „Messinginstruments“ (Astrolab), welches für das Studium des *Almagest* unentbehrlich sei, und über dessen Konstruktion Abraham ibn Esra geschrieben, wie Jakob ben Machir einen entsprechenden Quadranten erfunden habe (Vorw. bei Gurland III, 3), ms. Paris 1053^2, 1085^3, 1095^4, Petersburg, Firkowitz 361.

6) Über die Anfertigung *(Tikkun)* des Instruments der Stunden, welches auf zweierlei Weise zu konstruieren ist, entweder mit dem Viertelkreis (Quadranten) oder mit dem umgekehrten Schatten, als Anhang zu n. 5 in ms. Petersburg (s. Gurland III, 5 u. S. 15 das Zitat des Schülers Kaleb vom J. 1478 nach dem Tode Comtinos).

Ms. 365 des Baron D. de Günzburg enthält einen „Brief“ (oder: kurze Abhandlung) des Mordechai Natan, gerichtet an seinen Onkel Don Boniac Astruc Nasi über einen schon von Immanuel ben Jakob (1336) und vor 80 Jahren von seinem eigenen Grofsvater Mordechai berichtigten Irrtum in Bezug auf das J. 1463. Unser Mordechai war von seinen Brüdern Crescas Natan und Bongoes (= Bongodes, d. i. Jehuda) aufgefordert worden, eine (astronomische) Tafel nach dem Muster einer von seinem homonymen Grofsvater hinterlassenen anzufertigen, zu welcher er am Rande die zweifelhaften Stellen erläutert hatte, auch zum Buche *ha-Eser* (die Hülfe), dessen Verf., wie alle anderen, nur die Tafeln des Abraham bar Chijja (12. Jahrh.) benutzte und erweiterte. Neubauer

Hist. Litt. de la France, t. **31**, p. 581) giebt keinen Aufschlufs über das angeführte Buch, aber p. 349, wo von „Eben ha-Eser" in ms. München 343[29] die Rede ist, verweist er auf Mordechai. Sollte etwa das zitierte Buch die nicht mehr existierende Schutzschrift des Meir ben Isak aus Trinquetailles (1140—1210) sein (*Hist. Litt.*, t. **27**, p. 515; Gross, *Gallia Jud.* p. 246), das also auch Tafeln enthalten hätte? Eine andere hier passende Schrift wüfste ich nicht heranzubringen.

Die Gelehrtenfamilie Natan gehörte der Provence an; Gross identifiziert also wohl mit Recht unseren Mordechai mit dem Arzte M. Todros Natan in Avignon, für welchen 1454 und 1456 Handschriften kopiert wurden, und der eine Synopsis des I. Buches des Kanon von Avicenna verfafste (*Die hebr. Übersetz.*, S. 685; Gross, *Gallia Jud.*, p. 10).

Ms. München 261[12] enthält genaue Berechnungen der Finsternisse 1464—74 von dem sonst unbekannten Abraham Conti, der auch frühere berechnet zu haben scheint.

Die Konstellation des J. 1464 (und 1467) setzte auch die Federn hebräischer Schriftsteller in Bewegung. Ein gewisser Isak in Florenz bringt in seinen handschr. Predigten (bei Zunz, *Ges. Schriften* III, 95) Mars und Jupiter mit dem Einsturz von Kirchen durch Erdbeben in Verbindung.

Mit grofser nationaler Hoffnung sieht auf die grofse Konjunktion von Saturn und Jupiter David Giaco oder David ben Jakob ben Maestro Meir Kalonymos, der wahrscheinlich ein Amt, vielleicht das eines Astrologen, bei Ferdinand I. von Neapel bekleidete. In einer an denselben gerichteten gröfseren Abhandlung (1464), überschrieben *Horaat ha-Dibbuk* (Bedeutung der Konstellation), ms. Bodl. Neub. 2244[7] und Vat. 105, sucht er, mit Berufung auf die astrologischen Autoritäten der Griechen, Araber und Juden, zu beweisen, dafs die Konjunktion die Erlösung der Juden und eine günstige Zukunft für Ferdinand bedeute. Der gröfseren Abhandlung schliefst sich eine kleinere mit derselben Tendenz an.

Im J. 1466 übersetzte David Kalonymos ben maestro Jakob etc. (wo also Kalonymos als Familiennamen gebraucht ist), wahrscheinlich aus dem Lateinischen, eine Beschreibung eines astronomischen Instruments u. d. T. *Mar'ot ha-Kochabim* (Aspekte der Sterne), ms. Paris 1051[7], wo der Namen des Verfassers „in Wien 1417" verstümmelt ist, wahrscheinlich aus Johann Schindel aus Gmund „in Niederdeutschland", ein nicht zu verachtendes Zeugnis für die Vaterstadt in Schwaben. Schindel ist nach Curtze (Biblioth. Mathem. 1896, S. 1) Namen des Vaters; das übersetzte Werk ist wohl: *de quadrante horario*, ms. Wien 5418. Eine anonyme Übersetzung des Sternkatalogs von „magister Schindel, Arzt in Nürnberg, verfafst 1437" in ms. Paris 903[4], dürfte dem latein. ms. Wien

5412[3] entsprechen (*Die hebr. Übersetzungen*, S. XXX zu 636); es liegt kein besonderer Grund vor, auch diese Übersetzung unserm Astrologen David beizulegen, der übrigens eine noch nicht analysierte Abhandlung (mein ms. 1) über Averroes' Streitschrift gegen al-Gazzali vielleicht im J. 1484 verfafste (vgl. *Catal. Bodl.*, p. 1575, die Jahrzahl ist verblafst), also auch philosophisch gebildet war.

Ein fleifsiger Schriftsteller (1465—1481?) war Moses Farissol (nicht „Ferussol") Botarel in Avignon, Schüler des oben S. 62 genannten Moses ben Abraham. Er verfafste:

1) Einen Kommentar zu den Pariser Tafeln (Radix 1368) und denen des Levi ben Gerson, zusammengefafst in 15 Kapiteln, ms. Bodl. Neub. 2022 (wo irrtümlich über Tafeln des Alfons, daher bei Gross, *Gallia Jud.*, p. 11, ebenso unrichtig über Immanuel b. Jakob in *Hist. Litt. de la France* t. **31**, p. 781, eine Konfusion mit dem hier folg. n. 2), auch ms. in Tunis; Radix ist 1465 (*Die hebr. Übersetz.*, S. 648, so lies im Index, S. 1061).

2) Canones zu den Tafeln des Immanuel ben Jakob in dessen *Erech ha-Chilluf*, ms. München 31[8] a. 1465 (anonym).

3) *Melechet ha-Kibbua* (Kunst der Fesstellung über Kalenderberechnung) auf Verlangen des Jakob Leon de Cavaillon, ms. München 249, Autograph 1464/5.

4) *Nofet Zufim* (Honigseim, zugleich eine Anspielung auf eine Abbreviatur seines Namens), Tabellen über Konjunktion und Opposition von Sonne und Mond, ms. München 343[10], worin unter anderem bemerkt wird, dafs man die Sonnenfinsternis vom J. 1478 irrtümlich für eine totale ausgegeben habe; die Radix ist 29. März 1481 in Avignon.

Zu einer Identifikation unseres Autors mit dem Phantasten Moses Botarel, dessen Brief 1360 datiert ist (*Hist. Litt.*, l. c.), liegt kein Grund vor, da es auch einen Moses Botarel 1409 gab.[1])

Ein anonymes ms. über Chronologie *(Ibronot)* vom J. 1465 besafs der gelehrte Buchhändler R. N. Rabinowitz vor vielen Jahren.

1466 sind kurze Regeln *(Kelalim)* über Feststellung der Quatember in ms. Paris 1089 geschrieben.

Aus demselben Jahre stammt eine Tabelle der 28 Mondstationen *(Luach* etc.*)* nach dem Meridian von Padua, ms. Vat. 387 (Assemani macht aus Meridian einen Kopisten „Ferdiano"! *Die hebr. Übersetz.*, S. 642), als Quelle wird Johannes de Monteregio (Regiomontanus) angegeben.

1) Ein undatierter Brief an die „Gemeinden Aragons" in ms. Bodl. Neub. 1984, p. 276, beweist nicht den Aufenthalt in Spanien. Das Jahr 1425 in ms. Paris 1098 ist sicher falsch.

Ein gleiches Verzeichnis in ms. Leyden Scal. 14[7] (*Catal.*, p. 372) vom J. 1466 giebt diesen Namen nicht an, die arabischen Wörter scheinen direkt aus arabischer Quelle kopiert, die astrologische Anwendung ist hinzugefügt. REGIOMONTANUS selbst habe ich nicht verglichen. Zum Gegenstande vgl. Biblioth. Mathem. 1898, S. 5.

Ms. Bodl. URI 365 ist von NEUB. 1267[15] nicht ganz genau beschrieben; das Stück, an dessen Ende die Erlösung Israels im J. 1467 astrologisch berechnet wird, beginnt f. 173[b] und knüpft an die 7 Wochen zwischen Ostern und Pfingsten. Zu ms. Vat. 105 giebt ASSEMANI zwei, wahrscheinlich fabrizierte hebr. Titel: „Über den Kometen", und „Über die Konjunction von Saturn und Jupiter" [im J. 1464?, vgl. oben unter diesem J.]. In der That ist es eine astrologische Abhandlung, deren Verf. (?) ISAK BEN MEIR BEN ISAK genannt DIEULOSAL, also wohl ein Provençale, der, mit Berufung auf MASCHALLAH, die Erlösung Israels im J. 1467 verkündete (s. meine Miscelle in BRÜLLS Jahrbücher für jüd. Gesch. IX, Frankf. a. M. 1889, S. 89—91, und oben 1464).[1])

1471—1480.

[1470—1489 blühte JOCHANAN ALEMANNO, Lehrer des JO. PICO DE LA MIRANDOLA, der alle möglichen Schriften, insbesondere mystische, zu einem nur auszüglich edierten Kommentar zum Hohenliede exzerpierte; aber das ihm beigelegte *Peri Megadim* bei BENJACOB, *Thesaurus*, S. 495, n. 1116, ist ein Kommentar zum *Centiloquium* des PTOLEMÄUS und bildete den 4. Teil eines vielleicht gar nicht ausgeführten Werkes des Italieners ABRAHAM JAGEL um 1580.]

Der Arzt JEHUDA BEN JECHIEL, genannt „Messer LEON" in Mantua bis 1475, ist durch Schriften über Grammatik, Rhetorik und Philosophie, nicht über Mathematik bekannt; sein Sohn erwähnt ein Werk: „Vier Tractate", welches auf das astrologische *Quadripartitum* des PTOLEMÄUS bezogen werden könnte, wenn er identisch wäre mit „Maestro LEON", dessen Kommentar (?) zu einigen astrologischen Schriften des ABRAHAM IBN ESRA in ms. Paris 1048[5], vom Katalog dem LEVI BEN GERSON, von GURLAND (zu ms. Petersburg, Firkowitz 540—3, Beschr. II, S. 30) unserem „Messer LEON" beigelegt wird, beide Konjekturen unwahrscheinlich; s. den Art. „*Leon*" in ERSCH und GRUBER, S. 121/2, n. 19 u. 20 (vgl. *Die hebr. Übersetz.*, S. 77); die Arithmetik in 2 mss. in Paris, s. oben unter JEH. VERGA, S. 62.

1) 1464 als Erlösungsjahr hat auch ISAK ABRAVANEL zu Jes. 65, 17; Maajne XII, 2, n. 6, f. 57 ed. Stettin, Maschmia, f. 30 ed. Stettin fehlt die Jahreszahl; — 1467 der Zerstörung = 1532 Maajne ib. n. 2 Ende, f. 54.

1472 eine neue Redaktion der anonymen arabischen chronologischen Abhandlung vom J. 1329, ms. Berlin 89, s. Biblioth. Mathem. 1898, S. 6.

1473 Abschnitte eines Anonymus über Neumonde enthält ms. Rabinowitz (1884) n. 101.

Ein Kuriosum sind die Reime über den Kalender, welche ABRAHAM BEN JAKOB im Gefängnis verfafste, ms. Paris 1088 (ZUNZ, Nachtrag zur *Liter.*, S. 16).

Im Frühling 1477 schrieb BENJAMIN BEN IMMANUEL DE NORZI für seinen Cousin DAVID B. JOAB FINZI aus Arezzo(?) ms. Bodl. 2183, nach Mitteilung NEUBAUERS vom Februar 1894 auch die anonymen chronologischen Partien, f. 78—105, welche hier am terminus ad quem ihren Platz haben. Im *Catalog Michael* 353 führt diese Partie den Titel *Seder la'asot Luach* (Anordnung der Kalenderanfertigung, falsch *Sod*, Geheimnis, im Index, S. 358, daher BENJACOB, *Thes.* S. 417, n. 249).

Einen selbständigen Artikel verdiente ABRAHAM SAKUT oder ZACUTO, der in jüdischen Quellen fast nur durch seine literaturgeschichtliche Chronik (*Juchasin*, in 2 Rezensionen gedruckt) bekannt ist. Er war Lehrer der Astronomie in Salamanca.[1]) Nach der Vertreibung der Juden aus Spanien (1492) wurde er Astronom des Königs EMANUEL von Portugal (wie es auf dem Titel des Almanach heifst), nach der Vertreibung aus Portugal (1497) begab er sich mit seinem Sohne SAMUEL nach Afrika, wo beide zweimal gefangen wurden (*Chronik* ed. London, f. 223) und in Tunis sich niederliefsen; im J. 1515 scheint ABRAHAM in Osteuropa noch gelebt zu haben.[2])

Von allgemeinem Interesse ist die Beziehnng ABRAHAMS zu COLUMBUS, dargestellt bei KAYSERLING, *CHR. COLUMBUS und der Antheil der Juden an den spanischen und portugiesischen Entdeckungen* (Berlin 1894), S. 40 ff.; vgl. dazu die Quellenzitate zu ms. München 109 in der 2. Ausg. meines *Katalogs*, auch für alles Nachfolgende. Man kennt nur eine einzige mathematische Schrift ABRAHAMS (nicht zwei, wie GRÄTZ, *Gesch. d. Juden* VIII, 386, vgl. 379), nämlich astronomische Tafeln, berechnet nach 4 Graden mit vorangehenden Canones und einer Vorrede (ediert in Pinskers *Catalog*), wahrscheinlich ohne besonderen Titel, erhalten in mss. Lyon 11, München 109, Pinsker 20 (jetzt Bet ha-Midrasch in Wien), verfafst 1478 mit der Radix 1473; das hebr. Werk ist das Original einer lateinischen Über-

---

1) In der Widmung des Almanach (KAYSERLING, *Columbus*, S. 41): „Salamantini collegii alumnum me quantumcumque adesse voluisti, doctorum videlicet quadruuiales facultates".

2) CHAJJIM VITAL, *Sefer ha-Techuna*, Jerus. 1866, f. 49, zitiert eine Tabelle ZACUTS für Jerusalem, die ich jetzt im latein. Almanach nicht aufsuchen kann.

setzung des Schülers JOSEF VICINIUS (VECINHO oder VEZINO)[1]), welcher wahrscheinlich identisch ist mit dem Juden JOSEF, Mitarbeiter der Schiffskarten für König JOAO. Diese Übersetzung, mit einer Widmung an den Bischof von Salamanca, erschien u. d. T. *Almanach perpetuus* zuerst in Leiria 1496 und noch viermal in kurzer Zeit.[2]) Demselben VEZINO wird auch eine spanische Übersetzung aus dem Lateinischen beigelegt, wovon ein Exemplar mit Noten des COLUMBUS sich erhalten hat; Teile davon in hebräischen Lettern entdeckte ich in einem Druck von Salonichi 1568 in der SARAVALschen Sammlung. Hiernach ist Verschiedenes bei GRAETZ l. c., S. 379 und KAYSERLING l. c. zu berichtigen. Vgl. auch Biblioth. Mathem. 1899, S. 39; Hebr. Bibliogr. VII, 23 (nicht zitiert zu ms. Bodl. NEUB. 2080).

1481—1490.

SAADIA BEN DAVID AL-ADENI, noch 1451 in seiner Vaterstadt Aden in Jemen, 1478 in Damaskus, 1485 in Zafat (Palästina), der Verschiedenes in arabischer Sprache verfaßte oder in hebräischer Schrift kopierte, darunter ein philosophisches Werk des GAZZALI mit neuem Titel sich aneignete, fügte auch zu ms. Bodl. NEUB. 1632 zwei astronomische Tabellen mit entsprechenden Reimen.

SABBATAI BEN OBADJA (in Südeuropa?) legte einen Kalender für die Jahre 1485—1598 an, ms. Paris 1095[3].

JEREMIAS KOHEN in Palermo, dessen Abhandlung über einen Stundenzeiger, vielleicht eine Art Sonnenuhr, wovon 2 Abbildungen in ms. Vat. 379[6], ist von ASSEMANI ohne Grund mit COSTA BEN LUCAS Übersetzung der *Sphaerica* des THEODOSIUS in Verbindung gebracht (*Die hebr. Übersetz.*, S. 542). Die Zeit des Verf. ist durch das Datum 1486 nach unten begrenzt; das ms. ist für MOSES B. SALOMO WASCHFUN kopiert; über den gelehrten Kopisten soll hier gleich das Erforderliche folgen.

SCHALOM BEN SALOMO u. s. w., von einem Ahn aus Jerusalem stammend, hat in Syrakus 1482—1487 verschiedene, teils mathematische Schriften in dem eben erwähnten ms. Vat. 379 kopiert und mit sachkundigen Noten begleitet, darunter nach ASSEMANI eine „Tafel der Schatten" (*Luach ha-Zelalim*) für die Jahre 1483—1530 aus den Ephemeriden des „JOH. NEGROMONTE" (!); voran geht eine Belehrung über die Konstruktion eines

1) Zum Namen vgl. JOSEF DE VOISIN, ms. Paris 1287; ABRAHAM VICENO (?), Jew. Quart. Rev. XI, 278, 288, n. 9.

2) HOUZEAU, *Bibliogr. astronom.* I, 485 verzeichnet nur ein ms. in Paris ohne Nummer: *Tractatus de stellarum motu et ordine; item de anni cardinibus e variis auctorum hebr. scriptis collectus* (vgl. die Einleitung des Almanach). — Die *Nouvelle Biographie générale* t. 46, 1866, unter ZACUT, giebt als wahrscheinlich identisch: *Tabulae motuum coelest.* Ven. 1496; *Almanach*, Leiria 1496, Ven. 1499; 1502; 1572.

Sonnenquadranten (?). Das ms. bedarf der Untersuchung eines Fachmannes; ich habe den hebräischen Mitteilungen Assemanis entnommen, dafs Schalom am Vorabend des Neujahrs 259 (Herbst 1498) in Modon die Finsternisse jener Jahre aus dem „*Kalender*“ des „Joh. de Monte“ (fehlt „Regio“) ausgezogen habe. Von Schalom soll auch eine Schrift „*Ohole Kedar*“ (Zelte Kedar), über den Kalender der Juden in Arabien, existiert haben, welche verloren scheint (*Die hebr. Übersetz.*, S. 642).

Moses ben Jacob, „der Russe“, der aus Mankerman (?) in der Krim bis nach Luzk in Polen vor 1487 gewandert war und noch 1515 lebte, spricht in seinem gedruckten, kabbalistischen Werke *Schoschan Sodot* (f. 44) von dem Zusammentreffen des grofsen und kleinen Cyklus in 532 (= 19 $\times$ 28) Jahren, indem er auf seine Schrift (über Chronologie?) verweist, deren Titel nach ms. Bodl. Neub. 1656 *Jesod ha-Ibbur*, die jedoch verloren gegangen ist (s. die Zitate in Hebr. Bibliogr. XX, 97 n. 6 und S. 122).

Kaleb Afendopolo (oder Efendopulo) ben Elia ist der letzte bedeutende Schriftsteller der Sekte der Karaiten, von umfassender Gelehrsamkeit und besonders Mathematiker. Von den 20 in meinem Art. „*Kaleb*“ in Ersch und Gruber (II. Bd. 32) aufgezählten Schriften sind n. 5—7, 10, 12, 18 und vielleicht 8 mathematisch, also mit 3 hier nachgetragenen zusammen 10. — Kaleb ist wahrscheinlich 1453 geboren und die letzte Spur seines Lebens reicht nur bis 1499; er lebte also kein halbes Jahrhundert, u. zw. in Konstantinopel, ein Schüler Comtinos und seines eigenen Schwagers, des oben S. 62 besprochenen Elia Baschiatschi (s. n. 7). Eine chronologische Grundlage für die Reihenfolge der Schriften fehlt; ich behalte also die alphabetische der Titel auch hier bei.

1) *Iggeret ha-mesappeket* (genügende Abhandlung), astronomische Terminologie, ms. Paris 1090[4].

2) „*Arithmetica*“, zitiert in den Homilien, ist höchst wahrscheinlich der Kommentar über Nikomachus, der erst kürzlich aufgetaucht, anderweitig geschildert ist; unicum ms. Berlin 226 (s. die Zitate in meinem Verzeichnis, Abt. 2, S. 77).

3) *Gal Enaj* (Psalm 119, 18), in n. 1 zitiert ohne sicheren Inhalt, wohl dem Zitate nach verwandt mit n. 1.

4) *Gan ha-Melech* (Garten des Königs), ein grofses in der Jugend verfafstes astronomisches Werk, zitiert in n. 2, vielleicht das grofse Werk, welches im J. 1660 in Lyck verbrannte? Unter demselben Titel hat sich ein Divan erhalten, vielleicht durch Verwechslung?

5) *Kelè Roba ha-Schaöt*, auch mit vorgesetztem: „*Tikkun*“, Anweisung (zur Anfertigung) des Instruments für alle Arten von Stunden (Stundenquadrant oder Sonnenuhr), wie schon der verstorbene Lehrer Comtino

ein solches, aber nur für die gleichen, nicht für die ungleichen, konstruiert hatte; ms. Petersb. Firkowitz 714 ist beendet Anf. d. J. 1487.

6) *Michlal Jofi* (Ausbund der Schönheit), über Astronomie, teils die Schriften des MAIMONIDES und Anderer erläuternd, ms. Bodl. NEUB. 2054 und Pinsker 2[4] (so), jetzt im Bet ha-Midrasch in Wien.

7) Sein *Supplement* zu ELIA BASCHIATSCHIS Werk (1497) blieb angeblich durch den eigenen Tod unvollendet.

8) Kommentar über EUKLID.

9) Kommentar über PTOLEMÄUS' *Almagest* wird als Vorhaben erwähnt in n. 2.

10) Kommentar zum „mittleren *Almagest*“ des DJABIR B. AFLAH, den er als Jugendstudium bezeichnet, hatte er 1499 jedenfalls schon verfafst; wir besitzen aber nur seine Abschrift der hebr. Übersetzung des SAMUEL B. JEHUDA in ms. Paris 1024 vom J. 1482, wie manche andre seiner Copien aus verschiedenen Gebieten der Wissenschaft; andre Mss. sind für ihn angefertigt worden.

JOSEF BEN SCHEMTOB BEN JESCHUA (wahrscheinlich in der Türkei) verfafste Reime über den Kalender der Juden, Muhammedaner und Christen und dazu einen Commentar mit Tabellen, worin das J. 1489 vorkommt. Das Werk erschien mit verschiedenen Beigaben u. d. T. *Sche'érit Josef* (Rest Josefs) in Salonichi 1527, 4°, von welcher Ausg. nur ein defektes Exemplar der Bodl. bekannt ist (Katal. p. 1527, weitläufig beschrieben), so dafs schon 1568 eine zweite Ausg. mit erweitertem Kommentar von DANIEL BEN PERACHA in Salonichi erscheinen konnte (vgl. oben über SACUTS Tafeln in dieser Ausg.).

Im Herbst 1489 ist beendet eine, anfangs defekte, daher anonyme astronomisch-chronologische Abhandlung mit verschiedenen Tabellen, u. a. eine chronologische von Noah bis Muhammed; ms. Petersb. Firkowitz 363 (GURLAND, Kurze Beschr. II, 21, ungenau 1490).

Ms. Paris 1078 enthält die „Sechsflügel“ des IMMANUEL BEN JACOB, mit einer Fortsetzung der Tabellen vom J. 1408—1480 vom Schreiber USIEL mit dem Titel *Ammule Sechel* (Säulen des Intellekts); in den Buchstaben des letzten Wortes liegt ohne Zweifel eine Anspielung auf den obigen Titel (Jes. 6, 2).

1491—1500.

1491 oder kurz vorher kompilierte ISAK BEN ELIA KOHEN in Syrakus eine Tabelle *(Luach)* der Konjunktionen nnd Oppositionen (von Sonne und Mond?), ms. Paris 1069[4] (wo er vielleicht auch anderes kopiert hat?) und ms. Brit. Mus. Or. 2806; vgl. *Die hebr. Übersetz.*, S. 320, wo ein gleichnamiger Korrespondent des MARCO LIPOMANNO; er fehlt unter den Lit-

teraten Siciliens bei Zunz, *Zur Gesch.*, S. 517; ist er identisch mit Elia n. s. w. unten im Anhang?

[Isak „Papat“ in Creta, den Wolf, *Bibl. Hebr.* I, p. 688 n. 1261, als mathematischen Autor angiebt, ist nur der Kopist Isak Papano oder Pipino von ms. Vatican 171[35, 36, 40]; s. Il Mosé, Jahrg. 1882, p. 270.]

Ein Mathematiker Moses war Mitglied des Kongresses unter João II. von Portugal (M. Kayserling, *Gesch. d. Juden in Span.* u. s. w. II, 86, vgl. oben S. 68).

Isak Loanz ben Jechiel, der eine Anweisung zur Anfertigung *(Echut Asijjat)* der Scheibe des Zarkali verfaſste, ms. Rabinowitz n. 106, dessen gröſster Teil jetzt ms. Bodl. Neub. 2582 (Stück [6]), ist wohl identisch mit dem Schreiber von ms. Horowitz 139 Ende 1493, also in meinem *Die hebr. Übersetz.*, S. 593, nachzutragen.

Abba Mari Chalfan in Unteritalien verfaſste vor 1494 eine Notiz (3 Bl.) über die Gründe der Canones *(Ta'ame ha-Mizwot!)* der Tafeln Alfons X., ms. Neapel III, F. 12, und Parma, de Rossi 336 (*Die hebr. Übersetz.*, S. 625, 641).

Jacob b. Immanuel, bekannt unter dem Namen Bonet de Latas (Lattes), Provincialis, später Rabbiner und Leibarzt Papst Alexanders VI., widmete diesem seine Erfindung eines astronomischen Ringes: *Annuli astronomici per eum compositi super astrologiam utilitas*, Romae 1493, wovon noch folgende Ausgaben angegeben werden, die ich nicht kontrollieren kann: Paris 1507, 1521, 1527, 1531, Marburg 1537, 1557. 2) Er verfaſste auch ein „Prognosticum“, Rom 1498, gewidmet den Cardinälen Valentiniani und Borgia; s. Vogelstein *und* Rieger, *Gesch. d. Juden in Rom*, II, 81; vgl. Monatsschr. für Gesch. u. Wissensch. d. Judenth. 1898, S. 260; 1899, S. 259.

Isak abu'l-Kheir ben Samuel, spanischer Exulant, 1) kommentierte im J. 1496 bis 1. Dezember die hebräische Übersetzung des astronomischen Compendiums des Arabers al-Fergani (vulgo Alfraganus), dessen Vorzüge er hervorhebt, mss. Berlin (Lehranst. f. Wiss. d. Judenth., früher Geiger n. 1), Bodl. Neub. 2015 (vorm. Oppenh.?); *Die hebr. Übersetz.*, S. 557. Isak scheint wenigstens teilweise den Komm. des Moses Chandali wörtlich benutzt zu haben (Biblioth. Mathem. 1899, S. 7 u. 98, Z. 9, wo lies: *XIV.* Jahrh.).

2) Isak übersetzte 1498 aus dem Lateinischen die Nativitäten *(Moledot)* des Albubater — der arabische Autor, wohl abu Bekr, ist noch nicht nachgewiesen — mss. Paris 1033, 1091; Isaks Name ist korrumpiert „abu 'l-Bir“; s. *Die hebr. Übersetz.*, S. 546.

3) Er übersetzte aus der lateinischen Übersetzung des Abenragel (ibn Ridjal), welche aus der spanischen des Jehuda ben Moses Kohen

(1256) geflossen, das astrologische Werk genannt: „*Completus*", ms. Bodl. NEUB. 2029, obwohl dieselbe Schrift bereits von SALOMO DAVIN im XIV. Jahrhundert übersetzt war; eine dritte Übersetzung eines Anonymus in ms. Vat. 382 ist wegen Verblassung nicht näher bestimmt, wird aber wohl auch alt sein; *Die hebr. Übersetz.*, S. 580.

1497. [ELIA B. ISAK ist nicht Autor, s. Anhang.]

MOSES SAHLUN BEN ABRAHAM aus Ciudad, welcher philosophische Schriften in ms. Paris 959 (so) zu Constantinopel kopierte, verfaſste:

1) Eine Abhandlung *(Ma'amar)* über Sonnen- und Mondfinsternisse, ms. Bodl. NEUB. 2518[6] (ohne Datum).

2) Erklärung *(Perusch)* des Instruments (genannt) Astrolab, ms. Paris 1030[7]. — Die Identität der Person war nicht zu bezweifeln *(Die hebr. Übersetz.*, S. 649).

ELIA SCHUBSCHI, auch ELIA GIBBOR BEN JEHUDA genannt, von der Sekte der Karaiten, verfaſste im 17. Lebensjahre (1500) einen Kommentar *(Perusch)* über die Sechsflügel des IMMANUEL BEN JAKOB, ms. Fischl, über dessen Verbleib mir nichts bekannt ist.

Anhang.

Ich stelle hier noch einige Autoren und anonyme Schriften zusammen, welche sicher oder wahrscheinlich dem Mittelalter, die meisten wahrscheinlich dem XV. Jahrh. angehören, ohne daſs mir ein genaueres Datum bekannt wäre; einige reichen auch in das XVI. Jahrhundert hinein, sind aber im IX. Heft der Abhandl. zur Gesch. der Mathematik nicht genannt.

EFRAIM MISRACHI übersetzte für SALOMO CAVALIERO (oder CAVALLERO) wahrscheinlich in der Türkei am Anf. des XVI. Jahrh. die *Theorica* des G. PURBACH mit dem hebr. Nebentitel *Mahalach ha-Kochabim* (Lauf der Sterne), ms. Bodl. NEUB. 2553, Halberstam (jetzt Montefiore Coll.) 134, ein ms. vormals in Meseritz, ist jetzt in Warschau; *Die hebr. Übersetz.*, S. 639.

ELIA ALFADJI (oder Alpagi?), vielleicht identisch mit dem noch 1518 in Constantinopel lebenden ELIA A. BEN DAVID HA-LEVI, wird als Verfasser einer Schrift *(Michlab Elijjahu)* über Astrologie oder Astronomie genannt (Hebr. Bibliogr. XIX, 114, vgl. BENJACOB, *Thes.*, S. 468 n. 400).

ISAK ARAMA, Spanier in der Türkei, wo zuerst seine beliebten, teilweise verschiedene wissenschaftliche Gegenstände erörternden Homilien *(Akedat Jizchak*, Opferung Isaks) 1522 erschienen, widmet das 37. Kap. dem Monde (*Cat. Bodl.* p. 1093). SIMON ASCHENBURG (USCHENBURG) in seinem *Debek tob* 1588 (*C. B.* p. 2599) hebt den Nachweis der Entdeckung einer neuen Welt im J. 1506 bei ARAMA hervor.

ISAK BEN ELIA BEN AHRON KOHEN verfafste eine Abhandlung, um das Postulat EUKLIDS zu beweisen, dafs zwei Linien von gewisser Beschaffenheit einander schneiden müssen, ms. Bodl. NEUB. 2006[4], was schon THABIT und LEVI BEN GERSON beweisen wollten *(Die hebr. Übersetz.*, S. 508, ohne Zeitangabe). ISAK könnte identisch sein mit dem Arzt und Polemiker in Urgol 1448—1453? (Hebr. Bibliogr. XVIII, 7) und dem Besitzer von ms. Halberstam 188, oder mit ISAK u. s. w. in Syrakus 1491, oben S. 71.

ISAK B. MOSES (nicht: Eli oder Ali), der Spanier aus Oriola (?) in Aragon, verfafste eine „Zahlenlehre", Arithmetik und elementare Geometrie, als Vorstufe zu EUKLID, welche mit einer Definition der Zahlkunst beginnt und vielleicht von den ersten 2 Wörtern den Titel *Melechet ha-Mispar* (Zahlkunst) erhielt, mss. Leyd. 66[3] (*Catal.* p. 283), Paris 1095 (Der Katalog p. 261 giebt den Inhalt der Teile an), ein Teil in Par. 1029. Über den angebl. Namen „Eli", s. Hebr. Bibliogr. XIX, 117; Il Vessillo 1879, S. 17; Jew. Quart. Review XI, 185; vgl. auch BENJACOB, *Thes.*, S. 331 n. 1273.

JOSEF TAITAZAK von den vertriebenen Spaniern in Salonichi, lebte noch 1523 *(Catal. Bodl.* p. 1533); einer seiner Schüler verfafste, nach den Ansichten des Lehrers, eine Anleitung zur Verfertigung *(Biur Ma'ase)* des Astrolabs, ms. Bodl. NEUB. 2080; vgl. die Notiz in der Hebr. Bibliogr. VII, 27 A. 2, XVI, 136.

OBADJA DI BERTINORO JARE aus Italien, im Alter nach Palästina ausgewandert, wo er um 1500—1510 verschied, wird noch heute wegen seiner Erklärung der *Mischna* geschätzt, welche seit 1549 eine Menge Ausgaben des Textes begleitete (über ein Dutzend zählt *Catal. Bodl.* p. 2073, vgl. Hebr. Bibliogr. VII, 23); aber die geometrische Erklärung des Traktats *Kil'ajim*, welche GABR. L. POLAK 1855 u. d. T. *Chason Obadja* (Vision O.s) herausgeben wollte, ist erst in N. GOLDBERGS Ausgabe der *Mischna*, Berlin (gedr. in Stettin) 1863 erschienen.

SAMUEL IBN SASON, der Spanier (Ende XV. Jahrh.?), schrieb 1) eine kleine unbeendete astrologische Abhandlung, beginnend mit der Länge von Tag und Nacht, wahrscheinlich Autograph, ms. München 80[2].

2) Die Erzählung des biblischen Buches Esther (!) nach astrologischen Theorien gedeutet, ms. München 239[10], nebst verschiedenen Noten in diesem ms.

Anonyma.

1. Unter den hier zu verzeichnenden Schriften, zu welchen bei näherer Untersuchung der mss. ein nicht geringer Nachtrag sich ergeben dürfte, stelle ich obenan wegen seiner grofsen Verbreitung und wahrscheinlich höheren Alters ein *astronomisches Kompendium*, welches eine Musterkarte

der sprichwörtlich gewordenen *„fata libelli“* darbietet, indem es unter verschiedenen Titeln in 2 abweichenden Rezensionen verschiedenen Autoren beigelegt wird, so dafs man abweichende Übersetzungen einer europäischen *„Theorica“* in lateinischer oder anderer Sprache vermuten möchte, die ich aber nach langjährigem Suchen noch nicht gefunden habe. Einzelheiten findet man in der Beschreibung der anzugebenden mss., insbesondere zu ms. Berlin 113[15] (*Verz.* S. 92: „nicht jünger als das XIV. Jahrh.“); der Titel der anonymen mss. ist meist *Temunat* oder *Techunat ha-Kaddur* (Form oder Beschaffenheit des Globus); ms. Bodl. Neub. 1748: *Iggeret ha-Techuna* am 14. März 1497 beendet von Elia ben Isak in Forli (wohl Kopist?); vgl. das anonyme Buch dieses Titels bei Mord. Finzi (*Die hebr. Übersetz.*, S. 629). — *„Iggeret Sfera“*, ms. Neub. 2080; Jehuda Farissol in Mantua ist ebenfalls nicht Autor (s. die Berichtigung zu beiden Nummern in Add.); Hamburg 305, Jewish Coll. in London 138[4], München 36[14], dem Abraham bar Chijja (XII. Jahrh.!) beigelegt (s. *Catal.* 2. Ausg. S. 21), Paris 1092, Vat. 292, angeblich von Meir Spira, den Zunz identifiziert mit dem Commentator der Sechsflügel aus unbestimmter Zeit und mit dem mir noch zweifelhaften Verf. einer anonymen Arithmetik, betit. *Biur Darke ha-Cheschbon* (beide ms. Bodl. Neub. 362, im Register p. 956 wird der Mathematiker mit einem älteren homonymen Masoreten confundiert), während unser astronomisches Compendium noch in Zunz' *Ges. Schriften* I, 190 ins XVII. Jahrh. verlegt wird! — Vat. 399[2] soll die Tafeln des Levi ben Gerson enthalten; s. dagegen Hebr. Bibliogr. IX, 163 (übersehen in *Hist. Litt. de la France*, t. **31**, p. 615) und meinen Art. *„Meir Daspira“* in Brülls Jahrbücher IX, 79 (vgl. oben Isak ben Meir). Der erwähnte Komm. über die Sechsflügel soll nach Neub. 362[5] mit den Phrasen schliefsen, womit ein Kompendium der Arithmetik in demselben ms. n. 4 beginnt. Aus meinen Notizen über ersteren kann ich das nicht beurteilen. Die Phrase von dem „langen Exil“ u. s. w. am Anf. unseres Kompend. findet sich auch am Anf. des Kommentars; doch möchte ich daraus keinen Schlufs auf die Identität des Verf. ziehen.

2. Ein anderes nicht weniger verbreitetes Schriftchen betitelt *Iggeret ha-Isturlab* oder *Ma'ase Keli ha-Habbata* (Abhandlung vom Astrolab oder Anfertigung des Instruments der Beobachtung) nach den 7 Klimaten, also nach arabischer Vermittlung, wird gewöhnlich dem Ptolemäus beigelegt, der als Erfinder des Astrolabs gilt, ms. Bodl. Neub. 2080, 2582[2], Brit. Mus. Almanzi 96, jetzt Add. 26.984 (bei Margoliouth, *List* p. 74, fehlt der hebr. Titel, daher auch im Register p. 104), Florenz, Pl. 88, C. 28, Mantua, Gemeindebibl. 10, München 249, 289, Paris 1047[5], wahrscheinlich Vat. 429 (Assemani macht aus Astrolab „Nestor Baroz“!), Halberstam 134 (jetzt Montefiore Coll.), Rabinowitz 1886 n. 26?, der letzte Teil mit Einschaltun-

gen von Mord. Finzi ms. Steinschneider 14, wie das ms. eines ungenannten Privatmannes in Italien (bei Riccardi in Biblioth. Mathem. 1893, p. 55 III[b], dazu meine Bemerkung ibid. S. 73). Auch hier wäre ein fremdes, wahrscheinlich arabisches Original zu suchen; vgl. Zeitschr. d. deutschen morgenl. Gesellsch. **50**, 1896, S. 216; *Die hebr. Übersetz.*, S. 537 und XXIX.

3. Von dem *Planisphaerium*, welches unter dem Namen des Ptolemäus mit Noten des Arabers Maslama aus Madrid (al-Madjiriti) in der lateinischen Übersetzung des Rudolfus Brugensis in Tolosa (1144) 1536 und 1558 gedruckt ist, giebt es eine hebräische Übersetzung, wahrscheinlich aus dem Arabischen von einem Anonymus u. d. T. *Maamar More Mofethim* oder *Mofethe Keli ha-Habbata* (Traktat der Beweise — des Instruments (der Beobachtung), mss. Almanzi 96 gänzlich übergangen bei Margoliouth, *List* p. 75, Add. 26.934), Florenz, Pl. 88 C. 30 (so lies: *Die hebr. Übersetz.*, S. 535, wo Näheres angegeben ist).

4. Eine Abhandlung über die *Quadratur des Zirkels*, deren Verfasser sich mit diesem Thema von der Jugend bis ins Alter beschäftigt hat, Aristoteles, Avicenna, Averroes und Euklid zitiert, heifst Alfonso, ms. Almanzi 96, jetzt Brit. Mus. Add. 26.984; Margoliouth (*List* p. 74) erklärt den Verf. ohne weiteres für einen Juden; ich glaube, dafs es ein Christ und das hebr. ms. die Übersetzung eines Anonymus sei; *Die hebr. Übersetz.*, S. 626.

5. Eine astrologische Abhandlung enthält ms. Bodl. Neub. 2518[7]; astrolog. Noten finden sich auch f. 9, 12 und Ende dieses ms.

6. Astronomische und geographische Bemerkungen enthält ms. München 401[11].

7. Astronomische Tafeln, *Luchot* (100 S.), enthält ms. Paris 1091.

James Gregorys „Vera circuli et hyperbolae quadratura“.

Von Georg Heinrich in München.

Obgleich die Geschichte der Quadratur des Kreises schon vielseitig behandelt wurde und in ihren Hauptmomenten klar gelegt ist, so scheinen mir doch dabei die Arbeiten einer Persönlichkeit noch nicht in gebührender Weise gewürdigt worden zu sein. Es ist dies jener James Gregory, der auch in der Geschichte der unendlichen Reihen, wie in der Optik als ein Rivale Newtons auftritt.[1]) Es dürfte dies wohl darin seinen Grund haben, dafs die in der Schrift: *Vera circuli et hyperbolae quadratura* (Patavii 1668) niedergelegten Gedanken selbst von den bedeutendsten Mathematikern seiner Zeit, wie von Huygens, nicht verstanden[2]) und von diesem in der abfälligsten Weise kritisiert wurden. — Die Bedeutung von Gregorys Arbeit liegt darin, dafs er sich, was für jene Zeit im höchsten Grade beachtenswert ist, kein geringeres Ziel steckt, als den *Beweis dafür zu erbringen, dafs das berühmte Problem der Kreisquadratur durch die Hülfsmittel der Algebra nicht gelöst werden könne.*[3]) Dafs ihm die Erreichung dieses Zieles auf seine Weise nicht gelingen konnte, ist ja klar, aber der gemachte Versuch verdient nicht nur wegen der Neuheit des Gedankens der Problemstellung, sondern auch wegen der damals völlig

---

1) Montucla bespricht in seiner *Histoire des recherches sur la quadrature du cercle* (Paris 1754; nouv. éd. 1831) die Arbeit Gregorys. Auf ihn scheinen sich die Ausführungen Cantors im 2. Band seiner *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* zu beziehen. Rudio erwähnt in seinem Buche: *Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre, Vier Abhandlungen über die Kreismessung* (Leipzig 1892), Gregory ebenfalls kurz.

2) Gregory scheint dies schon selbst geahnt zu haben: Am Schlusse seiner Vorrede schreibt er nämlich: „te enim (lectorem) suppono in geometricis non mediocriter versatum, alioquin nullum hinc fructum colliges“.

3) Gleich zu Beginn der Vorrede heifst es: „Mecum aliquando cogitabam, num Analytica cum suis quinque operationibus esset sufficiens, et generalis methodus investigandi omnes quantitatum proportiones, ut in initio suae Geometriae affirmare videtur Cartesius; si enim ita esset, possibile foret ejus ope toties decantatam circuli quadraturam exhibere: cumque haec mente revolverem, facile percepi ex hactenus repertis circuli proprietatibus nullam posse analysin institui tali structurae inservientem“.

ungewohnten analytischen Behandlungsweise Beachtung und kritische Würdigung.

Es sei mir daher gestattet, den Gedankengang der besagten Abhandlung zu entwickeln. Der leichteren Übersicht halber werde ich mich dabei einer moderneren Bezeichnungs- und Ausdrucksweise bedienen als Gregory; die wichtigeren Stellen führe ich im Originaltext an.[1])

An den Anfang seiner Abhandlung stellt Gregory „Definitiones“ und „Petitiones“. Ich führe die für das Spätere wichtigen an:

Defin. 5. Wir nennen eine Gröfse aus andern, gegebenen Gröfsen zusammengesetzt, wenn sie aus diesen entsteht durch Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Wurzelausziehen oder durch irgend eine andere denkbare Operation.[2])

Defin. 6. Eine Gröfse nennen wir eine algebraische Funktion anderer Gröfsen, wenn sie aus denselben hergestellt wird durch Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und durch Ausziehen von Wurzeln.[3])

Defin. 9. Gegeben seien die Gröfsen a_0 und b_0. Wir bilden dann das Reihenpaar a_ν, b_ν so, dafs immer

$$a_{n+1} = \varphi(a_n, b_n) \quad \text{und} \quad b_{n+1} = \psi(a_n, b_n)$$

ist, wobei φ und ψ beliebige Funktionen bedeuten sollen. Ist dann noch $|a_{n+1} - b_{n+1}| < |a_n - b_n|$, dann nennen wir das so entstandene Reihenpaar „series convergens“.[4])

Defin. 10. a_n, b_n; a_{n+1}, b_{n+1}; etc. heifsen „termini convergentes“.

---

1) Die Originalabhandlung konnte ich nicht bekommen; sie findet sich aber vollständig abgedruckt in Chr. Hugenii *Opera varia* (Lugd. Bat. 1724), II, p. 405 und zwar ist unter dem Titel „De circuli et hyperbolae quadratura controversia“ vereinigt: 1. Vera circuli et hyperbolae quadratura. Authore Jac. Gregorio (p. 407—462); 2. Hugenii observationes in librum J. Gregorii (p. 463—466); 3. Domini Gregorii responsum ad Animadversiones Dni Hugenii (466—471); 4. Excerpta ex litteris Dni Hugenii de responso, quod Dnus Gregorius dedit (472—476); 5. Excerpta ex epistola Dni Gregorii (476—482).

2) „Quantitatem dicimus à quantitatibus compositam; cum à quantitatum additione, subductione, multiplicatione, divisione, radicum extractione, vel quacumque alia imaginabili operatione, fit alia quantitas“. Dieses „componi“ werden wir im folgenden durch den Ausdruck „Funktion“ ersetzen, da sich Gregorys Auffassung, wie noch aus anderen Stellen hervorgeht, völlig mit dem Begriff der Funktion deckt, wie ihn Euler in seiner *Introductio in analysin infinitorum* definiert hat.

3) „Quando quantitas componitur ex quantitatum additione, subductione, multiplicatione, divisione, radicum extractione; dicimus illam componi analytice“.

4) „Sint duae quantitates A, B, à quibus componantur duae aliae quantitates C, D, quorum differentia sit minor differentia quantitatum A, B, & eodem modo quo C componitur à quantitatibus A, B, componatur E à quantitatibus C, D; & eodem modo . . .“.

Die ersten Paragraphen (propositio I—VI) enthalten geometrische Sätze.

Gegeben sei der Kreis-, Ellipsen- oder Hyperbel-Sektor ABP (Figur 1—3; bei Ellipse und Hyperbel ist ein zu einer Axe symmetrischer Sektor

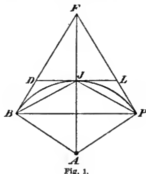


Fig. 1.

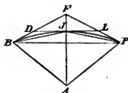


Fig. 2.

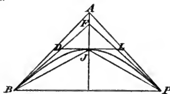


Fig. 3.

gedacht). Man ziehe BP, dann die Tangenten in B und P; Schnittpunkt F; hierauf BI und PI, die Tangente in I; etc. Dann nennt GREGORY die Polygone ABP, $ABIP$, etc. „reguläre eingeschriebene Polygone" und $ABFP$, $ABDLP$, etc. „reguläre umgeschriebene Polygone". Bezeichnen wir nun mit F die Flächeninhalte dieser „regulären umgeschriebenen", mit f die Flächeninhalte dieser „regulären eingeschriebenen Polygone", dann gilt:

$$f_{2n} = \sqrt{f_n F_n} \quad \text{(prop. I).}$$

$$F_{2n} = \frac{f_n F_n}{f_n + \sqrt{f_n F_n}} \quad \text{(prop. V scholium).}$$

Es sei a_0 = Inhalt des eingeschriebenen n-Eckes ABP, b_0 = Inhalt des dazugehörigen umgeschriebenen n-Eckes $ABFP$; dann ist $a_1 = \sqrt{a_0 b_0}$ = Inhalt des eingeschriebenen $2n$-Eckes; $b_1 = \frac{a_0 b_0}{a_0 + \sqrt{a_0 b_0}}$ = Inhalt des umgeschriebenen $2n$-Eckes.

Die ein- und umgeschriebenen Vielecke bilden also eine „series convergens" (Defin. 9.):

$$a_0, a_1, a_2, \cdots a_n, a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \cdots$$

$$b_0, b_1, b_2, \cdots b_n, b_{n+1} = \frac{a_n b_n}{a_n + \sqrt{a_n b_n}}, \cdots$$

Da nun die Differenz zwischen 2 zusammengehörigen Termen dieses Reihenpaares immer kleiner wird, so müssen wir, wenn wir die Reihen bis ins Unendliche fortsetzen, schliefslich 2 einander gleiche Terme erhalten, welche dann dem Kreis- (Ellipsen-, Hyperbel-) Sektor inhaltsgleich sind.[1])

Kann man nun das Endglied (terminatio) dieses Reihenpaares der ein- und umgeschriebenen Polygone finden, so ist damit auch der Kreis- (Ellipsen-, Hyperbel-) Inhalt gefunden. Da diese Aufgabe aber nicht leicht zu lösen ist, sagt Gregory, so erläutert er die Methode, die er anwenden will, erst an einigen Beispielen.[2])

Es sei gegeben das Reihenpaar (prop. VI.) scholium):

$$\begin{array}{ll} a_0 & b_0 \\ a_1 = a_0 + \frac{d}{c}(b_0 - a_0) & b_1 = b_0 - \frac{e}{c}(b_0 - a_0) \\ a_2 = a_1 + \frac{d}{c}(b_1 - a_1) & b_2 = b_1 - \frac{e}{c}(b_1 - a_1) \\ \vdots & \vdots \\ a_{n+1} = a_n + \frac{d}{c}(b_n - a_n) & b_{n+1} = b_n - \frac{e}{c}(b_n - a_n) \\ \vdots & \vdots \\ t & t \end{array}$$

wobei $c > \left\{ \begin{matrix} d \\ e \end{matrix} \right.$, $a_0 < b_0$ und t die „terminatio" sein soll. Dieses Reihenpaar erfüllt die Bedingungen von Defin. 9:

$$(a_{n+1} - b_{n+1}) = (a_n - b_n)\frac{c-d-e}{c} < (a_n - b_n)$$

und ist also eine „series convergens". Um die „terminatio" zu finden, brauchen wir nur eine Gröfse I der Art zu suchen, dafs

$$f(a_n, b_n) = I = f(a_{n+1}, b_{n+1}).$$

1) Prop. VI. scholium; „... igitur possunt inveniri hujus seriei termini convergentes *quorum differentia sit omni exhibita quantitate minor;* & igitur imaginando hanc seriem in infinitum continuari, possumus imaginari ultimos terminos convergentes esse aequales, quos terminos aequales appellamus seriei *terminationem*".

2) Prop. V. scholium: „si igitur praedicta polygonorum series terminari posset, hoc est, si inveniretur ultimum illud polygonum inscriptum (si ita loqui liceat) aequale ultimo illi polygono circumscripto, daretur infallibiliter circuli et hyperbolae quadratura: sed quoniam difficile est, & in geometria omnino fortasse inauditum tales series terminare, praemittendae sunt quaedam propositiones è quibus inveniri possint hujusmodi aliquot serierum terminationes, & tandem (si fieri possit) generalis methodus inveniendi omnium serierum convergentium terminationes."

Denn dann ist auch $f(t, t) = I =$ const. und daraus t zu berechnen.[1])

In unserem Falle ist einfach

$$\frac{e}{d} \cdot a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{e}{d} \cdot a_n + b_n = I = \frac{e}{d} \cdot a_0 + b_0$$

und daraus:

$$\frac{e}{d} \cdot t + t = \frac{e}{d} \cdot a_0 + b_0 \quad \text{oder} \quad t = \frac{e \cdot a_0 + d \cdot b_0}{e + d} = \frac{e \cdot a_n + d \cdot b_n}{e + d}.$$

Zu diesem Reihenpaar giebt Gregory mehrere Zahlenbeispiele, so z. B.:

$$\left.\begin{array}{ll} a_0 = 28. & b_0 = 42. \\ a_1 = 32. & b_1 = 36. \\ a_2 = 33\frac{1}{7}. & b_2 = 34\frac{2}{7}. \\ \vdots & \vdots \end{array}\right\} \begin{array}{l} c = 7. \quad d = 2. \quad e = 3. \\ I = 84. \end{array}$$

$$t = 33\tfrac{3}{5}.$$

Auf Grund des angegebenen und noch anderer Beispiele (prop. VIII, X[2]) stellt dann Gregory am Ende von § 10 den allgemeinen Satz auf:

Um das Endglied t eines Reihenpaares zu finden, ist es nur nötig, eine Funktion f so zu finden, daſs

$$f(a_n\, b_n) = I = f(a_{n+1}, b_{n+1}).$$

Denn dann ist aus

$$f(t, t) = I$$

die „terminatio" gegeben:

$$t = F(a_n, b_n) = F(a_0, b_0).\ ^{3})$$

---

1) „Prop. VII. Problema: Oportet praedictae seriei terminationem invenire. Ut huic problemati satisfiat, oportet primò invenire quantitatem quae eodem modo componitur ex terminis convergentibus a, b, quo ex terminis convergentibus $\frac{ca + bd - ad}{c}$, $\frac{bc - be + ae}{c}$ . . .

2) In § 10 bringt Gregory als Beispiel auch das Reihenpaar

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n\, b_n} \qquad b_{n+1} = \frac{a_n^2}{\sqrt{a_n\, b_n}}.$$

Daſs dies keine „series convergens" sei, bemerkt Huygens in seinen „Observationes" (es ist nämlich $a_{n+2} = a_n$, $b_{n+2} = b_n$). In seinem „Responsum" gesteht Gregory diesen Fehler zu und bringt dafür 2 andere, richtige Beispiele. — Von Interesse ist vielleicht, daſs Gregory im „Responsum" die Wurzeln $\sqrt[7]{a^5\, b^2}$ und $\sqrt[11]{a^7\, b^4}$ auf folgende Art schreibt: $r^7\, a^5\, b^2$ und $r^{11}\, a^7\, b^4$, während er in der eigentlichen Abhandlung die gewöhnliche Bezeichnungsweise $\sqrt{q}$, $\sqrt{c}$ etc. anwendet.

3) Prop. X. „. . . Proinde ad inveniendam cujuscunque seriei convergentis terminationem; opus est solummodo invenire quantitatem eodem modo compositam ex

Man hat so den Satz gefunden:

Das Endglied eines Reihenpaares läfst sich darstellen als Funktion (F) je zweier zusammengehöriger Terme a_n und b_n, wobei es gleichgültig ist, welche „termini convergentes“ unter dem Funktionszeichen stehen.[1])

Gegen diesen Satz erhebt Huygens in seinen „Observationes“ den Einwand, dafs er zwar giltig sei, wenn man das Endglied nach der Methode von Gregory (siehe oben, prop. X) gefunden habe, dafs aber die allgemeine Giltigkeit nicht dargethan sei. Um diesen Einwand zu entkräften, beweist Gregory in seiner „Erwiderung auf die Bemerkungen des Herrn Huygens“ folgenden ergänzenden Satz:

a_0	b_0
a_1	b_1
$\vdots$	$\vdots$
a_i	b_i
$\vdots$	$\vdots$
	t
	x

Gegeben sei das Reihenpaar der ein- und umgeschriebenen Polygone, der Sektor $t = F(a_0, b_0)$ und aufserdem $x = F(a_1, b_1)$; dann ist $x = t$.

Beweis. Es sei $|x - t| = \alpha$. Wir können nun unser Reihenpaar soweit fortsetzen, dafs einmal $|a_i - b_i| < \alpha$. Nun ist aber $a_i < t < b_i$ und ebenso wie t zwischen a_i und b_i liegt, mufs auch x zwischen a_{i+1} und b_{i+1} und also auch zwischen den gröfseren Termen a_i und b_i liegen, also $a_i < x < b_i$. Also mufs $|x - t| < |a_i - b_i| < \alpha$ sein. Mithin ist die Annahme $|x - t| = \alpha$ falsch, und es mufs sein

$$x = t.$$ [2])

§ 11 bringt dann Gregorys Hauptsatz:

Der Flächeninhalt eines Kreis-(Ellipsen-, Hyperbel-)Sektors läfst sich nicht als algebraische Funktion der ein- und umgeschriebenen Polygone darstellen.[3])

Es sei: $\triangle ABP = f_n = a$, Trapez $ABFP = F_n = b$. Dann ist (prop. I u. V, s. oben):

---

terminis convergentibus primis, quo componitur eadem quantitas ex terminis convergentibus secundis.“

1) Prop. X. Consectarium: „Quoniam non refert in problemate sive termini convergentes a, b sint primi, secundi, vel tertii etc.; manifestum est omnis seriei convergentis terminationem eodem modo esse compositam ex terminis convergentibus primis quo ex terminis convergentibus secundis, tertiis, vel quartis etc.“

2) „. . . Manifestum est, sectorem Z esse indefinitè minorem quam K, & majorem quam I: item quoniam Z eodem modo componitur ex A, B, quo X è quantitatibus C D, et Z indefinitè minor est quam K et major quam I, patet ex Proprietatibus serierum convergentium, X etiam esse indefinitè majorem quam I, & minorem quam K (est enim revera indefinitè major quam L & minor quam M) & . . . — Das öfter vorkommende „indefinitè“ läfst sich nicht leicht übersetzen. Der Sinn ist aber überall klar. So bedeutet es an der ersten Stelle des Zitates: Der Sektor Z ist immer $< K$, an welcher Stelle in der Reihe wir auch K annehmen mögen.

3) „Prop. XI. Theorema: Dico sectorum circuli, ellipseos vel hyperbolae $ABIP$ non esse compositum analyticè à triangulo ABP & trapezio $ABFP$.

$$f_{2n} = \sqrt{ab} \text{ und } F_{2n} = \frac{ab}{a+\sqrt{ab}}.$$

Um die Wurzelzeichen zu entfernen, denkt sich GREGORY gesetzt:

$$f_n = a = \alpha^3 + \alpha^2\beta; \quad F_n = b = \alpha\beta^2 + \beta^3.$$

Dann wird:

$$f_{2n} = \quad \alpha^2\beta + \alpha\beta^2; \quad F_{2n} = \quad 2\,\alpha\,\beta^2.$$

Läfst sich nun der Sektor t (= Endglied obigen Reihenpaares) als algebraische Funktion A von a und b darstellen, dann mufs nach dem zuletzt bewiesenen Satze sein:

$$A\,(a,b) = A\left(\sqrt{ab},\ \frac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right) = t \text{ und also auch:}$$

$$A\,(\alpha^3 + \alpha^2\beta,\ \alpha\beta^2 + \beta^3) = A\,(\alpha^2\beta + \alpha\beta^2,\ 2\,\alpha\beta^2) = t.$$ [1]

Es giebt nun aber keine algebraische Funktion der Art, dafs

$$A\,(\alpha^3 + \alpha^2\beta,\ \alpha\beta^2 + \beta^3) = A\,(\alpha^2\beta + \alpha\beta^2,\ 2\,\alpha\beta^2)$$

ist. In diesem Satz liegt der Schwerpunkt der ganzen Untersuchung, und wenn es GREGORY möglich gewesen wäre, denselben exakt zu beweisen, so hätte er das gewünschte Ziel erreicht. Doch sehen wir uns seine Beweise näher an.

1. Beweis: Stellen wir durch Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und Wurzelausziehen aus den beiden Ausdrücken $(\alpha^3 + \alpha^2\beta)$ und $(\alpha\beta^2 + \beta^3)$ eine algebraische Funktion her und hierauf aus den Ausdrücken $(\alpha^2\beta + \alpha\beta^2)$ und $(2\,\alpha\beta^2)$ durch dieselben Operationen in derselben Reihenfolge eben dieselbe Funktion, dann können die so erhaltenen Funktionen einander nicht gleich sein. Denn

$$A\,(\alpha^3 + \alpha^2\beta,\ \alpha\beta^2 + \beta^3)$$

enthält immer eine höhere Potenz von α als

$$A\,(\alpha^2\beta + \alpha\beta^2,\ 2\,\alpha\beta^2),$$

da die Potenz α^2 in $(\alpha^2\beta + \alpha\beta^2)$ und $(2\,\alpha\beta^2)$ nicht vorkommt.

2. Beweis: $A\,(\alpha^3 + \alpha^2\beta,\ \alpha\beta^2 + \beta^3)$ enthält mehr Glieder als $A\,(\alpha^2\beta + \alpha\beta^2,\ 2\,\alpha\beta^2)$, da $(\alpha^2\beta + \beta^3)$ ein Glied mehr hat als $(2\,\alpha\beta^2)$. Also kann nicht

$$A\,(\alpha^3 + \alpha^2\beta,\ \alpha\beta^2 + \beta^3) = A\,(\alpha^2\beta + \alpha\beta^2,\ 2\,\alpha\beta^2)$$

sein. Es kann also auch nicht der Sektor $t = A\,(a, b)$ sein.

Der Umstand, dafs GREGORY 2 Beweise giebt, sowie die schwülstige

1) „. . . si enim praedicta terminatio componatur analyticè a terminis convergentibus $\alpha^3 + \alpha^2\beta$, $\alpha\beta^2 + \beta^3$; componetur etiam eadem terminatio analyticè et eodem omnino modo à terminis convergentibus $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2$, $2\alpha\beta^2$; . . ., sed nulla quantitas potest eodem modo analyticè componi ex terminis $\alpha^3 + \alpha^2\beta$, $\alpha\beta^2 + \beta^3$, quo componitur ex terminis $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2$, $2\alpha\beta^2$."

Ausdrucksweise des ersten (er füllt im Original 2 grofse Druckseiten) zeigen, dafs ihm seine Beweise selbst nicht recht stichhaltig erschienen, und man kann sie in der That nur als eine Plausibelmachung seines Satzes bezeichnen. Auf jeden Fall aber war Gregory von der Richtigkeit desselben fest überzeugt, wie aus der Vorrede und aus dem Scholium zu § 11 hervorgeht.

Im weiteren Verlauf seiner Abhandlung gibt Gregory für den Flächeninhalt des Sektors t folgende Näherungswerte, die er rein algebraisch aus den Eigenschaften des Reihenpaares der ein- und umgeschriebenen Polygone ableitet:

$$t > f_{2n} + \tfrac{1}{3}(f_{2n} - f_n) \qquad \text{(prop. XX)}$$

$$t < \tfrac{1}{3}f_n + \tfrac{2}{3}F_n \qquad \text{(prop. XXI)}$$

Diese Näherungswerte sind identisch mit den von Huygens in seiner Schrift *De circuli magnitudine inventa* (prop. V u. VI) gegebenen. Huygens erhält diese Werte aber auf einem ganz anderen Wege als Gregory.

Nachdem wir so den Hauptinhalt von Gregorys Arbeit angeführt haben, erübrigt noch, kurz auf die von Huygens gemachten Einwände zurückzukommen. Zwei derselben sind schon oben erwähnt. Huygens behauptet aber auch § 11 von Gregory sei falsch, denn eine algebraische Funktion von der Beschaffenheit, dafs

$$A(\alpha^3 + \alpha^2\beta, \alpha\beta^2 + \beta^3) = A(\alpha^2\beta + \alpha\beta^2, 2\alpha\beta^2)$$

sei leicht zu finden. Man brauche nämlich nur (nach Gregorys Beispiel in § 7) zu setzen:

$$(\alpha^3 + \alpha^2\beta)\cdot z + (\alpha\beta^2 + \beta^3) = (\alpha^2\beta + \alpha\beta^2)\, z + 2\alpha\beta^2.$$

Man erhält daraus

$$z = \frac{\beta^2}{\alpha^2 + \alpha\beta}$$

und hieraus

$$I = (\alpha^3 + \alpha^2\beta)\frac{\beta^2}{\alpha^2 + \alpha\beta} + (\alpha\beta^2 + \beta^3) = 2\alpha\beta^2 + \beta^3$$

$$= (\alpha^2\beta + \alpha\beta^2)\frac{\beta^2}{\alpha^2 + \alpha\beta} + 2\alpha\beta^2.$$

Daraus ergiebt sich:

$$I = t\cdot z + t$$

oder: Sektor

$$t = \frac{2\alpha^3\beta^2 + 3\alpha^2\beta^3 + \alpha\beta^4}{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}.$$

Dieser Schlufs ergiebt, dafs Huygens Gregorys Gedanken nicht verstanden hat[1]); die Widerlegung fiel natürlich Gregory nicht schwer. Die übrigen

1) Dies wird bestätigt durch die ganze, ziemlich umfangreiche, Polemik über Gregorys Arbeit. Dieselbe befindet sich abgedruckt in *Oeuvres complètes de* Christiaan

Einwände, die HUYGENS erhebt, beziehen sich hauptsächlich auf die von GREGORY gegebenen Näherungswerte und sind von geringerem Interesse.

So wenig uns heute GREGORYS Beweise für seinen Hauptsatz genügen können, so müssen wir doch anerkennen, dafs er den Charakter des Problems, soweit es damals möglich war, erkannte. Aufserdem führte er zum erstenmale eine analytische Behandlungsweise und zwar einen konvergenten algebraischen Prozefs in seinen Beweisgang ein. Diese Umstände dürften es rechtfertigen, die Abhandlung der Vergessenheit zu entreifsen gesucht zu haben.

HUYGENS, *publiées par la société hollandaise des sciences*. Tome sixième. Correspondance 1666—1669 (La Haye 1895); s. das Register unter „Polémique avec GREGORY sur sa *vera circuli et hyperbolae quadratura*".

Die Briefe zeigen, dafs sich die Gemüter über die Arbeit GREGORYS ziemlich stark erbitzten, geben aber für die Beurteilung der Abhandlung nichts wesentlich Neues.

Historische Untersuchung der ersten Arbeiten über Interpolation.

Von A. von Braunmühl in München.

G. Eneström hat die Geschichte der ersten Interpolationsformeln (bis 1715), sofern dieselben als der Differenzenrechnung angehörend betrachtet werden können, in der Einleitung (S. 8—20) zu seiner wertvollen Abhandlung *Differenskalkylens Historia.* I (Upsala 1878)[1]) behandelt. Da aber diese Abhandlung nicht überall bekannt zu sein scheint[2]) — wohl weil sie in schwedischer Sprache geschrieben ist — so halte ich es nicht für überflüssig, in dieser Zeitschrift noch einmal auf die Frage zurückzukommen, welcher Anteil den einzelnen Autoren an der Aufstellung der hauptsächlichsten Methoden und Formeln der Interpolationsrechnung zukommt, zumal da ich glaube einiges Neue beibringen zu können.

Der erste, der höhere Differenzen mit Glück zur Interpolation verwendete, ist nach Jobst Bürgi, dessen Verfahren leider verloren gegangen ist, zweifelsohne Henry Briggs (1556—1630) in seiner *Trigonometria Britannica* (1633) gewesen. Sein äufserst praktisches Verfahren zur Tafelberechnung ist übrigens von Koppe[3]) so gut dargestellt worden, dafs wir hier nicht darauf einzugehen brauchen. Von einer anderen Seite her griff dann James Gregory, Newtons Zeitgenosse, zuerst das Problem an, indem er, um ein krummlinig begrenztes Flächenstück zu quadrieren, zeigte, wie man durch beliebig viele Punkte der Begrenzung eine parabolische Kurve legen könne, die die gegebene genügend nahe ersetzt. Dieser fruchtbare Gedanke, der bisher allgemein Newton zugewiesen

1) Erschienen in Upsala Universitets Arsskrift 1879. Vgl. auch die *Notes historiques sur la formule générale d'interpolation de Newton* von P. Mansion und G. Eneström in der Biblioth. Mathem. 1886, 141—144.

2) Ich schliefse dies daraus, dafs R. Wolf in seinem *Handbuch der Astronomie* (1890) trotz der Richtigstellung durch Eneström a. a. O., eine der Hauptformeln Newtons Stirling zuschreibt, und derselbe Irrtum auch in die neue Mathematische Encyklopädie überging. Siehe noch Näheres Anmerk. 3) auf S. 89.

3) *Die Behandlung der Logarithmen und des Sinus im Unterricht.* Programm der Andräas-Realschule in Berlin 1893, p. 30 ff.

wurde, findet sich in der That zuerst in einem kurzen Aufsatze JAMES GREGORYS vom Jahre 1668[1]), worin er ihn zur vollständigen Aufstellung der sogenannten SIMPSONschen Formel benutzte. In dem ersten für LEIBNIZ bestimmten Briefe an OLDENBURG vom 24. Oktober 1676 spricht dann NEWTON denselben Gedanken aus[2]) und scheint auch schon an die Verwendung dieser Methode zur Tafelberechnung gedacht zu haben; denn nachdem er die direkte Berechnung der Funktionen gröfserer Winkel mit der von ihm entdeckten Sinusreihe gezeigt hat, bemerkt er, dafs man sich zur Bestimmung der Sinus von Zehntel- und Hundertel-Graden einer anderen Methode bedienen müsse; präzis ausgesprochen hat er die Verwendbarkeit der Interpolation hierzu allerdings erst später.[3])

Auch in den Prinzipien, die 1687 erschienen, spricht NEWTON von der Ersetzung einer gegebenen Kurve durch eine »parabolische Kurve« zur näherungsweisen Quadratur[4]), und zwar giebt er hier sowohl eine Interpolationsformel für den Fall an, dafs die Ordinaten *in Abständen gleich der Einheit* aufeinanderfolgen, als auch im Falle die Ordinaten *ungleiche Entfernungen* voneinander haben. Bezeichnet man mit x_0, y_0; x_1, y_1; x_2, y_2 u. s. w. die zusammengehörigen Wertepaare der Abscissen und Ordinaten und mit y die dem Werte x entsprechende gesuchte Ordinate, so können wir die erstere Formel NEWTONS in der Gestalt schreiben:

$$y = y_0 + \binom{x}{1} \Delta y_0 + \binom{x}{2} \Delta^2 y_0 + \binom{x}{3} \Delta^3 y_0 + \cdots \qquad (1)$$

Bei NEWTON heifst sie

$$RS = a + bp + cq + dr + es + ft + \ldots,$$

wobei $a = y_0$, $b = \Delta y_0$, $c = \Delta^2 y_0 \ldots p = \binom{x}{1}$, $q = \frac{1}{2} p (x-1)$, $r = \frac{1}{3} q (x-2) \ldots$ ist.

Im zweiten Falle führt er die Quotienten aus den Differenzen je zweier Ordinaten und denen ihrer zugehörigen Abscissen als neue Differenzen ein. Wir würden etwa schreiben:

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \Delta y_0, \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \Delta y_1, \ldots, \frac{\Delta y_1 - \Delta y_0}{x_2 - x_0} = \Delta^2 y_0, \frac{\Delta y_2 - \Delta y_1}{x_3 - x_1} = \Delta^2 y_1 \ldots.$$

u. s. w., wodurch sich ergiebt:

---

1) Vgl. G. HEINRICH, diese Zeitschrift 1_3, 1900, p. 90—92.

2) „Curvam geometricam describere, quae per data quotcunque puncta transibit.“ *Commercium epistol. J. Collins* etc. Edit. BIOT et LEFORT (Paris 1856), No. LV—LXV.

3) Nach einer Angabe von STIRLING, Philosophical Transactions 1719, p. 1051 soll NEWTON in derselben Zeit schon eine Vorlesung über Interpolation zu Cambridge gehalten haben.

4) *Philosophiae naturalis principia mathematica* (London 1687), lib. III, Lemma V, p. 481.

$$y = y_0 + (x - x_0)\,\Delta\, y_0 + (x - x_0)(x - x_1)\,\Delta^2 y_0 \\ + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\,\Delta^3 y_0 + \ldots, \qquad (2)$$

eine Formel, die sich nur in unserer Bezeichnung von jener Newtons unterscheidet.[1])

6 Jahre nach dem Erscheinen von Newtons Prinzipien kam der *Cours de mathématique* von Jacques Ozanam (5 Voll. in 8°; 1693) heraus, in dessen zweitem Bande der Verfasser ein Interpolationsverfahren zur Berechnung trigonometrischer Tabellen entwickelte, welches genau mit dem durch Newtons erste Formel gegebenen übereinstimmt, indem es die Interpolationswerte aus den Anfangsgliedern der Differenzreihen berechnen lehrte. Schreiben wir mit Ozanam a, b, $-c$, $-d$ für diese Anfangsglieder bis zur dritten Differenzreihe, so ist sein Verfahren durch die Formel dargestellt

$$y = a + bx - \frac{x(x-1)}{2}\,c - \frac{x(x-1)(x-2)}{6}\,d,$$

die er übrigens nicht explicite angiebt.

Ob Ozanam durch Newtons Angaben auf sein Verfahren geführt wurde oder etwa durch das Studium der Methode Briggs, die G. Mouton in seiner Schrift *Observationes diametrorum Solis et Lunae apparentium* (Lyon 1670)[2]) erst wieder zu umfassender Verwendung gebracht hatte, läfst sich wohl kaum mit Sicherheit entscheiden. Wahrscheinlicher scheint mir das letztere, da er Newtons geometrische Darstellung, wie sie in den Prinzipien gegeben war, ganz vermeidet.

Der erste, der Gregorys und Newtons Gedanken in einer 1709 gehaltenen Vorlesung zur weiteren Ausführung brachte, war der bekannte Roger Cotes (1682—1716), in dessen hinterlassenen Papieren sich eine aus dem Jahre 1707 stammende Ausarbeitung der Methode vorfand.[3]) Er knüpft darin an Newtons Überlegungen an, ohne, wie er sagt, Kenntnis davon erhalten zu haben, dafs Newton selbst inzwischen eine gröfsere Abhandlung *Methodus differentialis* geschrieben habe, die ihm erst nach ihrer Veröffentlichung durch W. Jones im Jahre 1711 bekannt geworden sei, und giebt einen Beweis der allgemeineren Formel (2), der, wenn er auch nicht streng ist, doch die Entstehung derselben gut erkennen läfst.

1) Führt man die Werte der Δ^n in die Formel ein, so erhält sie unmittelbar die Gestalt, welche z. B. in der neuen *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* B. I, p. 229 angegeben ist.

2) Diese Schrift Moutons und seine Verwendung der Interpolationsmethode von Briggs hat Delambre ausführlich besprochen in *Histoire de l'astronomie* II (Paris 1821), 360—420.

3) *Harmonia mensurarum;* Edit. R. Smith (Cantabrigiae 1722), der als Anhang *Opera miscellanea* Rogeri Cotes beigegeben sind (p. 23—33).

Wir kommen nun zur Besprechung der obenerwähnten Abhandlung Newtons.[1]) Darin hat er keineswegs nur die allgemein nach ihm benannte Interpolationsmethode gegeben, die er schon in den Prinzipien auseinandergesetzt hatte und deren Endformel er nicht mehr mitteilte[2]), sondern er gab zunächst noch zwei Formeln für die sogenannte Interpolation aus der Mitte, und diese sind, was bisher merkwürdigerweise nicht beachtet wurde, völlig identisch mit jenen, die später den Namen der Interpolationsformeln von Stirling erhalten haben.[3])

Newton unterschied nämlich zwei Fälle, einer *ungeraden* und einer *geraden* Anzahl gegebener Ordinaten, wenn dieselben in *gleichen Abständen* aufeinanderfolgen. Ist im ersten Falle die mittlere Ordinate der Interpolationskurve y_0 und x die von der Mitte aus gezählte Abscisse, zu welcher die Ordinate y bestimmt werden soll, und bezeichnet man die links von y_0 stehenden Ordinaten mit negativen, die rechts stehenden mit positiven Indices[4]), und, wie jetzt allgemein gebräuchlich, die Glieder der Differenzreihen mit Δ^n ($n = 1, 2, 3 \cdots$) und setzt $\Delta_0 + \Delta_{-1} = \delta$, $\Delta^2_{-1} = \delta^2$, $\Delta^3_{-1} + \Delta^3_{-2} = \delta^3$, $\Delta^4_{-2} = \delta^4$, $\Delta^5_{-2} + \Delta^5_{-3} = \delta^5$ u. s. w., so ist Newtons erste Formel[5]):

$$y = y_0 + \frac{x\delta}{2} + \frac{x^2\delta^2}{2} + \frac{x^3 - x}{6} \cdot \frac{\delta^3}{2} + \frac{x^4 - x^2}{24}\delta^4 + \frac{x^5 - 5x^3 + 4x}{120}\,\frac{\delta^5}{2} + \cdots, \quad (3)$$

oder indem man die Faktoren ausscheidet und die Glieder paarweise vereinigt,

$$y = y_0 + \frac{x\delta + x^2\delta^2}{1 \cdot 2} + \frac{2x\delta^3 + x^2\delta^4}{1 \cdot 2}\,\frac{x^2 - 1}{3 \cdot 4} + \frac{3x\delta^5 + x^2\delta^6}{1 \cdot 2}\,\frac{x^2 - 1}{3 \cdot 4}\,\frac{x^2 - 4}{5 \cdot 6} + \cdots \quad (3a)$$

und in dieser Form ist sie unter dem Namen der Stirlingschen *Interpolationsformel* bekannt.

Im zweiten Falle einer geraden Anzahl gegebener Ordinaten (New-

1) *Methodus differentialis* steht *Opera* Newtoni, Edit. Horsley I, 521 ff.

2) Ihre Entwickelung kann bei Cantor, *Geschichte der Mathematik* III², 372—375 nachgelesen werden.

3) Schon E. Waring nennt Stirling als Erfinder einer eleganten Methode (Philos. Trans. **69**, 1779, p. 59), während derselbe keine neue Interpolationsformel gegeben hat. — Siehe auch R. Wolf, *Handbuch der Astronomie* I, p. 97 und *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, hrsg. von H. Burckhardt und F. Meyer, I, 231, Artikel von Netto, wo die Formel für die Interpolation aus der Mitte ebenfalls Stirling zugeschrieben wird. — Auf das Vorkommen dieser zwei Formeln in Newtons *Methodus differentialis* hat Eneström in der oben citierten Arbeit von 1879 hingewiesen.

4) Newton nimmt 9 Ordinaten an und bezeichnet sie mit $A_n\ B_n$, die ersten Differenzen mit b_n, die zweiten mit $c_n \cdots$ bis i ($n = 1, 2 \cdots$), dann setzt er $A_5\ B_5 = k$, $\frac{b_4 + b_5}{2} = l$, $c_4 = m$, $\frac{d_3 + d_4}{2} = n$ u. s. w.

5) *Opera* I, 523—524.

TON nimmt 8 an) sei $y' = \frac{y_0 + y_1}{2}$, $\delta = \Delta$, $\delta^2 = \frac{\Delta^2_0 + \Delta^2_{-1}}{2}$, $\delta^3 = \Delta^3_{-1}$, $\delta^4 = \frac{\Delta^4_{-1} + \Delta^4_{-2}}{2}$, $\delta^5 = \Delta^5_{-2}$ u. s. w., dann ist nach Newton[1]):

$$y = y' + \delta x + \frac{4x^2-1}{8}\delta^2 + \frac{4x^3-x}{24}\delta^3 + \frac{16x^4-40x^2+9}{384}\delta^4 + \cdots, \quad (4)$$

welche Stirling in der Form schreibt:

$$y = \frac{y'+x\delta}{4^0} + \frac{3\delta^2+x\delta^3}{4^1}\cdot\frac{4x^2-1}{2\cdot 3} + \frac{5\delta^4+x\delta^5}{4^2}\cdot\frac{4x^2-1}{2\cdot 3}\cdot\frac{4x^2-9}{4\cdot 5} + \cdots \quad (4a)$$

Stirling (1692—1770), auf den Newton sehr viel gehalten zu haben scheint, veröffentlichte im Jahre 1719 in den Philosophical Transactions einen Aufsatz über Interpolation mit dem Titel *Methodus differentialis Newtoniana* (p. 1050—1070). Darin teilte er die Formeln (1), (3) und (4) als von Newton stammend mit, und auch in einem späteren selbständigen Werke *Methodus differentialis sive tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum* (Londini 1730) hob er ausdrücklich hervor, dafs sich seine Formeln fast garnicht von denen Newtons unterscheiden.[2]) Ja, Newton war sogar schon weiter gegangen als Stirling jemals ging; denn während es letzterem hauptsächlich darum zu thun war, die praktische Verwendbarkeit jener vier Formeln auf alle möglichen Probleme nachzuweisen, behandelte Newton auch noch den Fall, dafs die gegebenen Ordinaten in ungleichen Distanzen aufeinanderfolgen.

Auch hierbei unterschied er wieder eine ungerade und eine gerade Anzahl von Abscissenwerten und gab dafür zwei verschiedene Formeln an. Im ersteren Falle nahm er 7 Ordinaten $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $\cdots$, $A_7 B_7$, so dafs $A_4 B_4$ die mittlere war, wir wollen sie y_4 nennen. Ist dann allgemein $\Delta y_n = \frac{y_n - y_{n+1}}{x_n - x_{n+1}}$, $\Delta^2 y_n = \frac{\Delta y_n - \Delta y_{n+1}}{x_n - x_{n+2}}$, $\Delta^3 y_n = \frac{\Delta^2 y_n - \Delta y_{n+1}}{x_n - x_{n+3}}$ u. s. w., und setzt man $\frac{\Delta y_3 + \Delta y_4}{2} = \delta_{3\frac{1}{2}}$, $\Delta^2 y_3 = \delta^2_3$, $\frac{\Delta^3 y_2 + \Delta^3 y_3}{2} = \delta^3_{2\frac{1}{2}}$, $\Delta^4_2 = \delta^4_2$ u. s. f., so ist seine Formel bis auf die Schreibweise gegeben durch:

---

1) *Opera* I, 524—525.

2) S. 107 daselbst sagt er: „De descriptione Curvae Parabolici generis per data quotcunque puncta, egerunt plures celebres Geometrae. Sed omnes eorum solutiones eaedem sunt cum hisce jam exhibitis; quae quidem a Newtonianis vix discrepant, uti constabit ex Lemmate quinto Libri tertii *Principiorum* et *methodo Differentiali* a D. Jones edita.“ — Speziell steht Newtons Formel (1) bei Stirling in Prop. XIX, p. 98, Formel (2) in Prop. XXIX, p. 140, Formel (3a) in Prop. XX, p. 106 und Formel (4a) in Prop. XX, p. 105.

$$y = y_4 + (x - x_4)\,\delta_{3\frac{1}{2}} + (x - x_4)\left(x - \frac{x_3 + x_5}{2}\right)\delta_3^2 + (x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)\,\delta_{2\frac{1}{2}}^3$$
$$+ (x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)\left(x - \frac{x_2 + x_6}{2}\right)\delta_2^4 + \cdots, \tag{5}$$

deren gesetzmäſsige Bildung leicht zu erkennen ist.[1])

Ist endlich die Anzahl der Ordinaten eine gerade, sind y_4 und y_5 die beiden mittleren, und setzen wir unter Beibehaltung der früheren Bedeutung der $\varDelta^n$, $\frac{y_4 + y_5}{2} = y'$, $\varDelta y_4 = \delta y_4$, $\frac{\varDelta^2 y_3 + \varDelta^2 y_4}{2} = \delta_{3\frac{1}{2}}^2$, $\varDelta^3 y_3 = \delta_3^3$, $\frac{\varDelta^4 y_3 + \varDelta^4 y_2}{2} = \delta_{2\frac{1}{2}}^4$ u. s. w., dann ist seine Formel:

$$y = y' + \left(x - \frac{x_4 + x_5}{2}\right)\delta_4 + (x - x_4)(x - x_5)\,\delta_{3\frac{1}{2}}^2$$
$$+ (x - x_4)(x - x_5)\left(x - \frac{x_3 + x_6}{2}\right)\delta_3^3$$
$$+ (x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)(x - x_6)\,\delta_{2\frac{1}{2}}^4$$
$$+ (x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)(x - x_6)\left(x - \frac{x_2 + x_7}{2}\right)\delta_2^5 + \cdots, \tag{6}$$

welche Newton in folgender Weise darstellt:

$$PQ = k + \pi l + \varrho m + \sigma n + \tau o + \upsilon p + \varphi q + \chi r + \psi s,$$

wo $k = y'$, $l = \delta_4$, $m = \delta_{3\frac{1}{2}}^2$, $n = \delta_3^3$, $o = \delta_{2\frac{1}{2}}^4$, u. s. w. ist, während

$$\pi = x - \frac{x_4 + x_5}{2}, \qquad \sigma = (x - x_4)(x - x_5),$$
$$\sigma = \varrho\left(x - \frac{x_3 + x_6}{2}\right), \qquad \tau = \varrho\,(x - x_3)(x - x_6),$$
$$\upsilon = \tau\left(x - \frac{x_2 + x_7}{2}\right), \qquad \varphi = \tau\,(x - x_2)(x - x_7),$$
$$\chi = \varphi\left(x - \frac{x_1 + x_8}{2}\right), \qquad \psi = \varphi\,(x - x_1)(x - x_8),$$

bedeuten; statt x_n schreibt er an seine Figur anknüpfend stets OA_n.

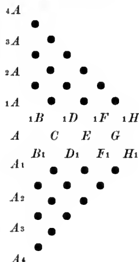
Newton hat also, was wir hiermit feststellen wollen, im Ganzen 6 verschiedene Interpolationsformeln gegeben, wovon die Formeln (1) und (2), die allein unter seinem Namen bekannt sind, in den Prinzipien, und die vier anderen, welche die Interpolation aus der Mitte in vollster Allgemeinheit behandeln, im *Methodus differentialis* angegeben wurden. Stirling dagegen hat nicht nur keine neue Interpolationsformel gegeben, sondern in seinen beiden Schriften nur die vier ersten Newtonschen Formeln verwendet.

Was nun die Ableitungen oder Beweise der Formeln anlangt, so hat Newton selbst nur die erste, Cotes die allgemeinere zweite Formel und Stirling (1) und (2) bewiesen, für die übrigen sind sie sämtlich die Beweise schuldig geblieben, Stirling sagt nur bezüglich der dritten und

1) Bei Newtons Schreibweise ist dies etwas schwieriger, da er die einzelnen Produkte in ausgerechneter Form angiebt.

vierten Formel: „Uterque autem casus facillime demonstratur ad modum Propositionis superioris," d. h. „wie die zweite Formel," was übrigens keineswegs so ganz einfach ist.

Ich habe schon oben bemerkt, daſs Cotes zuerst eine Ableitung der beiden ersten Theoreme Newtons gegeben hat; auſserdem fand sich aber in seinem Nachlasse noch eine längere Abhandlung[1]) mit dem Titel *Canonotechnia sive constructio tabularum per differentias*. In dieser geht er von einem anderen Gesichtspunkte aus als Newton: Statt nämlich eine Formel für die Interpolationskurve herzustellen, teilt er, da es ihm nur um die Tafelinterpolation zu thun ist, ähnlich wie Briggs, jedes der als gleich groſs angenommenen Intervalle zwischen den gegebenen Zahlen (Ordinaten) in n gleiche Teile, indem er sich $n-1$ Zwischenglieder eingeschaltet denkt, bildet dann die Differenzen dieser eingeschalteten Glieder („die quadratischen Differenzen") und zeigt, daſs und wie man dieselben aus den bekannten Differenzen der gegebenen Zahlen (den „runden Differenzen") zusammensetzen kann. Dadurch erscheinen dann schlieſslich die eingeschalteten Glieder selbst durch diese Differenzen dargestellt. Dabei giebt er die Formeln für die Zwei-, Drei- und Fünf-Teilung der Intervalle, und zwar wird die halbe Summe und die halbe Differenz je zweier gleichweit von der Mitte abstehender interpolierter Glieder *nur* durch die *mittleren Differenzen* ausgedrückt, so daſs also das Verfahren im Grunde mit Newtons dritter und vierter Methode zusammenstimmt.



Sind z. B. die gegebenen Zahlenwerte in der Schreibweise von Cotes $_1A, A_1$; $_2A, A_2$; $_3A, A_3$ u. s. w. und ist A das Mittelglied, während $_1B = {_1A} - A$, $B_1 = A - A_1$, $C = {_1B} - B_1 \cdots$ ist, wie das nebenstehende Schema zeigt, bedeutet ferner

$$B = \frac{_1B + B_1}{2},\quad D = \frac{_1D + D_1}{2} \text{ u. s. w.,}$$

und setzt man

$$(0) = A,\ (1) = \tfrac{1}{2}B,\ (2) = \tfrac{1}{4}C,\ (3) = \tfrac{1}{8}D \cdots,$$

im Falle die Intervalle in *zwei* Teile geteilt werden sollen, so findet man, wenn $_1a$ zwischen A und $_1A$, a_1 zwischen A und A_1, $_2a$ zwischen $_1A$ und $_2A$ u. s. w. eingeschaltet werden soll, die Gleichungen:

1) Im Anhang zur *Harmonia mensurarum* (1722), p. 36—71.

$$\frac{{}_1a + a_1}{2} = \textcircled{0} + \frac{1}{2}\textcircled{2} - \frac{1}{8}\textcircled{4} + \frac{1}{16}\textcircled{6} - \frac{5}{128}\textcircled{8} + \frac{7}{256}\textcircled{10}\cdots\cdot,$$

$$\frac{{}_1a - a_1}{2} = \textcircled{1} - \frac{1}{2}\textcircled{3} + \frac{3}{8}\textcircled{5} - \frac{5}{16}\textcircled{7} + \frac{35}{128}\textcircled{9} - \cdots\cdot,$$

$$\frac{{}_3a + a_3}{2} = \textcircled{0} + \frac{9}{2}\textcircled{2} + \frac{15}{8}\textcircled{4} - \frac{7}{16}\textcircled{6} + \frac{27}{128}\textcircled{8} - \frac{33}{256}\textcircled{10}\cdots\cdot,$$

$$\frac{{}_3a - a_3}{2} = 3\,\textcircled{1} + \frac{5}{2}\textcircled{3} - \frac{7}{8}\textcircled{5} + \frac{9}{16}\textcircled{7} - \frac{55}{128}\textcircled{9} + \cdots\cdot,$$

welche bis zur halben Summe und halben Differenz von ${}_9a$ und a_9 angeführt werden. Desgleichen teilt COTES alle Formeln bis zur Fünfteilung incl. explicite mit.

Das Bildungsgesetz der Coeffizienten dieser Formeln wird nicht *allgemein* angegeben, dagegen wird, wie schon erwähnt, die gesetzmäfsige Zusammensetzung der „runden Differenzen" aus den „quadratischen" erläutert. Anwendungen seiner Formeln hat COTES nicht gegeben, ebensowenig, wie er sie bewiesen hat.

Aufser COTES hat auch der Schotte JOHN CRAIG († 1731) eine Ableitung von NEWTONS Formeln in einer Schrift über die Fluxionenrechnung gegeben[1]), ich habe jedoch seinen *Tractatus de calculo fluentium* (London 1718) nicht selbst einsehen können. Dagegen lag mir ein Beweis der beiden ersten NEWTONschen Formeln von dem Petersburger Akademiker F. C. MAIER aus dem Jahre 1727 vor.[2]) Dieser nahm die Interpolationskurve in der Gestalt

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \cdots\cdot$$

an und bestimmte durch Einsetzen der zusammengehörigen Abscissen- und Ordinatenwerte und Auflösung der Gleichungen die Coeffizienten. Hierbei ging er bis zum dritten Grade in der Annahme der Interpolationskurve und verallgemeinerte dann ohne weiteres das gefundene Gesetz.

Praktischer verfuhr THEOPHILUS WALZ, welcher in einer *Commentatio in methodum interpolandi Newtonianam*[3]) Beweise für die ersten vier Formeln NEWTONS gab. Dabei nahm er allerdings auch die Form der Interpolationskurve mit unbestimmten Coeffizienten an, aber in einer Gestalt, die die Berechnung derselben erleichterte. Sollten z. B. den

---

1) Dies giebt THEOPHILUS WALZ an in einer Abhandlung in den Acta Eruditorum für das Jahr 1745, p. 129. — Vgl. auch ENESTRÖM, *Differenskalkylens historia*, S. 20.

2) *De usu interpolationis in solstitiorum momentis indagandis.* Commentarii Academiae scientiarum Petropolitanae 2 (für das Jahr 1727, publiziert 1729), 180—187.

3) Acta Eruditorum 1745, p. 129 ff. Fortsetzung dieser Abhandlung im Jahrgang 1746, p. 504.

Abscissenwerten $k, l, m, n \cdots$, die Ordinaten $a, b, c, d \cdots$ entsprechen, so mufste sich die Funktion für $x = k$ auf eine Constante a, für $x = l$ auf eine Funktion vom ersten, für $x = m$ auf eine vom zweiten Grade u. s. w. reduzieren, weshalb sie die Form:

$$y = a + B(x-k) + C(x-k)(x-l) + D(x-k)(x-l)(x-m) + \cdots$$

haben mufste. Die Coeffizienten $B, C, D \cdots$ liefsen sich dann leicht durch Einführung der zusammengehörigen Abscissen- und Ordinatenwerte bestimmen.

Auf diese Weise entwickelte er auch die Formeln (3) und (4) von NEWTON, schrieb aber die zweite bereits STIRLING zu, indem er (p. 141) sagte: „quae series cum Stirlingiana ad amussim conspirat."

Fast genau in derselben Weise hat dann 1758 CHARLES WALMESLEY (1721?—1797), wie es scheint ohne Kenntnis von WALZ' Abhandlung, die vier ersten Formeln abgeleitet.[1]) Dabei verallgemeinerte er die beiden Formeln (2) und (4) für die Interpolation aus der Mitte insofern etwas, als er annahm, dafs zwei einander entsprechende rechts und links von der Mitte liegende Abscissenpunkte untereinander gleiche, aber von den übrigen verschiedene Abstände besitzen. Die allgemeinsten Gleichungen (5) und (6) von NEWTON hat aber auch WALMESLEY nicht abgeleitet. Dagegen zeigte er, wie man die Formeln von COTES aus jenen NEWTONS erhalten kann, ohne jedoch den Namen COTES' zu nennen.

Soviel von den Beweisen der NEWTONschen Formeln! Unabhängig von NEWTON aber, d. h. nur mit Kenntnis der in den Prinzipien gegebenen Methode, behauptet JAKOB HERMANN in den Jahren 1704 und 1705 ein Interpolationsverfahren gefunden zu haben, auf das wir kurz hinweisen wollen.[2]) Seine Methode kommt darauf hinaus, die Interpolationskurve in der Form anzunehmen:

$$a_0 y = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \cdots + a_n f_n(x),$$

wobei er $y_\alpha = f_\alpha(x)$, $\alpha = 1, 2, \cdots n$, als Curven, die „curvae generatrices" deutet und zeichnet und die Coeffizienten $a_0, a_1, \cdots a_n$ als Gewichte ansieht. Setzt man dann für x $n+1$ Abscissenwerte ein, so erhält man ebenso viele Gleichungen zur Bestimmung der Coeffizienten $a_0, a_1 \cdots a_n$. Erhalten werden dieselben, wie bei NEWTON durch fortgesetzte Differenzenbildung. Bei seiner Darlegung nimmt HERMANN $n = 5$ an.

1) Mémoires de l'Académie des sciences de Berlin 1758, erschienen 1765, p. 219—270.

2) *Phoronomia sive de viribus et motibus corporum* (Amstelodami 1716), p. 389—393. Auf dieses Verfahren hat ebenfalls schon ENESTRÖM hingewiesen: a. a. O. p. 18—19.

Im Speziellen läfst er dann (p. 392) die „Curvae generatrices" Gerade sein, was darauf hinauskommt, die Gleichung in der Form

$$a_0\, y = a_1\,(x - \alpha_1) + a_2\,(x - \alpha_2) + \cdots\cdots + a_n\,(x - \alpha_n)$$

vorauszusetzen.

Ebenfalls unabhängig von Newton hat der dänische Astronom Peter Horrebow 1731 ein Interpolationsverfahren auseinandergesetzt[1]), das er von seinem Lehrer, dem berühmten Olaf Römer, erhalten zu haben angiebt; dasselbe unterscheidet sich jedoch nur wenig von Newtons erster Methode, so dafs wir nicht weiter darauf einzugehen brauchen.

Dagegen will ich zum Schlusse noch auf eine Thatsache hinweisen, die eines gewissen Interesses nicht entbehren dürfte. Nämlich die sogenannte Lagrangesche *Interpolationsformel*, welche Lagrange 1795 mitteilte[2]), ist keineswegs von ihm zuerst gegeben, sondern bereits 1776 von dem durch seine Arbeiten in der Algebra bekannten Engländer Eduard Waring. In einer am 9. Januar 1779 in der Royal Society gelesenen Abhandlung: *Problema concerning interpolation*[3]) nimmt er 1) die Interpolationskurve in der Gestalt an:

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots \tag{7}$$

und setzt für x die Werte α, β, γ, $\delta \cdots$ ein, wodurch sich für y die Werte s^α, s^β, s^γ, $s^\delta \cdots$ ergeben, dann ist:

$$y = \frac{(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\cdots}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)\cdots}\, s^\alpha + \frac{(x-\alpha)(x-\gamma)(x-\delta)\cdots}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)\cdots}\, s^\beta$$
$$+ \frac{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\delta)\cdots}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)\cdots}\, s^\gamma + \cdots\cdot$$

die Formel wird dadurch verifiziert, dafs $x = \alpha$, $x = \beta$, $x = \gamma \cdots$ eingesetzt wird. 2) wird die Interpolationskurve noch in der Gestalt:

$$y = ax^r + bx^{r+s} + cx^{r+2s} + dx^{r+3s} + \cdots$$

geschrieben, dann ergiebt sich für dieselben Wertepaare von x und y:

$$y = \frac{x^r(x^s-\beta^s)(x^s-\gamma^s)\cdots}{\alpha^r(\alpha^s-\beta^s)(\alpha^s-\gamma^s)\cdots}\, s^\alpha + \frac{x^r(x^s-\alpha^s)(x^s-\gamma^s)\cdots}{\beta^r(\beta^s-\alpha^s)(\beta^s-\gamma^s)\cdots}\, s^\beta + \cdots,$$

eine Formel, die ebenso verifiziert wird.

---

1) *Opera* Horrebowii III, 393—422.

2) Lagrange *Oeuvres* VII, p. 283—287; Edit. Serret. Leçons élémentaires sur les mathématiques, données à l'École normale 1795. Der Herausgeber giebt in einer Anmerkung an, dafs diese Lectionen zuerst erschienen in den beiden Ausgaben der Séances des Écoles normales, an III (1794—1795) und 17 Jahre später wieder abgedruckt wurden im Journal de l'École Polytechnique, VII et VIII cahiers t. II, 1812.

3) Philos. Trans. **69**, 1779, p. 59.

In einem zweiten Aufsatze: *On the Method of corresponding values*[1]) bemerkt Waring, dafs er diese Formeln schon im Jahre 1776 in den *Meditationes Analyticae* gegeben habe.[2]) Nun ist die erste Auflage dieses Werkes in den Jahren 1773, 4, 5, die zweite 1783[3]), 4 und 5 erschienen. Es kann also damit nur gemeint sein, dafs er die Methode schon 1776 hatte und sie in der 2. Auflage seines Buches publizierte. In der That findet sie sich auch daselbst p. 701—711 auseinandergesetzt. Sowohl hier als auch in der oben genannten zweiten Abhandlung hat er auch eine Ableitung seiner Formeln unter Benutzung unbestimmter Multiplikatoren, sowie Anwendungen auf verschiedene Probleme gegeben.

Lagrange dagegen giebt überhaupt keine Herleitung der Formel, sondern sagt nur, man könne aus dem Umstande, dafs aus Formel (7) für die Werte $x = p,\ q,\ r \cdots$ die Werte $y = P,\ Q,\ R \cdots$ folgen, unmittelbar auf die Form

$$y = \frac{(x-q)(x-r)(x-s)\cdots}{(p-q)(p-r)(p-s)\cdots}P + \frac{(x-p)(x-r)(x-s)\cdots}{(q-p)(q-r)(q-s)\cdots}Q + \cdots.$$

schliefsen, dabei bemerkt er noch, dafs man diese Formel leicht in die Newtons umformen könne.

Da es mir nur darum zu thun war, einige Irrtümer richtig zu stellen, die sich im Laufe der Zeit über den Anspruch der einzelnen Autoren auf die verschiedenen Methoden der Interpolationsrechnung verbreitet haben, so breche ich hier ab, so interessant es auch wäre, die Geschichte derselben noch weiter zu verfolgen.[4])

1) Philos. Trans. 79, 1789, part. II, p. 168.

2) „In the year 1776 I published in the *Meditationes Analyticae* a new method of differences for the resolution of the following problem" etc.; a. a. O., p. 168.

3) Dies steht auf dem Titelblatt der zweiten Auflage.

4) Bezüglich der neueren Litteratur über diesen Gegenstand mag auf die *Differenzenrechnung* von A. A. Markoff verwiesen werden, deutsch von Friesendorf und Prümm (Leipzig 1896).

Zur Geschichte der Entstehung des sogenannten Moivreschen Satzes.

Von A. von Braunmühl in München.

Man hat bisher allgemein angenommen, dafs de Moivre den nach ihm benannten Satz

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{m}{n}} = \cos\frac{m(\varphi + 2\varkappa\pi)}{n} + i\sin\frac{m(\varphi + 2\varkappa\pi)}{n}$$

zuerst in seinem Buche *Miscellanea analytica* (1730) veröffentlicht habe[1]), indem einige frühere Aufsätze desselben Autors, wie es scheint, übersehen wurden, aus denen hervorgeht, dafs er schon viel früher im Besitze des wichtigen Theorems war.

Zunächst veröffentlichte de Moivre in den Philosophical Transactions von 1707 eine kurze Notiz[2]), in welcher er eine gewisse Gattung von Gleichungen löste, „deren Wurzeln sich nach Art der Cardanschen Formel darstellen lassen“. Es waren dies folgende zwei:

$$ny \pm \frac{(n^2-1)n}{3!}y^3 + \frac{(n^2-1)(n^2-9)n}{5!}y^5 \pm \frac{(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)n}{7!}y^7 + \cdots = a$$

für ein ganzes und ungerades n, die eine mit lauter positiven, die andere mit abwechselnden Zeichen. In der letzteren erkennt man sofort, wenn $y = \sin\varphi$, $a = \sin n\varphi$ gesetzt wird, die Teilungsgleichung für den Sinus. Diese hatte Newton bereits in einem Briefe vom 13. Juni 1676, dem ersten für

1) Vgl. z. B. Cantor, *Geschichte der Mathematik*, III, p. 624. Ebenso R. Baltzer, *Die Elemente der Mathematik* (1879), I, 194.

2) Vol. 25, Nr. 309, p. 2368—2371: *Aequationum quarundam potestatis tertiae, quintae, septimae, nonae et superiorum ad infinitum usque pergendo, in terminis finitis, ad instar regularum pro Cubicis quae vocantur Cardani, resolutio analytica.* — Nachträglichen freundlichen Mitteilungen der Herren G. Eneström und P. Stäckel entnehme ich, dafs Herr Timtchenko in seiner 1899 erschienenen Geschichte der Funktionentheorie (vgl. Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, S. 128) das Vorkommen des Moivreschen Satzes in dieser Notiz von 1707 ausführlich dargelegt, sowie Newtons Brief von 1676 angeführt hat.

Leibniz bestimmten, angegeben[1]) und de Moivre hatte sie 1698 in den Philosophical Transactions bewiesen.[2])

In der genannten Abhandlung von 1707 gab nun de Moivre die Wurzeln dieser beiden Gleichungen ohne weitere Begründung in der Form an:

$$y = \tfrac{1}{2}\sqrt[n]{\sqrt{1+a^2}+a} - \tfrac{1}{2}\sqrt[n]{\sqrt{1+a^2}-a},$$

respektive:

$$y = \tfrac{1}{2}\sqrt[n]{a^2+\sqrt{a^2-1}} + \tfrac{1}{2}\sqrt[n]{a-\sqrt{a^2-1}}$$

und bemerkte, dafs, wenn $\frac{n-1}{2}$ eine ungerade Zahl ist, das Zeichen der an zweiter Stelle stehenden Wurzel umzukehren sei. Als spezielles Beispiel für die zweite Gleichung nahm er an, dafs $a < 1$, z. B. $a = \frac{61}{61}$ und etwa $n = 5$ ist, dann wird dieselbe

$$5y - 20y^3 + 16y^5 = \tfrac{61}{64},$$

und diese hat die Wurzel

$$y = \tfrac{1}{2}\sqrt[5]{\tfrac{61}{64} + \sqrt{-\tfrac{375}{4096}}} + \tfrac{1}{2}\sqrt[5]{\tfrac{61}{64} - \sqrt{-\tfrac{375}{4096}}},$$

welche, da man hier die fünfte Wurzel ausziehen kann,

$$y = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\sqrt{-15}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\sqrt{-15}\right) = \tfrac{1}{4}$$

giebt.

„Wenn aber“, so heifst es weiter, „die Wurzel nicht direkt ausgezogen werden kann, oder dies doch schwieriger scheint, so kann man es durch die gewöhnlichen Sinustafeln folgendermafsen bewerkstelligen: für den Radius 1 ist $a = \frac{61}{64} = 0{,}95312 = \sin 72^0\, 23'$, der fünfte Teil (weil $n = 5$ ist) dieses Winkels beträgt $14^0\, 28'$, und der Sinus hiervon ist 0,24981 oder näherungsweise $= \frac{1}{4}$. Gerade so verfährt man bei Gleichungen höherer Grade“. Durch dieses Beispiel giebt Moivre doch wohl zu erkennen, dafs er damals schon im Besitze seines Satzes war, indem seine Formel direkt in

$$y = \tfrac{1}{2}\sqrt[n]{\sin n\varphi + i\cos n\varphi} + \tfrac{1}{2}\sqrt[n]{\sin n\varphi - i\cos n\varphi} = \sin\varphi$$

übergeht. Diese Schreibweise findet sich allerdings bei ihm noch nicht, aber auch in den *Miscellanea analytica* heifst es[3]) fast genau so wie in dem eben besprochenen Aufsatze: wenn l und x die Cosinus zweier mit dem Halbmesser 1 beschriebener Bögen A und B sind und $A = nB$ ist, so ist

1) *Commercium epistolicum J. Collins* etc., edit. Biot et Lefort (Paris 1856), p. 106.

2) Phil. Trans. Nr. 240, p. 190—193.

3) Vgl. auch Cantor, *Geschichte der Mathematik* III, 624.

$$x = \tfrac{1}{2}\sqrt[n]{l + \sqrt{l^2 - 1}} + \tfrac{1}{2}\sqrt[n]{l - \sqrt{l^2 - 1}},$$

was, in unsere Schreibweise umgesetzt,

$$\cos B = \tfrac{1}{2}(\cos nB + i \sin nB)^{\frac{1}{n}} + \tfrac{1}{2}(\cos nB - i \sin nB)^{\frac{1}{n}}$$

giebt. *Der Unterschied ist nur der, daſs hier der Zusammenhang mit der Winkelteilung direkt ausgesprochen wird, während er im ersten Aufsatze absichtlich verschleiert und nur durch das Beispiel verraten ist.*

Übrigens hat DE MOIVRE vor dem Erscheinen der *Miscellanea* noch eine zweite Notiz in den Philosophical Transactions 1722 veröffentlicht[1]), die ebenfalls bisher keine Beachtung fand. In derselben sagt er: „Diejenigen, welche erkannt haben, durch welchen Kunstgriff ich im Jahre 1707 die Wurzeln der Gleichung (folgt die eben angeführte) fand, werden auch folgendes Theorem beweisen können: „Sind x und t die Sinus versus zweier beliebiger Längen, die sich wie $1 : n$ verhalten, und eliminiert man aus den beiden „*verwandten*" Gleichungen

$$1 - 2z^n + z^{2n} = -2z^n t \quad \text{und} \quad 1 - 2z + z^2 = -2zx$$

die Gröſse z, so giebt die entstehende Gleichung die Beziehung zwischen x und t".

Setzen wir, um die Bedeutung dieses Theorems zugänglicher zu machen, $x = \operatorname{sinv} \alpha = 1 - \cos \alpha$, $t = \operatorname{sinv} n\alpha = 1 - \cos n\alpha$, so heiſsen die beiden Gleichungen:

$$1 - 2z^n \cos n\alpha + z^{2n} = 0 \quad \text{und} \quad 1 - 2z \cos \alpha + z^2 = 0,$$

und die Elimination von z liefert

$$\sqrt[n]{\cos n\alpha \pm \sqrt{\cos^2 n\alpha - 1}} = \sqrt[n]{\cos n\alpha \pm i \sin n\alpha} = \cos \alpha \pm i \sin \alpha,$$

also genau dasselbe, was in den *Miscellanea* steht.

Acht Jahre nach Veröffentlichung der *Miscellanea analytica* kam DE MOIVRE noch einmal und zwar eingehender auf das Theorem zu sprechen, indem er in einem Briefe an WILLIAM JONES (1675—1749)[2]) die Berechnung sowohl der „möglichen" $\sqrt[n]{a + \sqrt{b}}$ als auch der „unmöglichen" $\sqrt[n]{a + \sqrt{-b}}$ auseinandersetzte, und erst hier gab er den Gedankengang einigermaſsen an, der ihn auf diese Betrachtung geführt zu haben scheint.

Da uns nur der zweite Fall der „unmöglichen" Wurzel interessiert, so

1) Phil. Trans. Nr. 374, p. 228—230: *De Sectione Anguli.*

2) *De Reductione Radicalium ad simpliciores terminos, seu de extrahenda radice quacunque data ex Binomio* $a + \sqrt{+b}$, *vel* $a + \sqrt{-b}$. Epistola. Phil. Trans. Vol. 40, 1738, N. 451, p. 463—478.

wollen wir sehen, wie MOIVRE diesen behandelte. Er setzte zunächst $n = 3$ und schrieb $\sqrt[3]{a + i\sqrt{b}} = x + i\sqrt{y}$ [1]), woraus dann x und y bestimmt wurden, indem er beiderseits auf den Kubus erhob und Reelles, wie Imaginäres gleichsetzte. Das gab zunächst

$$x^3 - 3xy = a \quad \text{und} \quad (3x^2 - y)\, i\sqrt{y} = i\sqrt{b},$$

und hieraus, indem man die Differenz aus den Quadraten der beiden Gleichungen bildet, $x^2 + y = \sqrt[3]{a^2 + b} = m$. Das giebt $y = m - x^2$, welcher Wert in die Gleichung eingesetzt,

$$4x^3 - 3mx = a$$

liefert, eine Gleichung, die, wie er schon vorher bewiesen hatte, durch Wegschaffen der Wurzeln aus:

$$2x = \sqrt[3]{a + i\sqrt{b}} + \sqrt[3]{a - i\sqrt{b}}$$

entsteht. Nun wufste er aber, dafs die Dreiteilungsgleichung für den Cosinus die Form

$$4x^3 - 3r^2x = r^2l$$

hat, wobei r der Radius, $l = r\cos A$ und $x = r\cos\frac{A}{3}$ ist, und durch Vergleich derselben mit $4x^3 - 3mx = a$ folgt: $m = r^2$, $a = r^2l$, also $r = \sqrt{m}$, $l = \frac{a}{m} = \sqrt{m}\cos A$. Ist jetzt C der ganze Kreisumfang, so bildet man, führt er weiter aus, die Bögen $\frac{A}{3}$, $\frac{C-A}{3}$, $\frac{C+A}{3}$, dann sind $x = \sqrt{m}\cos\frac{A}{3}$, $x = \sqrt{m}\cos\frac{C-A}{3}$, $x = \sqrt{m}\cos\frac{C+A}{3}$ die drei möglichen Wurzelwerte der obigen Gleichung. Der Grundgedanke, der MOIVRE die Lösung der Aufgabe ermöglichte, liegt also darin, dafs er die oben gefundene kubische Gleichung mit der Dreiteilungsgleichung identifizierte, deren Lösung seit VIETA bekannt und durch WALLIS vervollständigt war.

Führt man die gefundenen Werte

$$a = r^2l = \sqrt{m^3}\cos A,$$

$$b = m^3 - a^3 = m^3(1 - \cos^2 A) = m^3\sin^2 A,$$

$$x = \sqrt{m}\cos\frac{A}{3}, \cdots$$

und

$$y = m - x^2 = m\left(1 - \cos^2\frac{A}{3}\right) = m\sin\frac{A}{3}$$

in die Gleichung

$$\sqrt[3]{a + i\sqrt{b}} = x + i\sqrt{y}$$

---

1) $i = \sqrt{-1}$ schreibt natürlich MOIVRE nicht.

ein, was übrigens DE MOIVRE auch hier nur an einem speziellen Zahlenbeispiel ausführt, so erhält man

$$\left\{\sqrt{m^3}\,(\cos A + i \sin A)\right\}^{\frac{1}{3}} = \sqrt{m}\left\{\cos\frac{A}{3} + i \sin\frac{A}{3}\right\},$$

oder

$$\sqrt{m}\left\{\cos\frac{C-A}{3} + i\sin\frac{C-A}{3}\right\},$$

oder

$$\sqrt{m}\left\{\cos\frac{C+A}{3} + i\sin\frac{C+A}{3}\right\}.$$

Denselben Weg schlägt er nun für höhere Werte von n ein, indem er die mit der Teilungsgleichung zu identifizierende Gleichung bis $n = 7$ wirklich aufstellt und dann auf ein beliebiges n schliefst. Hierdurch findet er die Darstellung von $\sqrt[n]{a + i\sqrt{b}}$ in der Form $x + i\sqrt{y}$ mittelst folgender Vorschrift[1]): „Setzt man $\sqrt[n]{a^2 + b} = m$ und $\frac{n-1}{n} = p$ [2]), denkt sich einen Kreis mit dem Radius $\sqrt{m}$ beschrieben, nimmt auf ihm den Bogen A, dessen Cosinus $\frac{a}{m^p}$ ist, schreibt C für den ganzen Kreisumfang und bildet die Brüche $\frac{A}{n}$, $\frac{C-A}{n}$, $\frac{C+A}{n}$, $\frac{2C-A}{n}$, $\frac{2C+A}{n}$, $\frac{3C-A}{n}$, $\frac{3C+A}{n}$, etc., n an der Zahl, dann sind die Cosinus dieser Bögen für denselben Radius ebensoviele Werte von x, während $y = m - x^2$ ist. Hierbei ist zu beachten, dafs die Cosinus der Winkel, welche $< 90^0$ sind, positiv, die für Winkel $> 90^0$ negativ zu nehmen sind".

Endlich bemerkt DE MOIVRE noch, dafs wenn n eine gerade Zahl ist, gleich viele positive und negative Wurzeln erscheinen, wenn dagegen n ungerade und $\frac{n+1}{2}$ gerade ist, die Anzahl der positiven Wurzeln $\frac{n-1}{2}$, die der negativen $\frac{n+1}{2}$ betrage, für $\frac{n+1}{2}$ ungerade aber die erstere Anzahl $\frac{n+1}{2}$, die letztere $\frac{n-1}{2}$ sei.[3])

Beleuchten wir zum Schlusse noch den eigentümlichen Gedankengang mit einigen Worten, der DE MOIVRE zur Entdeckung seines wichtigen Theorems geführt hat. VIETA hatte bereits gefunden, dafs man den irreduzibeln Fall der CARDANschen Formel, der nach damaliger Ausdrucks-

1) A. a. O. 475.

2) Hier mufs $\frac{n-1}{2} = p$ stehen!

3) Dazu mag noch bemerkt werden, dafs er p. 474 a. a. O. ausdrücklich, im Gegensatz zu WALLIS und anderen, hervorhebt, dafs die ganze Reduktion nur mit Hülfe der trigonometrischen Funktionen möglich ist.

weise auf „unmögliche" Wurzeln führte, dadurch umgehen kann, dafs man die Gleichung dritten Grades mit der Dreiteilungsgleichung identifizierte. Daraus ergab sich also, dafs das Aggregat zweier unter einer gewissen Form auftretender dritter Wurzeln aus komplexen Zahlen ein reelles Resultat lieferte; indem nun de Moivre ähnliche Wurzelausdrücke mit höheren Wurzelexponenten bildete und successive durch Potenzieren rational machte, gelangte er dazu *dieselben* in seiner ersten Abhandlung von 1707 *als Lösungen der allgemeinen Teilungsgleichung der Sinusfunktion nachzuweisen*, d. h. mit anderen Worten, er konstruierte aus den Wurzeln die Gleichungen. Da aber andererseits aus der Natur dieser Gleichungen die Realität der Wurzeln folgte, so war gezeigt, dafs ein Ausdruck von der Form:

$$y = \frac{1}{2}\sqrt[n]{a + \sqrt{a^2 - 1}} + \frac{1}{2}\sqrt[n]{a - \sqrt{a^2 - 1}},$$

der für $a < 1$ unter imaginärer Gestalt erscheint, ein reelles Resultat ergeben mufs.

Die übrigen Abhandlungen bis zur letzten behandelten im Grunde genommen den nämlichen Gedanken in wenig veränderter Form, es wurde eigentlich nur statt der Teilung der Sinusfunktion die des Cosinus in Betracht gezogen; in der letzten Abhandlung jedoch machte Moivre einen wesentlichen Fortschritt nach zwei Richtungen: einmal versuchte er statt die *Summe zweier* spezieller Wurzeln aus komplexen Zahlen in reelle Gestalt überzuführen, *eine einzige* Wurzel von der Form $\sqrt[n]{a + i\sqrt{b}}$ auszuziehen und aufserdem gab er auch die *sämtlichen Lösungen*, die dieses Problem zuläfst, so dafs sein Theorem bis auf die Herstellung einer Endformel, wie sie nachmals Euler gab, in der allgemeinsten Form aufgestellt war. Was die Unzulänglichkeit des Beweises anlangt, so findet dieselbe ihre Begründung in den geringen Anforderungen an Strenge, wie man sie damals zur Zeit der Entstehung der Analysis überhaupt stellte.

Zur Geschichte der Trigonometrie im achtzehnten Jahrhundert.

Von A. von Braunmühl in München.

I. Die sogenannten Mollweideschen Gleichungen.

Der Astronom Mollweide (1774—1825) veröffentlichte 1808[1]) die trigonometrischen Gleichungen

$$(b+c):a = \cos\frac{B-C}{2} : \sin\frac{A}{2} \quad \text{und} \quad (b-c):a = \sin\frac{B-C}{2} : \cos\frac{A}{2},$$

welche sich auf ein Dreieck ABC beziehen, dessen Seiten a, b, c und dessen Winkel A, B, C sind, und jetzt ziemlich allgemein in den deutschen Lehrbüchern nach ihm den Namen „Mollweidesche Gleichungen" führen; und dennoch sind sie keineswegs von Mollweide zuerst aufgestellt und angewendet worden, wie ich im Folgenden nachweisen will.

Die eine dieser beiden Formeln findet sich schon in der *Arithmetica universalis* von Newton (1707). In dem Kapitel, welches die Überschrift führt: „Quomodo Quaestiones Geometricae ad aequationem redigantur" lautet nämlich das X. Problem: „Datis basi AB, summa laterum $AC+BC$, et angulo verticali C, determinare latera" und wird auf zwei Arten gelöst, von denen uns die zweite interessiert.

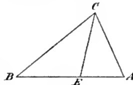


Fig. 1.

Halbiert CE in Fig. 1 den Winkel C, so ist $AB : AC + BC$ $(= AE : AC) = \sin ACE : \sin AEC$, eine Behauptung, die Newton nicht weiter beweist, da sie aus der Halbierung des Winkels unmittelbar folgt. In unserer Schreibweise heifst dies $c:(b+a) = \sin\frac{C}{2} : \sin AEC$, und da $\sin AEC = \sin\left(B+\frac{C}{2}\right) = \cos\frac{B-A}{2}$ ist, so stimmt die Formel mit der ersten Mollweideschen Gleichung überein, Newton hat nur $\sin AEC$ nicht durch $\cos\frac{B-A}{2}$ ersetzt. Da er aber angiebt, dafs nach Auffindung von $\sphericalangle AEC$ die Winkel A und B gefunden werden, indem man $\frac{C}{2}$ von $\sphericalangle AEC$ und

1) Zach, Monatliche Correspondenz **18**, 1808, 395—396.

dessen Supplement subtrahiert, so ist dieser Umstand von wenig Bedeutung.

Derjenige aber, welcher beide Formeln und zwar ganz genau in dem Wortlaute zuerst angab, in dem sie heute noch ausgesprochen werden, ist Friedrich Wilhelm Oppel (1710—1769). In seiner *Analysis triangulorum* (Dresdae et Lipsiae 1746) stellt er nämlich (p. 18, § 84 und § 85) die folgenden beiden Sätze auf:

„Basis trianguli est ad differentiam crurum ut sinus semisummae angulorum ad basin sitorum ad sinum semidifferentiae eorundem angulorum", und „Basis trianguli est ad summam crurum ut cosinus semisummae angulorum ad basin ad cosinum semidifferentiae eorundem".

Dieselben werden bewiesen, indem er zuerst den Tangentensatz: $(a+b):(a-b) = \operatorname{tg}\frac{A+B}{2} : \operatorname{tg}\frac{A-B}{2}$ geometrisch aufstellt und dann daraus $\cos\frac{A-B}{2}$ und $\sin\frac{A-B}{2}$ sucht. Hierdurch erhält er, die Tangente durch Sinus und Cosinus ausdrückend, zunächst:

$$\sin\frac{A-B}{2} = (a-b)\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\sqrt{(a+b)^2 - 4ab\sin^2\frac{A+B}{2}}}$$

und

$$\cos\frac{A-B}{2} = (a+b)\frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\sqrt{(a+b)^2 - 4ab\sin^2\frac{A+B}{2}}}.$$

Der Nenner dieser beiden Formeln ist aber nach dem Cosinussatze direkt gleich c, und somit sind die beiden gewünschten Formeln gefunden. In der eigentümlichen Schreibweise Oppels, in welcher er Friedrich Christian Maier nachfolgte[1]), lautet z. B. die erste dieser beiden Gleichungen: $v = (m-n)\,p : AB$, wo v den Sinus der halben Winkeldifferenz, p den der halben Winkelsumme, m und n die Schenkel des Dreiecks und AB dessen Basis bedeuten.

In dem gleichen Jahre mit Oppel veröffentlichte Thomas Simpson (1710—1761) seine *Trigonometry plane and spherical with the construction and application of the logarithms*, von welcher mir leider nur die zweite 1765 erschienene Auflage zu Gebote steht. In dieser aber finden sich ebenfalls die beiden Mollweideschen Gleichungen und zwar geometrisch abgeleitet.[2]) Wir wollen Simpsons Beweis der einen Formel hier mitteilen.

1) Vgl. hierüber meine Abhandlung *Die Entwickelung der Zeichen- und Formelsprache in der Trigonometrie*, diese Zeitschrift 1_3, 1900, S. 71—72.

2) p. 61, VII und 61—62, VIII. — Dafs sie sich schon in der ersten Auflage von 1746 finden, scheint mir nicht wahrscheinlich, da sie sonst Herr Cantor, der

Verlängert man in $\triangle\ ABC$, Fig. 2, AC um $CD = CB$, zieht $CE \parallel AB$ und fällt $CF \perp BD$, so ist $\sphericalangle\ D = \sphericalangle\ DBC$, also $\frac{1}{2} \sphericalangle\ ACB = \sphericalangle\ D$. Da ferner $\sphericalangle\ DCB = \sphericalangle\ A + \sphericalangle\ CBA$ ist, so hat man auch $\sphericalangle\ BCF = \sphericalangle\ DCF = \frac{1}{2}(\sphericalangle\ A + \sphericalangle\ CBA)$, und da $\sphericalangle\ ECF = \sphericalangle\ CBA - \sphericalangle\ BCF$ ist, so folgt: $\sphericalangle\ ECF = \frac{1}{2}(\sphericalangle\ CBA - \sphericalangle\ A)$. Nun

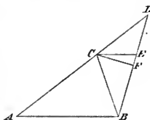


Fig. 2.

ist aber $AB : AD = \sin D : \sin ABD = \sin \frac{1}{2} BCA : \sin CED$ ($= \sin FEC = \cos ECF$), somit folgt schliefslich

$$AB : (AC + BC) = \sin \frac{C}{2} : \cos \frac{B - A}{2}.$$

Gleichzeitig mit der zweiten Auflage von Simpsons Trigonometrie erschien in Paris ein in mancher Beziehung bemerkenswertes Buch von A. R. Mauduit (1731—1815) mit dem Titel: *Principes d'Astronomie sphérique ou traité complet de trigonométrie sphérique* (1765). Darin finden sich ebenfalls die beiden Formeln angegeben (p. 83—84) und zwar genau in der Schreibweise Mollweides. Abgeleitet werden dieselben, wie dies Mauduit durchweg mit den Formeln der ebenen Trigonometrie macht, aus denen der sphärischen Trigonometrie. Er setzt zu diesem Zwecke in den beiden Neperschen Analogien[1]):

$$\operatorname{tg} \frac{b + c}{2} : \operatorname{tg} \frac{a}{2} = \cos \frac{B - C}{2} : \cos \frac{B + C}{2}$$

und

$$\operatorname{tg} \frac{b - c}{2} : \operatorname{tg} \frac{a}{2} = \sin \frac{B - C}{2} : \sin \frac{B + C}{2}$$

statt der Tangenten die Bögen und statt $B + C = 180^0 - A$, d. g. schliefslich:

$$b + c : a = \cos \frac{B - C}{2} : \sin \frac{A}{2}$$

und

$$b - c : a = \sin \frac{B - C}{2} : \cos \frac{A}{2}.$$

Was endlich Mollweides Ableitung anlangt, so bemerke ich nur, dafs er sie rechnerisch mit Hülfe des Sinussatzes bewerkstelligte, wie man dies auch heute noch gewöhnlich macht, doch bemerkte er noch, dafs sich die Formeln auch leicht geometrisch aufstellen lassen.

(*Geschichte der Mathematik* III, 514) diese bespricht, sicher angeführt hätte. Einen geometrischen Beweis gab auch R. Wolf, Grunerts Archiv der Mathem. 1846.

1) Die Neperschen Analogien selbst leitete Mauduit, der sich durchweg der Eulerschen Schreibweise der trigonometrischen Funktionen bediente, wie jener, durch Rechnung ab.

II. Graphische Ableitung der Hauptsätze der sphärischen Trigonometrie.

Bellavitis hat in seinem Lehrbuche der darstellenden Geometrie 1851[1]) eine Ableitung der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie aus dem Netze des zum Kugeldreieck gehörigen Dreikants, dessen Spitze im Kugelmittelpunkt liegt, gegeben, und Christian Wiener hat diese Konstruktion ebenfalls in sein Lehrbuch[2]) aufgenommen. Auch wurde ich darauf aufmerksam gemacht[3]), dafs schon der Jesuit Roger Josef Boscovich (1711—1787) aus drei Elementen des Dreikants die drei übrigen graphisch zu finden gelehrt habe.

Nun dürfte es durch frühere Mitteilungen von meiner Seite bekannt sein[4]), dafs graphische Methoden schon sehr lange verwendet wurden, um sphärische Dreiecke aufzulösen. So bedienten sich schon die Griechen der bekannten *Methode des Analemmas* (Orthogonalprojektion) hiezu, und der Jesuit Christoph Clavius (1537—1602) hat nicht nur diese Methode systematisch ausgebildet, sondern auch gezeigt, wie man mittelst der *stereographischen Projektion* die 6 Fundamentalaufgaben rein graphisch behandeln kann.[5])

Die Methode, deren sich der erwähnte Boscovich bediente[6]), ist im Grunde nicht viel von jener des Analemmas verschieden und bezieht sich nicht direkt auf das Netz des Dreikants, wie aus folgender gedrängten Darstellung seines Verfahrens hervorgehen dürfte. Ist in Fig. 3 ADQ ein Kugeldreieck und schneiden die Grofskreise AQ und DQ den Kreis AD respektive in G und F zum zweitenmale, projiziert man ferner Q senkrecht auf die Ebene des Kreises AD nach I, zieht die Sehnen $BIK \perp AG$, welche AG in L schneidet, und $NIE \perp DF$, welche DF in H trifft, so ist arc $AK =$ arc $AB =$ arc AQ, arc $DN =$ arc $DE =$ arc DQ und $\sphericalangle QHN = \sphericalangle ADQ$. Beschreibt man ferner über KB als Durch-

1) *Lezioni di Geometria descrittiva* (Padova 1851), p. 43.

2) *Lehrbuch der darstellenden Geometrie* (1884—1887), I, p. 113.

3) Durch gütige Mitteilungen der Herren Dr. Zelbr in Brünn und S. Haller in Freising.

4) *Beiträge zur Geschichte der Trigonometrie*; Abhandlungen der Kais. Leop.-Carol.-Deutschen Akademie LXXI, 1897, 1 und *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie* I (Leipzig 1900), 10—14 und an verschiedenen anderen Stellen.

5) Vgl. S. Haller, *Beitrag zur Geschichte der konstruktiven Auflösung sphärischer Dreiecke durch stereographische Projektion*; Biblioth. Mathem. 1899, 71—80.

6) Boscovich, *Trigonometriae sphericae constructio* (Romae 1737), abgedruckt in *Nouveaux œuvres de M. L'Abbé* Boscovich III, 1785, 209—217. — Ganz der gleichen Methode bediente sich, jedenfalls mit Kenntnis von Boscovichs Arbeiten, A. R. Mauduit in seinen *Principes d'Astronomie* (Paris 1765), p. 87—109.

messer einen Kreis in der Ebene $ADGB$ und fällt $IM \perp BK$, so ist arc $KM = \sphericalangle MLI = \sphericalangle DAQ$; ferner ist $IM = IQ$, und wenn man $Ih = IH$ macht, so folgt $\sphericalangle MhI = \sphericalangle QHI = ADQ$. Weiter ist noch zu beachten, daſs $IE = IH + HE = IH + QH = Ih + hM = Ie$ ist, wenn $he = hM$ auf der Linie BK gemacht wird. Die Methode beruht also in der Hauptsache darauf, daſs man den Parallelkreis KMB in die Ebene des Kreises $ADFB$ umklappt — ähnlich wie in der Figur des Analemmas.

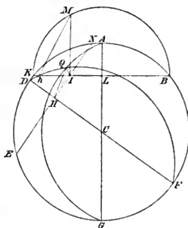


Fig. 3.

Diese Vorbereitungen genügen Boscovich, um *die sechs Fundamentalaufgaben der sphärischen Trigonometrie* zu lösen. Ich will als Beispiel für sein Verfahren die konstruktive Lösung der Aufgabe, aus den drei Seiten des Dreiecks die drei Winkel zu bestimmen, anführen.

Man trägt die drei Seiten AB, AD und DE auf einer Kreisperipherie (wie in Figur 4) ab, zieht die Durchmesser AC und DC, fällt $BLK \perp AC$ und $EHN \perp DC$ und erhält dadurch Punkt I; dann beschreibt man über KB als Durchmesser einen Halbkreis, errichtet $IM \perp KB$ und erhält arc KM gleich dem Winkel zwischen AB und DA. Um den Winkel zwischen AB und DE zu bekommen, zieht man $NN' \parallel BK$, verbindet N' mit E und erhält dadurch den Schnittpunkt I' auf BK, $I'M' \perp BK$ errichtet, giebt M', und arc KM' ist gleich dem gesuchten Winkel. Endlich erhält man den dritten Winkel, indem man $Ih = DH$ macht und hM zieht, dann ist derselbe gleich $\sphericalangle MhI$. Die Richtigkeit der Konstruktion ist auf Grund des Vorhergehenden leicht zu beweisen.

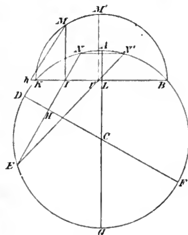


Fig. 4.

Boscovich hat es aber nicht versucht mit dieser Methode die

damals längst bekannten Fundamentalsätze der Kugeltrigonometrie abzuleiten.

Dagegen liegt mir eine solche Ableitung wenigstens des Cosinussatzes aus einer viel früheren Zeit vor, und zwar bediente sich John Caswell[1]) (um 1690), der dieselbe gab, direkt der *Methode das Dreikant in eine Ebene aufzuklappen.*

Sei in Fig. 5 CMA die eine Seitenfläche, dann klappt man die andere CMB um CM um, bis sie in die Ebene der ersteren zu liegen kommt, schlägt um M einen Kreis mit beliebigem Radius (etwa $= 1$) und macht arc CB' $=$ arc CB; ist dann β der Fufspunkt der von der Ecke B auf die Seitenfläche CMA gefällten Senkrechten, so liegt derselbe auf BB'; sind ferner βb und $B'l$ senkrecht AM und $\beta\gamma \parallel AM$, so folgt, wenn wir die Seiten des Dreiecks, wie gewöhnlich, mit a, b, c bezeichnen, direkt aus der Figur $bl = bA - Al$ $= \operatorname{sinv} c - \operatorname{sinv} (a - b)$; ist ferner δ der Fufspunkt der Senkrechten von B auf $M\alpha$ (welches $\perp CM$ steht), so hat man $B'F : \alpha M$ $= \beta B' : \alpha\delta$, und da $\triangle AEM \sim \triangle \beta\gamma B'$ ist, $AE : AM = bl : \beta B'$. Durch Multiplikation

Fig. 5.

dieser beiden Gleichungen ergiebt sich $(AE \cdot B'F) : 1 = bl : \alpha\delta$. Beachtet man nun, dafs $AE = \sin b$, $B'F = \sin a$ und $\alpha\delta = \operatorname{sinv} C$ ist, so erhält man die Gleichung

$$(\sin a \sin b) : 1 = [\operatorname{sinv} c - \operatorname{sinv} (a - b)] : \operatorname{sinv} C,$$

die leicht in die heute gebräuchliche Form des Cosinussatzes übergeführt werden kann.

Eine vollständige Darlegung der Methode, welche aus dem Triedernetz die Hauptgleichungen zu gewinnen lehrt, hat aber wohl zuerst Friedrich Wilhelm Oppel 1746 gegeben, den wir schon oben kennen lernten. Er leitete in seiner *Analysis triangulorum* den Sinus- und den Cosinussatz auf folgende Art ab.[2])

Zwei Seitenflächen ABE und AFB (Fig. 6) des Dreikants werden in die Ebene der dritten Seitenfläche $AEMF$ umgeklappt, dann wird AB

1) J. Caswell, über dessen Persönlichkeit ich nichts Näheres finden kann, hat eine Trigonometrie geschrieben, die in Wallis' *Opera* II, 861—880 veröffentlicht und in vieler Beziehung bemerkenswert ist. Die Ableitung des Cosinussatzes findet sich daselbst p. 874.

2) A. a. O. p. 51, § 58; p. 56, § 76.

= sin. tot. gemacht und $BE \perp AE$, $BF \perp AF$ gefällt. Diese Linien schneiden sich verlängert in M. Fällt man dann $M\beta \perp ME$ und $M\beta \perp MF$ und beschreibt mit EB, bezüglich BF Kreise um E und F, so schneiden diese die Punkte β auf jenen Senkrechten aus und erstere sind dann gleich weit von M entfernt. Zieht man noch $E\beta$ und $F\beta$, so sind die Winkel $ME\beta$ und $MF\beta$ die Neigungen der Körperwinkel an den Kanten AE und AF. Ist jetzt nach OPPELS Bezeichnungsweise, sin $BAF = b$, sin $BAE = d$, so folgt $BE : BF = d : b$, oder $E\beta : F\beta = d : b$; aber $E\beta : F\beta = \operatorname{cosec} \beta EM : \operatorname{cosec} \beta FM$ $= \sin \beta FM : \sin \beta EM$, also auch $d : b = \sin \beta FM : \sin \beta EM$, womit der Sinussatz für das Dreikant und also auch für das von ihm auf einer Kugel mit dem Radius AB = sin. tot. und dem Zentrum A ausgeschnittene Dreieck bewiesen ist.

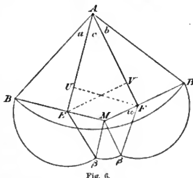


Fig. 6.

Für den Cosinussatz werden sogar *zwei Ableitungen aus verschiedenen Netzen* angegeben. Die erste schliefst sich an Fig. 6 an. Um sie übersichtlicher darstellen zu können, wollen wir folgende Bezeichnungen einführen. Es sei $\sphericalangle BAE = a$, $\sphericalangle MF\beta = \alpha$, $\sphericalangle FAB = b$, $\sphericalangle EAF = c$, dann ist nach einer von OPPEL schon in der ebenen Trigonometrie (§ 87 und 88, Sectio I) gegebenen Ableitung in Viereck $EAFM$

$$FM = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin c}.$$

Diese Formel aber wurde dort durch folgende ziemlich umständliche Rechnung gefunden. Fällt man $FU \perp AE$ und $EV \perp AF$ und setzt für einen Augenblick $AE = m$, $AF = n$, so folgt $EM : FM = \sin EFM : \sin MFE = \cos FEA : \cos EFA$; aber $\cos FEA = \frac{EU}{EF} = \frac{m - n \cos c}{EF}$ und $\cos EFA = \frac{FU}{FE} = \frac{n - m \cos c}{EF}$, also folgt

$$EM : FM = (m - n \cos c) : (n - m \cos c).$$

Beachtet man ferner, dafs $FM^2 + n^2 = ME^2 + m^2$ ist und setzt EM aus obiger Proportion in diese Gleichung ein, dann bekommt man nach einiger Reduktion

$$FM = \frac{m - n \cos c}{\sin c} = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin c}$$

Nun ist aber $FM : F\beta = FM : \sin b = \cos \alpha$, also folgt schliefslich:

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}.$$

Bei der zweiten Ableitung bedient sich Oppel des Netzes in Fig. 7. Darin ist $\triangle CD\beta$ das Neigungsdreieck des Winkels $C\beta D = \alpha$, die Winkel an den Punkten B sind rechte und AB ist der Sinustotus, den wir 1 setzen. Seine Methode besteht nun darin, dafs er sowohl auf das $\triangle CD\beta$, als auch auf $\triangle CDA$ den ebenen Cosinussatz anwendet und die hierdurch gewonnenen Werte von CD^2 einander gleichsetzt. Beachtet man dann, dafs $C\beta = CB = \frac{\sin b}{\cos b}$, $D\beta = DB = \frac{\sin c}{\cos c}$, $AC = \frac{1}{\cos b}$, $AD = \frac{1}{\cos a}$, $\sphericalangle CAD = a$ und $\sphericalangle C\beta D = \alpha$ ist, so ergiebt eine einfache Reduktion der gefundenen Formel den gewünschten Satz. In beiden Ableitungen berücksichtigt Oppel, der im Gegensatze zu den meisten seiner Zeitgenossen die Zeichen der Funktionen für Winkel im zweiten Quadranten richtig zu bestimmen versteht, auch den Fall, dafs der Winkel α ein stumpfer ist.

Fig. 7.

Die Schreibweise, in welcher er seine zahlreichen Formeln aufstellt, ist, wie schon bemerkt, jener von C. F. Maier nachgebildet, und es lautet z. B. die Formel des Cosinussatzes bei ihm:

$$b \cdot c\sqrt{a^2 - e^2} = a\left(\pm a\sqrt{a^2 - d^2} \mp \sqrt{a^2 - b^2}\sqrt{a^2 - c^2}\right),$$

wobei a der Sinustotus ist, b unsern $\sin b$, c unsern $\sin c$, $d = \sin a$ und $e = \sin\alpha$ bezeichnet. Bemerkenswert ist noch, dafs Oppel ausdrücklich hervorhebt, dafs der Sinus- und Cosinussatz genügen, um sämtliche Formeln der sphärischen Trigonometrie abzuleiten[1]), und auch zeigt, wie man zu jeder seiner Formeln direkt die reziproke finden kann, indem man sich der Eigenschaften des Supplementardreiecks bedient.

Auf die elegantere Ableitung der Fundamentalformeln durch Bellavitis, 1851, die jede Rechnung entbehrlich macht, will ich hier nicht eingehen, da sie durch Wieners *Darstellende Geometrie* für Jedermann leicht zugänglich ist.

1) A. a. O., p. 60 § 89.

Beiträge zur Geschichte der Funktionentheorie im achtzehnten Jahrhundert.

Von PAUL STÄCKEL in Kiel.

1. In der Abhandlung: *Integration durch imaginäres Gebiet* (diese Zeitschrift 1_3, 1900, 109—128, im folgenden mit **I.** angeführt) habe ich gezeigt, dafs CAUCHYS *Mémoire sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires* vom Jahre 1825, womit man die Geschichte der Funktionen einer komplexen Veränderlichen zu beginnen pflegt, in Wahrheit als das Endglied einer Kette von Untersuchungen aufzufassen ist, die von LEIBNIZ und JOHANN BERNOULLI über D'ALEMBERT und EULER bis LAPLACE und POISSON reicht. Durch Mitteilungen der Herren BURKHARDT, LIPSCHITZ und OSGOOD, denen ich auch an dieser Stelle für ihre Freundlichkeit bestens danke, bin ich darauf aufmerksam geworden, dafs für die Geschichte der Funktionentheorie im achtzehnten Jahrhundert noch eine zweite Reihe von Untersuchungen in Betracht kommt, an denen CLAIRAUT und D'ALEMBERT, EULER und LAGRANGE beteiligt sind; während es sich dort um die Ausbildung und Verfeinerung der Integralrechnung handelte, sind hier Probleme der Hydrodynamik der Ausgangspunkt für die analytischen Entwickelungen.

2. CLAIRAUT hat in seinem klassischen Werke: *Théorie de la figure de la terre, tirée des principes de l'hydrostatique* (Paris 1743) die mathematische Figur der Erde als diejenige Niveaufläche einer gleichförmig rotierenden, gravitierenden Flüssigkeitsmasse aufgefafst, von der die Oberfläche der freien Weltmeere ein Teil ist. Damit die Flüssigkeitsmasse ihre Form beständig beibehält, mufs bei jedem in sich zurückkehrenden Kanal in der Meridianebene (xy-Ebene) Gleichgewicht herrschen. Berechnet man also die Wirkung (Arbeit) der Gravitation auf einen unendlich schmalen Kanal OSN, so mufs man dasselbe Resultat erhalten wie für irgend einen andern Kanal, der ebenfalls von O nach N führt. Werden die Komponenten der Kraft in Bezug auf die y- und x-Axe mit P und Q bezeichnet, so ist jene Wirkung (Arbeit) gleich

$$\int (P dy + Q dx),$$

das Integral erstreckt über die Kanalkurve. Die Bedingung des Gleichgewichtes besteht also darin, dafs der Wert des Integrals unabhängig vom Wege OSN ist, oder wie Clairaut sagt (S. 37): „ne dépende pas de la courbure de OSN, c'est à dire de la valeur particulière de y en x“. „Il faut donc“, fährt er fort, „que $Pdy + Qdx$ puisse s'intégrer sans connaître la valeur de x, c'est à dire qu'*il faut que* $Pdy + Qdx$ *soit une différentielle complète, afin qu'il puisse y avoir équilibre dans le Fluide*“. Um aber zu erkennen, ob das der Fall sei, müsse man sich eines Theorems bedienen, das er in den Abhandlungen der Akademie für das Jahr 1740 gegeben habe[1]), nämlich nachsehen, ob die Gleichung

$$\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dy}$$

identisch in x und y erfüllt sei.

Man erkennt hieraus, dafs die Frage, wann ein über eine Kurve erstrecktes Integral vom Wege unabhängig ist, bereits von Clairaut aufgeworfen und — abgesehen von den Stetigkeitsbedingungen — richtig beantwortet worden ist. Welche Rolle diese Frage bei den funktionentheoretischen Untersuchungen Cauchys und Riemanns spielt, braucht hier nicht auseinandergesetzt zu werden[2]).

3. Nachdem d'Alembert bereits 1744 einen *Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides* veröffentlicht hatte, ist er, veranlafst durch eine Preisaufgabe der Berliner Akademie, in dem *Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides* (Paris 1752) auf die Hydrodynamik zurückgekommen. In eine homogene, schwerelose Flüssigkeit, bei der sämtliche Teilchen sich in derselben Richtung mit derselben Geschwindigkeit bewegen, denkt er sich (Kapitel IV) einen festen Körper gebracht, der an seinem Orte verharrt, und sucht die alsdann sich herausbildende stationäre Bewegung der Flüssigkeit zu bestimmen. Durch Betrachtungen, die zu kritisieren ebenso leicht als nutzlos sein würde, gelangt er dazu die Lösung des Problems auf die analytische Aufgabe zurückzuführen, zwei Funktionen q und p von x und z zu finden, die den Gleichungen:

$$dq = Adx + Bdz,$$

$$dp = Bdx - Adz - \frac{pdz}{z}$$

1) *Sur l'intégration ou la construction des équations différentielles du premier ordre* (Mem. Paris, Année 1740 (1742), 294).

2) Nicht weniger bedeutungsvoll ist Clairauts Untersuchung für die Mechanik, tritt doch bei ihm an dieser Stelle bereits der Begriff des Potentials auf, den man gewöhnlich auf Lagrange zurückführt (vgl. auch E. Schering, *C. F. Gauss und die Erforschung des Erdmagnetismus*, S. 68; Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, **34**, 1887).

genügen, oder, was auf dasselbe herauskommt, zu untersuchen, wann gleichzeitig $Adx + Bdz$ und $zBdx - zAdz$ vollständige Differentiale sind.

Um diese Frage leichter zu lösen, sagt D'ALEMBERT (S. 60), wolle er damit beginnen, die einfachere Annahme zu untersuchen, daſs gleichzeitig $Mdx + Ndz$ und $Ndx - Mdz$ vollständige Differentiale, dq und dp, sein sollen. Alsdann ist

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\partial q}{\partial x}, \qquad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial z},$$

folglich sind $qdx + pdz$ und $pdx - qdz$ ebenfalls vollständige Differentiale, mithin auch, indem man das zweite mit $\sqrt{-1}$ multipliziert und zum ersten addiert, bez. vom ersten subtrahiert,

$$(q + \sqrt{-1}\,p)\left(dx + \frac{dz}{\sqrt{-1}}\right) \quad \text{und} \quad (q - \sqrt{-1}\,p)\left(dx - \frac{dz}{\sqrt{-1}}\right),$$

und daher ist $q + \sqrt{-1}\,p$ eine Funktion von $x + \frac{z}{\sqrt{-1}}$ allein, $q - \sqrt{-1}\,p$ eine Funktion von $x - \frac{z}{\sqrt{-1}}$ allein. Damit p und q reell ausfallen, muſs man irgend zwei Funktionen $\xi(u)$ und $\zeta(u)$ nehmen, die keine imaginären Konstanten enthalten, und hat dann zu setzen:

$$q = \xi\left(x + \frac{z}{\sqrt{-1}}\right) + \xi\left(x - \frac{z}{\sqrt{-1}}\right) + \sqrt{-1}\,\zeta\left(x + \frac{z}{\sqrt{-1}}\right) - \sqrt{-1}\,\zeta\left(x - \frac{z}{\sqrt{-1}}\right),$$

$$p = \frac{\xi\left(x + \frac{z}{\sqrt{-1}}\right)}{\sqrt{-1}} - \frac{\xi\left(x - \frac{z}{\sqrt{-1}}\right)}{\sqrt{-1}} + \zeta\left(x + \frac{z}{\sqrt{-1}}\right) + \zeta\left(x - \frac{z}{\sqrt{-1}}\right);$$

unter der Annahme, daſs ξ und ζ ganze rationale Funktionen dritten Grades sind, werden diese Ausdrücke explicite hergestellt (S. 61—63[1]).

Daſs D'ALEMBERT eine für die damalige Zeit recht schwierige Aufgabe mit solcher Eleganz gelöst hat, beruht wohl darauf, daſs er wie kein andrer dazu vorbereitet war. Denn erstens hatte er im Jahre 1746 die Differentialgleichung der schwingenden Saite integriert[2]) und dabei ein ganz ähnliches Verfahren angewandt. Er ersetzte nämlich die Gleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

durch die Forderung, daſs gleichzeitig $pd\tau + qdx$ und $qd\tau + pdx$ vollständige Differentiale, du und dy, werden sollen, und fand, indem er diese

1) Auf diese Stelle hat bereits 1899 Herr TIMTSCHENKO (vgl. I. S. 128) aufmerksam gemacht, der auch verschiedene der später zu nennenden Arbeiten von D'ALEMBERT, EULER und LAGRANGE anführt.

2) Mém. Berlin, Année 1747 (1749), 215—216.

Ausdrücke addierte bez. subtrahierte, dafs $y + u$ eine Funktion von $\tau + x$ allein, $y - u$ eine Funktion von $\tau - x$ allein sein mufs, woraus sofort

$$y = \Psi(\tau + x) + \Gamma(\tau - x)$$

folgt. Zweitens aber lag gerade d'Alembert die Verwendung der Imaginären nahe, da er sich bereits 1746 mit der Untersuchung imaginärer Ausdrücke eingehend beschäftigt hatte[1]).

Es ist auffallend, dafs d'Alembert bei der Behandlung der ursprünglichen Aufgabe, dafs $dq = Adx + Bdz$ und $dp = zBdx - zAdz$ gleichzeitig vollständige Differentiale sein sollen, von dem für $Adx + Bdz$ und $Bdx - Adz$ gewonnenen Ergebnisse gar keinen Gebrauch macht, dafs er vielmehr sofort p als Potenzreihe in x und z mit unbestimmten Koeffizienten ansetzt, für die sich Gleichungen aus der Integrabilitätsbedingung für dq ergeben, und es könnte scheinen, als ob er nur die Gelegenheit benutzt hätte, ein dem eigentlichen Gegenstande seines Werkes ganz fremdes Theorem, auf das er Wert legte, zu veröffentlichen, wenn er es nicht in den beiden letzten Kapiteln für Aufgaben der Hydrodynamik nutzbar machte. Er betrachtet in Kapitel VIII gewisse Bewegungen einer Flüssigkeit in einem Gefäfse, das er der Einfachheit halber als eben ansieht. Sind P und Q die Komponenten der Geschwindigkeit eines Teilchens, das sich zur Zeit t im Punkte x, z befindet, so findet er, dafs $P = p \cdot t$, $Q = q \cdot t$ sein mufs, wo p und q durch die Gleichungen:

$$dq = Adx + Bdz, \qquad dp = Bdx - Adz$$

bestimmt sind (S. 182). In Kapitel IX wird das Strömen von Flüssen behandelt, wobei wieder die Beschränkung auf Bewegungen in der xz-Ebene eintritt. Ohne jede nähere Begründung werden genau dieselben Gleichungen für p und q aufgestellt und dazu wird bemerkt, dafs demnach die Oberfläche des Flusses durch die Gleichung:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{q}{p} = \sqrt{-1}\,\frac{\Delta\left(x + \frac{z}{\sqrt{-1}}\right) + \Delta\left(x - \frac{z}{\sqrt{-1}}\right)}{\Delta\left(x + \frac{z}{\sqrt{-1}}\right) - \Delta\left(x - \frac{z}{\sqrt{-1}}\right)}$$

bestimmt sei (S. 186).

Zusammenfassend werden wir sagen dürfen, dafs d'Alembert, durch ein Problem der Hydrodynamik veranlafst, die partiellen Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\partial q}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial z}$$

betrachtet und entdeckt hat, dafs sie erfüllt sind, wenn p und q den

1) Vgl. I. S. 112—113.

reellen und imaginären Teil einer Funktion des Argumentes $x + \frac{z}{\sqrt{-1}}$ bedeuten (wobei er sich jedoch auf solche Funktionen beschränkt, die für reelles Argument reell sind), eine Einsicht, für die ich in meiner schon angeführten Abhandlung nur eine im Jahre 1777 verfafste, aber erst 1793 veröffentlichte Arbeit EULERS anführen konnte. Erinnert man sich noch daran, in welch genialer Weise D'ALEMBERT bereits 1746 die Theorie der imaginären Ausdrücke behandelt hatte, so wird man auf seine Untersuchungen einen Ausspruch übertragen dürfen, den Herr LIPSCHITZ in Bezug auf eine sogleich zu besprechende Arbeit von EULER geäufsert hat[1]), dafs nämlich darin bereits *alle diejenigen Begriffe berührt sind, aus welchen sich die gegenwärtige Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen entwickelt hat.*

4. Eine neue Epoche für die Hydrodynamik beginnt mit drei Abhandlungen EULERS aus dem Jahre 1755, in denen die noch gegenwärtig geltende Theorie entwickelt wird[2]). Hier kommt nur der Schlufsabschnitt der dritten Abhandlung (S. 353—361) in Betracht. Die Koordinaten eines Teilchens der Flüssigkeit bezeichnet EULER mit x, y, z, die Komponenten seiner Geschwindigkeit nach den Axen der x, y, z mit u, v, w. Die Bedingung der Inkompressibilität ist dann

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Besonders einfach, sagt EULER, wird die Untersuchung der Bewegung einer inkompressiblen Flüssigkeit, wenn man die Annahme macht, dafs

$$u dx + v dy + w dz$$

ein vollständiges Differential sei (S. 353), und die Differentialgleichungen lassen sich sogar integrieren, wenn man sich auf die Betrachtung einer Bewegung in einer Ebene, etwa der xy-Ebene, beschränkt. In diesem Falle ist nämlich $w = 0$, also

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

folglich $u dy - v dx$ ein vollständiges Differential, während gleichzeitig auch $u dx + v dy$ integrabel sein soll. Man findet daher u und v „*par la méthode fort ingénieuse de M. D'ALEMBERT*". Damit u und v reell ausfallen, ist zu setzen:

1) Journ. für Mathem. **100** (1887), 111.

2) *Principes généraux de l'état de l'équilibre des fluides; Principes généraux du mouvement des fluides; Continuation des recherches sur la théorie du mouvement des fluides*; Mém. Berlin, Année 1755 (1757), 217—273, 274—315, 316—361.

$$u - iv = \frac{1}{2}\varphi(x+iy) - \frac{i}{2}\psi(x+iy),$$

$$u + iv = \frac{1}{2}\varphi(x-iy) + \frac{i}{2}\psi(x-iy).$$

Will man u und v in reeller Form erhalten, so braucht man nur die Funktionen φ und ψ nach Potenzen ihrer Argumente zu entwickeln. Ist nämlich:

$$\varphi(p) = A + Bp + Cp^2 + Dp^3 + \cdots,$$

$$\psi(p) = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}p + \mathfrak{C}p^2 + \mathfrak{D}p^3 + \cdots,$$

wo die Koeffizienten als reell vorausgesetzt werden, so ergiebt die Substitution

$$p = x \pm iy = s(\cos w \pm i \sin w)$$

für u und v die reellen Ausdrücke:

$$u = A + Bs\cos w + Cs^2\cos 2w + Ds^3\cos 3w + \cdots$$
$$+ \mathfrak{B}s\sin w + \mathfrak{C}s^2\sin 2w + \mathfrak{D}s^3\sin 3w + \cdots,$$
$$v = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}s\cos w + \mathfrak{C}s^2\cos 2w + \mathfrak{D}s^3\cos 3w + \cdots$$
$$- Bs\sin w - Cs^2\sin 2w - Ds^3\sin 3w - \cdots$$

Auch die Kurven, welche die Flüssigkeitsteilchen beschreiben und die durch die Gleichung $udy - vdx = 0$ definiert werden, also die *Stromlinien*, wie man jetzt sagt, ergeben sich bei diesem Ansatz ohne weiteres, ihre Gleichung wird

$$\left.\begin{array}{l} As\sin w + \frac{1}{2}Bs^2\sin 2w + \frac{1}{3}Cs^3\sin 3w + \cdots \\ -\mathfrak{A}s\cos w - \frac{1}{2}\mathfrak{B}s^2\cos 2w - \frac{1}{3}\mathfrak{C}s^3\cos 3w - \cdots \end{array}\right\} = \text{const.}$$

Derselben Gleichung genügen auch die *Wände* des ebenen Gefäfses, in dem sich die Flüssigkeit befindet.

Eulers Darlegungen sind in physikalischer wie mathematischer Beziehung bemerkenswert. *Sein Verfahren, Bewegungen einer ebenen, inkompressiblen Flüssigkeit zu ermitteln, ist genau dasselbe, das Helmholtz im Jahre 1868 angegeben hat*[1]. Allerdings fehlt bei Euler, was Helmholtz' Abhandlung auszeichnet: die Durchführung an physikalisch interessanten Beispielen. Dieser Mangel ist nicht zufällig. Er hat seinen Grund in den Schwierigkeiten, die für die Mathematiker des achtzehnten Jahrhunderts bei der expliciten Herstellung des reellen und rein imaginären Teiles einer Funktion komplexen Argumentes zu überwinden waren. Eulers Methode der Reihenentwicklung ist hierfür augenscheinlich nur

1) *Über discontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen*; Monatsberichte Berlin 1868, 223–227 (= *Wissenschaftliche Abhandlungen*, Bd. I, Berlin 1882, 153–157).

ein Notbehelf. Das hat er wohl selbst gefühlt, denn er ist wiederholt auf diesen Gegenstand zurückgekommen[1]), der auch seine Zeitgenossen lebhaft beschäftigt hat. Ein Beweis hierfür sind D'ALEMBERT und LAGRANGE, die in ihrem Briefwechsel und in ihren Schriften die Gleichung $f(x + iy) = M(x, y) + i N(x, y)$ mit Aufwand von großem Scharfsinn behandelt haben[2]). Keiner der zwei genannten Autoren ist jedoch zu einer befriedigenden Lösung gekommen, was auch unmöglich war, solange die Begriffe *Funktion* und *analytischer Ausdruck* als identisch angesehen wurden. In der Erkenntnis der Diskrepanz dieser Begriffe liegt der wesentliche Fortschritt, der im neunzehnten Jahrhundert gemacht worden ist.

5. Bei D'ALEMBERT und EULER treten Funktionen einer komplexen Veränderlichen auf im Zusammenhange mit der Integration der simultanen partiellen Differentialgleichungen *erster Ordnung:*

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\partial q}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial z},$$

dagegen wird nicht erwähnt, dafs p und q derselben partiellen Differentialgleichung *zweiter Ordnung*

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0$$

genügen. Zum ersten Male scheint diese Gleichung in dem ersten, 1761 erschienenen Bande der *Opuscules mathématiques* von D'ALEMBERT aufzutreten, der in der Abhandlung: *Recherches sur les vibrations des cordes sonores* (Bd. I, S. 11) sagt, bei anderen als den üblichen Annahmen über die Kräfte komme man für die schwingende Saite zu der Differentialgleichung

$$-\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

der durch

$$y = \varphi(x + \sqrt{-1}\, t) + \Delta(x - \sqrt{-1}\, t)$$

genügt werde.

Derselbe Band enthält eine Abhandlung: *Remarques sur les lois du mouvement des fluides* (S. 137—168), in der D'ALEMBERT EULERS Ab-

1) Vgl. z. B. *Institutiones calculi integralis*, t. III, Petersburg 1770, S. 197, 314, 317; Nova Acta Petrop. XII, ad annum 1794 (1801), 3—21 und XIV, ad annum 1798 (1803), 62—74.

2) Die betreffenden Briefe von D'ALEMBERT und LAGRANGE, die aus den Jahren 1765 und 1766 stammen, sind abgedruckt in den *Oeuvres* von LAGRANGE, t. XIII (Paris 1882), S. 22—46. Für D'ALEMBERT ist anzuführen *Opuscules mathématiques*, t. V, Paris 1768, S. 41—67 und 95—131, für LAGRANGE *Oeuvres*, t. I (Paris 1867), S. 498—514 (= Misc. Taurinensia III, 1762—1765).

handlung vom Jahre 1755 kritisiert, ohne freilich Euler beim Namen zu nennen. Es handelt sich hauptsächlich um die Gestalt der Wände des Gefäfses. Euler hatte behauptet, dafs man dafür beliebige Kurven nehmen dürfe, denn jede Funktion $f(x, y)$ lasse sich als der reine imaginäre Teil einer Funktion von $x + iy$ auffassen (in der i nicht explicite vorkommt). Dazu bemerkt d'Alembert, in der Forderung, $f(x, y)$ solle der rein imaginäre Teil einer Funktion von $x + iy$ sein, liege eine Beschränkung; das zeige schon das einfache Beispiel $f(x, y) = x + y$. Wenn er aber weiter geht und erklärt, falls man $f(x, y)$ nicht auf die verlangte Form bringen könne, so lasse sich die Bewegung der Flüssigkeit dem Kalkül nicht unterwerfen, so geht er zu weit, und mit Recht hat Lagrange dagegen Einspruch erhoben[1]).

6. Es verdient hervorgehoben zu werden, dafs d'Alemberts Methode, die simultanen partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\partial q}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = +\frac{\partial q}{\partial z}$$

mittelst Funktionen komplexen Argumentes zu integrieren, bereits im achtzehnten Jahrhundert eine wichtige und folgenreiche Anwendung erfahren hat, und zwar durch Lagrange. Ich meine seine Abhandlung: *Sur la construction des cartes géographiques* vom Jahre 1779[2]). Das Problem, eine Rotationsfläche in den kleinsten Teilen ähnlich auf eine Ebene abzubilden, erfordert, dafs eine Gleichung der Form:

$$dx^2 + dy^2 = m^2 (du^2 + dt^2)$$

integriert wird. Lagrange leistet die Integration, indem er

$$dx = \alpha du - \beta dt, \qquad dy = \beta du + \alpha dt$$

setzt, und auf diese Gleichungen, wie er ausdrücklich bemerkt, die Methode von d'Alembert anwendet. Danach wird

$$dx \pm i dy = (\alpha \pm i\beta)(du \pm i dt)$$

und daher

$$x + iy = f(u + it), \qquad x - iy = F(u - it).$$

In der That folgt aus diesen Gleichungen

$$dx^2 + dy^2 = f'(u + it) \cdot F'(u - it)(du^2 + dt^2),$$

sodafs alles auf die Bestimmung der Funktionen eines komplexen Argumentes f und F zurückgeführt ist.

Bei der Bedeutung, welche die konforme Abbildung durch Riemann

1) *Oeuvres*, t. I, Paris 1867, S. 445 (= Misc. Taurinensia II, 1760—1761).

2) *Oeuvres*, t. X, Paris 1869, S. 635—692 (= Mém. Berlin, Année 1779 (1781), 161—210).

und seine Nachfolger für die Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen gewonnen hat, erschien es angebracht, festzustellen, dafs es sich hier um Ideen handelt, für die nach der geometrischen Seite LAGRANGE, nach der analytischen D'ALEMBERT als erste Urheber zu nennen sind.

7. Die Hauptergebnisse der vorhergehenden Untersuchung lassen sich dahin formulieren, dafs D'ALEMBERT im Jahre 1752, veranlafst durch eine Aufgabe aus der Hydrodynamik, die partiellen Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\partial q}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial z}$$

mittelst Funktionen komplexen Argumentes integriert und spätestens im Jahre 1761 die Beziehung dieser Funktionen zu der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0$$

erkannt hat. Seine Integrationsmethode ist von EULER für ein Problem der Hydrodynamik (1755), von LAGRANGE für die Theorie der geographischen Karten (1772)[1]) nutzbar gemacht worden, freilich nur in beschränktem Umfange, weil den Mathematikern des 18. Jahrhunderts die Trennung des reellen und imaginären Bestandteils von Funktionen einer komplexen Veränderlichen Schwierigkeiten machte.

Das sind Vervollständigungen für die Geschichte der Funktionen-

1) LAGRANGE hatte sein Verfahren schon im Jahre 1772 seinem Kollegen von der Berliner Akademie, J. H. LAMBERT, mitgeteilt, der es in dem dritten Bande der *Beyträge zum Gebrauch der Mathematik und deren Anwendung*, Berlin 1772, S. 156—157 veröffentlicht hat. Für die Integration der Gleichungen

$$dy = + n\,d\mu + m\,d\lambda,$$
$$dx = - m\,d\mu + n\,d\lambda$$

durch

$$x \pm iy = f(i\mu \pm \lambda)$$

verweist LAMBERT auf BOUGAINVILLE, *Traité du Calcul intégral*, P. II [Sect. I], Chap. 16 Probl. 2 [S. 140]. Dieses Werk war in Paris 1756 erschienen. In der That enthält die angeführte Stelle einen Beweis dafür, dafs die Ausdrücke $v\,dt + \beta\,ds$ und $v\,ds + \beta n\,dt$, wo n eine Konstante bedeutet, dann und nur dann gleichzeitig vollständige Differentiale werden, wenn man

$$\beta\sqrt{n} \pm v = f(t\sqrt{n} \pm s)$$

setzt; dazu wird S. 143 bemerkt, dafs keine Schwierigkeit entstehe, wenn $\sqrt{n}$ imaginär ausfalle, denn man könne das Imaginäre in β und v stets zum Verschwinden bringen. Da BOUGAINVILLE in der Vorrede (P. II, S. IV) ausdrücklich angiebt, dafs er fast alle in seinem Buche auseinandergesetzten Integrationsmethoden den Abhandlungen D'ALEMBERTS entnommen habe, so gilt dies gewifs im besonderen für den vorliegenden Fall.

theorie. Allein die Bedeutung dieser Ergebnisse ist bei weitem gröfser. Sie sind ein neuer Beleg dafür, wie tief die Mathematik des 19. Jahrhunderts im 18. Jahrhundert wurzelt, sie zeigen, wie dringend notwendig es ist die Geschichte der Mathematik bis zum Beginn des 19. Jahrhunderts weiter zu führen. Auf der andern Seite aber lassen sie erkennen, wie schwer es sein wird, zu einer befriedigenden Lösung dieser Aufgabe zu gelangen. Denn dafür genügt keineswegs, dafs man die mathematische Litteratur im engern Sinne des Wortes durchforscht, es mufs vielmehr die Forderung gestellt werden, dafs die gesammte Litteratur der angewandten Mathematik, also im besondern der Astronomie und Physik, einer genauen Durchsicht auf ihren mathematischen Gehalt hin unterzogen wird, eine Forderung, deren Durchführung mehr als eine Verdoppelung der zu leistenden Vorarbeiten bedeutet. Wird sie einmal durchgeführt, so wird sich gewifs in noch höherem Mafse, als es bis jetzt nachgewiesen werden kann, herausstellen, dafs die grofsen allgemeinen Theorien, die den Stolz des 19. Jahrhunderts bilden, aus der Vertiefung in spezielle Aufgaben der angewandten Mathematik hervorgegangen sind, die im 18. Jahrhundert gestellt und behandelt wurden.

Die bisherigen Darstellungen genügen dieser Forderung noch nicht, ja man wird sagen dürfen: *die Geschichte der Mathematik des 18. Jahrhunderts mufs noch geschrieben werden.*

Kiel im Oktober 1900.

Nachtrag

zu der Abhandlung: „Integration durch imaginäres Gebiet“ (1_3, 1900, 109—128).

Im Jahre 1831 hat, wie ich S. 120 bemerkte, Poisson die Gleichung

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi\,(\alpha + e^{-ix})\,dx = \varphi\,(\alpha)$$

aufgestellt, die 1840 von Cauchy wieder entdeckt wurde und bei ihm eine fundamentale Rolle spielt. Die Herren Burkhardt in Zürich und Loria in Genua hatten die Freundlichkeit, mir mitzuteilen, dafs diese und eine noch allgemeinere Formel bereits im Jahre 1816 von Giuseppe Frullani angegeben worden ist, der in dem Werke *Ricerche sopra le serie e sopra l'integrazione delle equazioni a differenze parziali* (Firenze 1816) und in der Abhandlung *Sopra la dipendenza fra i differenziali delle funzioni e gli integrali definiti* (ricevuta li 4. Febbrajo 1818), Mem. mat. della Soc. italiana **18** (Modena 1820), 458—517 die Formeln herleitet:

$$(1)\qquad f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \left(f(e^{i\varphi}) + f(e^{-i\varphi})\right) d\varphi,$$

$$(2)\qquad \frac{1}{m!}\left(\frac{d^m f(x)}{dx^m}\right)_{x=0} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(f(e^{i\varphi}) + f(e^{-i\varphi})\right)\cos m\varphi\, d\varphi.$$

Freilich hat Frullani mit seinen Formeln nichts anzufangen gewufst, vielmehr ist er bei dem Versuche sie anzuwenden sofort in ein Labyrinth von Schwierigkeiten geraten, aus dem er sich nicht herausfinden konnte. Er setzt nämlich

$$f(x) = \frac{2x}{nx^2 + 2x + n}$$

und findet alsdann für den Wert der reellen Seite von (2):

$$\pm \frac{1}{\sqrt{1-n^2}}\left[\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^m - \left(\frac{1+\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^m\right],$$

für den Wert der linken Seite dagegen:

$$\pm \frac{2}{\sqrt{1-n^2}}\cdot\left[\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right]^m.$$

Frullani sucht den Widerspruch dadurch zu heben, dafs er annimmt, eine Funktion $F(\cos\varphi)$ lasse sich auf verschiedene Arten in eine trigonometrische Reihe entwickeln. Allein der wahre Grund, warum die Gleichung (2) versagt, besteht darin, dafs die Entwickelung von $f(x)$ nach Potenzen von x für $|x| = 1$ divergiert, dafs also die Voraussetzungen für die Gültigkeit dieser Gleichung nicht erfüllt sind.

Karl Peterson (1828—1881).

Von PAUL STÄCKEL in Kiel.

1.

In verschiedenen neueren Abhandlungen aus dem Gebiete der Flächentheorie wird der russische Mathematiker KARL PETERSON erwähnt[1]), dessen Leistungen längere Zeit nicht beachtet worden waren, und dessen Namen man in POGGENDORFFS *Biographisch-litterarischem Handwörterbuch* (Bd. I bis III) vergebens sucht. Etwas über PETERSONS Leben und Arbeiten zu erfahren, war freilich nicht ganz leicht, und nur der liebenswürdigen Unterstützung der Herren KNESER (damals in Dorpat, jetzt in Berlin) und MLODZJEJOWSKIJ (in Moskau) verdanke ich es, wenn ich im Folgenden darüber einen kurzen Bericht erstatten kann.



KARL PETERSON[2]) ist am 13. Mai (alten Stils) 1828 zu Riga geboren als Sohn des Bürgers MICHAEL PETERSON und seiner Gattin MARIA geb. MANGELSOHN; beide Familiennamen deuten auf Abstammung von germanisierten Letten. Nachdem er das Gymnasium in Riga absolviert

1) H. A. SCHWARZ, *Miscellen aus dem Gebiete der Minimalflächen*; Journ. für Mathem. **80** (1875), 288 (= *Ges. Abhandlungen*, Bd. I, S. 176).

B. MLODZJEJOWSKIJ, *Untersuchungen über die Biegung von Flächen;* Gelehrte Berichte der Kaiserlichen Universität zu Moskau **7** (1887) (russisch) und: *Sur la déformation des surfaces*; Bullet. des sc. mathém. (2) **15** (1891), 17.

A. VOSS, *Zur Theorie der Krümmung der Flächen*; Mathem. Ann. **39** (1891), 205,

P. STÄCKEL, *Über Abbildungen*. Mathem. Ann. **44** (1894), 558, 564; *Sur la déformation des surfaces*, C. R. Paris **123** (1896), 678; *Biegungen und conjugierte Systeme*; Mathem. Ann. **49** (1897), 255—256, und: *Beiträge zur Flächentheorie: VI. Zur Theorie der Spiralflächen*, Ber. Leipzig 1898, 15—17.

2) Das *Album Academicum der Kaiserlichen Universität Dorpat, herausgegeben*

hatte, wurde er am 28. Juli 1847 an der Universität Dorpat immatrikuliert, wo er bis 1852 Mathematik und Naturwissenschaften studiert hat.

Professoren der Mathematik waren damals Karl Eduard Senff (1810—1849) und Ferdinand Minding (1806—1885). Senff war ein Schüler von Bartels (1769—1836). Es ist bekannt, dafs Bartels sich besonders für die analytische Geometrie des Raumes interessierte. Zwei von ihm gestellte, diesem Gebiete angehörende Preisaufgaben wurden von Senff gelöst; die betreffenden Abhandlungen sind erschienen unter den Titeln: *Systematische Darstellung der Hauptsätze der analytischen Geometrie im Raume* (Dorpat 1829) und *Theoremata principalia e theoria curvarum et superficierum* (Dorpat 1831). Senff selbst sagt, dafs nur wenige seiner Sätze sein Eigentum seien, dafs er vielmehr im wesentlichen nur Ideen von Bartels wiedergebe. Es verdient das um so mehr hervorgehoben zu werden, als in der zweiten Schrift die Theorie der Raumkurven in origineller Weise behandelt und ein Teil der Resultate vorausgenommen wird, die später Paul Serret[1]) gefunden hat. Bei Senff hat Peterson eine Vorlesung über die Theorie der krummen Linien und Flächen gehört.

Minding ist der erste gewesen, der die von Gauss begründete Theorie der *Biegung krummer Flächen*[2]) weitergeführt hat; die Bedeutung

von A. Kasselblatt *und* G. Otto (Dorpat 1889) enthält eine kurze Notiz über Petersons Leben. Dabei wird der Name „Petersohn“ geschrieben; jedoch hat Peterson selbst das h weggelassen, wie auch der Titel seiner noch zu besprechenden Schrift *Ueber Curven und Flächen* zeigt.

1) *Théorie nouvelle géométrique et mécanique des courbes à double courbure,* Paris 1860; vgl. auch meinen Hinweis auf Senff Mathem. Ann. **45** (1894), 351.

2) Angaben über Untersuchungen, die vor Gauss nach dieser Richtung hin angestellt worden sind, findet man in meiner Abhandlung *Bemerkungen zur Geschichte der geodätischen Linien*; Ber. Leipzig 1893, 452—455. Mir war jedoch damals eine Abhandlung von Euler entgangen, auf die ich nachträglich hinweisen möchte, nämlich: *Problema invenire duas superficies, quarum alteram in alteram transformare licet, ita ut in utraque singula puncta homologa easdem inter se teneant distantias.* Sie findet sich Opera postuma, t. I, Petropoli 1862, S. 494—496. Wie S. 496 angegeben ist, steht sie auf Seite 10 bis 13 des ersten Bandes der „Adversaria mathematica“, eines Handbuches, das Euler von 1766 bis 1775 geführt hat, und stammt demnach wahrscheinlich aus dem Anfange dieses Zeitraumes. Euler denkt sich die Koordinaten t, u, v der ersten und x, y, z der zweiten Fläche durch zwei unabhängige Veränderliche r und s ausgedrückt und findet als Bedingung für die Gleichheit der Abstände entsprechender unendlich naher Punkte der Flächen das Bestehen der drei Gleichungen:

$$\left(\frac{\partial t}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2=\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2,$$

$$\left(\frac{\partial t}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)^2=\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2,$$

seiner Untersuchungen, die er in den Jahren 1838 bis 1840 in CRELLES Journal veröffentlichte, ist in dem Laufe der Jahre immer mehr hervorgetreten[1]). Seine Vorlesungen sind denn auch die Veranlassung geworden, dafs PETERSON sich mit diesem Gegenstande beschäftigt und ihn zum Thema seiner Kandidatenschrift gewählt hat, die er am 23. Juli 1853 der Universität Dorpat einreichte.

PETERSONS Kandidatenschrift, der MINDING das Prädikat *ausgezeichnet* erteilte, ist noch in den Akten der Universität Dorpat erhalten. Herr KNESER hat die Freundlichkeit gehabt, mir über ihren Inhalt ausführliche Mitteilungen zu machen, denen ich Folgendes entnehme. In dem ersten vorbereitenden Teile behandelt PETERSON die Theorie der Kurven auf Flächen, und zwar hauptsächlich ihre geodätische und normale Krümmung mit besonderer Berücksichtigung der Krümmungslinien. Der zweite, nicht ganz durchgearbeitete Teil bezieht sich auf die Biegung der Flächen. Die Koeffizienten in dem Ausdrucke des Linienelementes E, F, G bestimmen die Gesamtheit der zu einer Linienelemente gehörigen Biegungsflächen. Nimmt man aber hinzu die beiden Hauptkrümmungsradien r_1, r_2 und den

---

$$\frac{\partial t}{\partial r}\frac{\partial t}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial s}=\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial s},$$

also genau dieselben Gleichungen, die GAUSS sechzig Jahre später in § 12 der *Disquisitiones generales circa superficies curvas* angegeben hat. „Quemadmodum autem per methodos cognitas iis satisfieri oporteat, neutiquam patet, opusque maxime arduum videtur.“ Er giebt alsdann ein Beispiel, das, wie man leicht erkennt, die Biegung von Kegeln in Kegel bedeutet, und schliefst mit einer Bemerkung, die angeführt zu werden verdient. Eine überall geschlossene körperliche Figur lasse keine Veränderungen zu. Solange also die Kugelfläche oder überhaupt eine geschlossene Fläche unversehrt sei, lasse sie keine Veränderungen zu. Indessen sei klar, dafs die Figur der Halbkugel sicher veränderlich ist; was für Veränderungen sie aber erleiden könne, das zu ermitteln scheine eine schwierige Aufgabe zu sein. Dieselbe Behauptung, dafs geschlossene Flächen sich als Ganzes nicht biegen lassen, ist 1812 von LAGRANGE, 1838 von MINDING ausgesprochen worden, aber erst in neuester Zeit ist es Herrn LIEBMANN geglückt, ihre Richtigkeit für geschlossene Flächen positiven Krümmungsmafses nachzuweisen (Mathem. Ann. **43** (1900), 81—112).

In Verbindung mit dieser Notiz EULERS möge noch bemerkt werden, dafs er in Briefen an LAGRANGE vom 16. Januar und 9. März 1770 (*Oeuvres de* LAGRANGE, t. XIV (Paris 1892), S. 217—218, 221—223, vgl. auch S. 234), erzählt, er habe mittels einer sehr sonderbaren Betrachtung das Problem gelöst, x, y, z als Funktionen von t und u so zu bestimmen, dafs die Gleichung

$$dx^2+dy^2+dz^2=dt^2+du^2$$

besteht, d. h. alle auf eine Ebene abwickelbaren Flächen zu finden.

1) Vgl. auch A. KNESER, *Übersicht der wissenschaftlichen Arbeiten* FERDINAND *MINDINGS nebst biographischen Notizen*; Zeitschr. für Mathem. **45** (1900), Hist. Litt. Abt. 113—128.

Winkel φ, den die eine Krümmungslinie mit der einen Koordinatenlinie macht, so wird dadurch eine spezielle Fläche bis auf ihre Lage im Raum eindeutig festgelegt. Die Gröfsen r_1, r_2, φ dürfen aber nicht willkürlich angenommen werden, vielmehr bestehen zwischen E, F, G, r_1, r_2, φ und deren Ableitungen erster und zweiter Ordnung drei Gleichungen. Zum Schlufs giebt PETERSON einen Ansatz, wie man diese Gleichungen wirklich aufstellen kann.

Hierzu möchte ich einige Bemerkungen machen. Die Gröfsen r_1, r_2, φ sind den drei „Fundamentalgröfsen zweiter Ordnung" L, M, N äquivalent. Bezeichnet man nämlich die Winkel, welche die erste Krümmungslinie mit den beiden Koordinatenlinien macht, bez. durch φ und φ', so gelten die Relationen[1]):

$$L = E\left(\frac{\cos^2\varphi}{r_1} + \frac{\sin^2\varphi}{r_2}\right),$$

$$M = \sqrt{EG}\left(\frac{\cos\varphi\cos\varphi'}{r_1} + \frac{\sin\varphi\sin\varphi'}{r_2}\right),$$

$$N = G\left(\frac{\cos^2\varphi'}{r_1} + \frac{\sin^2\varphi'}{r_2}\right);$$

dabei ist

$$\cos(\varphi' - \varphi) = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

PETERSONS Behauptung läuft also darauf hinaus, dafs die Fläche, bis auf ihre Lage im Raume, durch die 6 Fundamentalgröfsen $E, F, G; L, M, N$ eindeutig bestimmt ist, ein Theorem, das später von OSSIAN BONNET bewiesen worden ist[2]). Aber auch nach andrer Richtung sind PETERSONS Betrachtungen von Interesse. Für die Bestimmung von Biegungsflächen ist es vielfach vorteilhaft, die Gröfsen L, M, N durch andere, zweckmäfsig gewählte Gröfsen zu ersetzen. Im besondern hat Herr LIPSCHITZ hierfür die Gröfsen r_1, r_2 und den „Stellungswinkel" σ eingeführt, d. h. den Winkel den die Projektion der x-Axe auf die Tangentialebene mit der ersten Krümmungslinie bildet[3]). Man erkennt nun sofort, dafs der Winkel φ mit dem Winkel σ identisch wird, wenn die Koordinatenlinien $p = \text{const.}$ dadurch definiert werden, dafs ihre Tangenten aus der Tangentialebene der Fläche immer durch Normalebenen ausgeschnitten werden, die einer festen Richtung im Raume parallel sind. Was endlich die drei Gleichungen zwischen den 6 Gröfsen $E, F, G; r_1, r_2, \varphi$ angeht, deren Existenz PETER-

1) Vgl. etwa KNOBLAUCH, *Einleitung in die allgemeine Theorie der krummen Flächen*, Leipzig 1888, S. 58—59.

2) Journ. Éc. Pol. Cah. **42** (1867), 31; vgl. auch RUNGE, *Dissertation*, Berlin 1880 und LIPSCHITZ, Sitzungsber. Berlin 1883, 541.

3) Sitzungsber. Berlin 1883, 169—188.

son erkannt und die er aufzustellen versucht hat, so sind sie augenscheinlich äquivalent den drei Fundamentalgleichungen, die Mainardi (1856) und nach ihm Codazzi entdeckt haben. Man erkennt hieraus, daſs Peterson bei seinen Untersuchungen sich auf dem richtigen Wege befunden hat, dessen weitere Verfolgung ihn zu den wichtigsten Sätzen der neueren Theorie der Biegungen geführt haben würde.

Der erste Teil der Kandidatenschrift enthält ein schönes Theorem, das noch nicht bekannt zu sein scheint. Es sei gestattet die betreffenden Ausführungen, zugleich als Probe von Petersons Schreibart, hier wiederzugeben.

„Der Satz, daſs eine Evolute in der Evolutenfläche kürzeste Linie ist, gestattet eine interessante Verallgemeinerung. Ist uns nämlich eine Curve auf einer developpablen Fläche gegeben, so können wir ihre Beziehung zur Fläche am einfachsten ausdrücken durch ihre Neigung φ gegen die Fläche[1]), ihr Azimuth ω gegen die Geraden der Fläche und ihre Entfernung l von der Repercussionscurve der Fläche. Eine Gleichung $f(l, \omega, \varphi, t) = 0$, wo t das gemeinsame Argument der gegebenen Curve und der Fläche oder ihrer Repercussionscurve ist, drückt daher im allgemeinen eine Eigenschaft der Curve auf der Fläche aus. Ist nun die Fläche gegeben und die Eigenschaft einer gesuchten Curve auf derselben, so hat diese Curve keine willkürliche Constante, wenn die Eigenschaft unabhängig von ω und φ ist, eine Constante, wenn sie unabhängig von φ ist (z. B. die Evolventen $\cos\omega = 0$), zwei Constanten, wenn sie von φ abhängt (z. B. die kürzesten Linien $\cos\varphi = 0$). Umgekehrt, wird eine Fläche gesucht, in der eine gegebene Curve eine gegebene Eigenschaft haben soll, so hat diese Fläche 0, 1 oder 2 Constanten, je nachdem die Eigenschaft unabhängig von l und ϑ, unabhängig von l oder allgemein (abhängig von l) gegeben ist. Ist also $f(\varphi, t) = 0$ gegeben, so läſst sich die Fläche ohne Constante (d. h. ohne Integration) bestimmen. Ist $f(\varphi, \omega, t) = 0$ gegeben, so hat die Fläche oder ihre Repercussionscurve eine Constante; wird diese eliminiert oder stetig geändert, so liegen diese Repercussionscurven in einer Fläche, deren Charakteristik bei constantem t sich in endlicher Form darstellen läſst. Sollen nun diese Repercussionscurven zu der Fläche, in der sie liegen, constante Neigung haben, so muſs

$$\cos\omega = \operatorname{tang}\left(\frac{\varphi}{c} + f(t)\right)$$

1) Peterson versteht unter Neigung einer Kurve gegen eine Fläche, in der sie liegt, den Winkel, den die Schmiegungsebene der Kurve mit der Tangentialebene der Fläche in einem Punkte der Fläche bildet. „Ebene einer Kurve“ bedeutet ihre Schmiegungsebene.

die gegebene Eigenschaft sein (c ist die Tang. der constanten Neigung). Setzen wir z. B. $\frac{1}{c} = 0$, so folgt

$$\cos\omega = \operatorname{tang}(f(t)),$$

oder

$$\omega = f(t)$$

ist die Bedingung, unter der die Repercussionscurven in ihrer Fläche kürzeste Linien werden (z. B. $\omega = \text{const.}$, wo die Repercussionscurven Evoluten der gegebenen Curve werden).

Bezeichnen wir nämlich die Cosinus der Winkel, welche die Erzeugungsgerade der developpablen Fläche mit Tangente, Normale und Radius der Curve bildet[1]), mit $\xi, \eta\ \zeta$, so ist

$$\xi = \cos\omega, \qquad \eta = \sin\omega\ \sin\varphi, \qquad \zeta = \sin\omega\ \cos\varphi,$$

und wir haben für die Coordinaten eines Punktes der Fläche:

$$u = \xi l, \qquad v = \eta l, \qquad w = \zeta l.$$

Differenzieren wir diese Gleichungen bei constantem t, so verhalten sich die Determinanten[2]) der Normale der gesuchten Fläche wie

$$(\eta dw - \zeta dv) : (\zeta du - \xi dw) : (\xi dv - \eta du)$$
$$= (\eta d\zeta - \zeta d\eta) : (\zeta d\xi - \xi d\zeta) : (\xi d\eta - \eta d\xi).$$

Die Determinanten der Ebene der Repercussionscurve sind $0, \cos\varphi, -\sin\varphi$, folglich ist der Cos. ihrer Neigung gegen die Fläche

$$\text{(A)} \qquad \frac{(\zeta d\xi - \xi d\zeta)\cos\varphi - (\xi d\eta - \eta d\xi)\sin\varphi}{\sqrt{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}} = \frac{d\omega}{\sqrt{d\omega^2 + \sin^2\omega\, d\varphi^2}}$$

bei constantem t. — q. e. d."

Ist nämlich, so meint PETERSON, $\omega = f(t)$, so folgt aus (A), dafs der Cosinus der Neigung gegen die Fläche verschwindet, und mithin ist die Reperkussionskurve (Rückkehrkante) eine kürzeste Linie der Fläche.

2.

Über PETERSONS späteres Leben läfst sich nur wenig berichten. Er ist von Dorpat nach Moskau übergesiedelt, wo er als Lehrer der Mathematik an der Peter-Paul-Schule der evangelischen Gemeinde eine Anstellung fand; er soll ein zurückgezogenes Leben geführt und wenig Verkehr ge-

1) Normale = Binormale.

2) Determinante = Richtungscosinus einer Geraden, Determinante einer Ebene = Richtungscosinus der Normale der Ebene nach BARTELS, *Vorlesungen über math. Analysis*, Dorpat 1837, S. 258.

habt haben. Wann er nach Moskau kam, hat sich nicht ermitteln lassen. Jedenfalls finden wir ihn im September 1864 erwähnt als Mitglied des „Mathematischen Vereins“, der gröfstenteils aus Dozenten an der Universität bestand und dessen Vorsitzender Prof. Braschmann (1796—1866) war. Als im Jahre 1867 aus dem Verein die Moskauer Mathematische Gesellschaft hervorging, die so grofse Verdienste um die Hebung der mathematischen Forschung in Rufsland hat, war Peterson einer ihrer Begründer und ist auch stets ein eifriges Mitglied geblieben[1]). In der von der Gesellschaft herausgegebenen Zeitschrift Математическій Сборникъ (Mathematische Sammlung) finden sich im ganzen sechs Abhandlungen von Peterson, von denen sich drei auf die Flächentheorie und drei auf die Theorie der partiellen Differentialgleichungen beziehen.

Ihre Titel lauten:

1) Объ отношеніяхъ и сродствахъ между кривыми поверхностями (Über Beziehungen und Verwandtschaften zwischen krummen Flächen), T. I (1866), 391—438.

2) О кривыхъ на поверхностяхъ (Über Kurven auf Flächen), T. II (1867), 17—44.

3) Объ изгибаніи поверхностей втораго порядка (Über Biegungen von Flächen zweiten Grades), T. X (1883), 476—523.

4), 5), 6) Объ интегрированіи уравненій съ частными производными (Über die Integration von partiellen Differentialgleichungen), T. VIII (1877), 291—361; T. IX (1878), 137—192; T. X (1882), 169—223.

Aufserdem hat Peterson nur noch in deutscher Sprache die kleine Schrift veröffentlicht:

Ueber Curven und Flächen. Deutsch bearbeitet vom Autor. Erste Lieferung. Moskau und Leipzig 1868; 106 S. 8°.

Wenn noch berichtet wird, dafs Peterson am 28. November 1879 von der Universität Odessa zum Doktor der reinen Mathematik honoris causa ernannt wurde und dafs er am 19. April (alten Stils) 1881 in Moskau gestorben ist, so ist damit alles erschöpft, was sich über den äufserlichen Verlauf seines Lebens sagen läfst.

Was Petersons mathematische Leistungen betrifft, so soll an dieser Stelle auf die Abhandlungen über partielle Differentialgleichungen nicht genauer eingegangen werden; es möge genügen, zu bemerken, dafs sie sich auf die Integration linearer Differentialgleichungen höherer Ordnungen beziehen. Einen Bericht darüber hat Tichomandritzkij gegeben[2]), der auch erzählt, dafs sich im Nachlasse Petersons eine deutsche Abhandlung

1) Математическій Сборникъ, томъ 14 (1889), 471.

2) Jahrbuch über die Fortschr. d. Mathem. 14 (1882), 303—305.

über denselben Gegenstand gefunden habe; vielleicht geben diese Zeilen Veranlassung dazu, dafs sie veröffentlicht wird.

Der Inhalt der beiden ersten geometrischen Abhandlungen ist fast vollständig in die deutsche Schrift über Kurven und Flächen übergegangen, sodafs es nicht erforderlich scheint, auf sie besonders einzugehen, während die dritte Abhandlung Nachträge zu dem vierten Kapitel dieses Werkes enthält, die am besten bei dessen Besprechung erwähnt werden.

Es ist hier nicht möglich, die reiche Fülle der von PETERSON behandelten Fragen aufzuzählen, die einen Wiederabdruck seines schwer zugänglichen Werkes empfehlenswert erscheinen läfst, es kann sich vielmehr nur darum handeln, in kurzen Umrissen den Inhalt zu skizzieren und auf einige besonders wichtige Stellen hinzuweisen. Nachdem er in den beiden ersten Kapiteln die allgemeine Theorie der Kurven im Raume und der Kurven auf Flächen behandelt hat, wobei sich manche originelle Bemerkungen finden, so z. B. über rechts- und linksgewundene Kurven und über Licht- und Schattenlinien, entwickelt er im dritten Kapitel den Plan seiner Untersuchungen über Beziehungen und Verwandtschaften von Flächen.

Betrachtet man irgend zwei krumme Flächen $f_1(x_1, y_1, z_1) = 0$ und $f_2(x_2, y_2, z_2) = 0$, so wird durch irgend zwei Gleichungen:

$$\Phi(x_1, y_1, z_1;\ x_2, y_2, z_2) = 0 \quad \text{und} \quad \Psi(x_1, y_1, z_1;\ x_2, y_2, z_2) = 0$$

jedem Punkte P_1 der ersten Fläche ein Punkt P_2 der zweiten Fläche zugeordnet, man erhält also eine *Abbildung* der beiden Flächen aufeinander, wofür PETERSON *Beziehung* sagt. Die Relationen $\Phi = 0$ und $\Psi = 0$ dürfen auch die Ableitungen von z_1 nach x_1 und y_1 und von z_2 nach x_2 und y_2 enthalten, nur definieren sie dann nicht eine bestimmte Abbildung, sondern eine Klasse von Abbildungen. Bei jeder solchen Beziehung giebt es, wie PETERSON beweist, stets auf jeder der beiden Flächen ein Netz konjugierter Kurven, dem wieder ein Netz konjugierter Kurven entspricht, und das er die Basis der Beziehung nennt.

Als Beziehungen, die er betrachten will, nennt PETERSON zunächst: 1) den *Parallelismus* (Abbildung durch parallele Normalen), 2) die *Perspektive* (Projektion mittels eines Strahlenbüschels), 3) die *Konjunktion* (die Verbindungslinie entsprechender Punkte berührt beide Flächen). Während diese Beziehungen sich mit der Lage der beiden Flächen im Raume ändern, sind davon unabhängig: 4) die *Konjugation*, bei der allen konjugierten Kurven auf der einen Fläche konjugierte Kurven auf der andern entsprechen und 5) die *graphische Beziehung*, womit die konforme Abbildung gemeint ist[1]).

1) In der schon genannten Abhandlung: *Über Abbildungen* habe ich vor-

Treten zu den Gleichungen $\Phi = 0$, $\Psi = 0$ weitere Gleichungen $X = 0$, $\Omega = 0$, u. s. w. neu hinzu, so darf die zweite Fläche nicht mehr beliebig gewählt werden, sie wird vielmehr, je nach der Natur der Funktionen Φ, Ψ, X, Ω, u. s. w., durch endliche Gleichungen oder durch Differentialgleichungen bestimmt, und es entsteht so die Aufgabe zu untersuchen, ob überhaupt und eventuell welche Flächen der ersten Fläche zugeordnet sind oder, wie PETERSON sich ausdrückt, mit ihr in *Verwandtschaft* stehen[1]).

An Verwandtschaften nennt PETERSON: 1) die *Biegung* (3 Gleichungen), 2) die *graphische Perspektive*, eine konforme Abbildung, die zugleich perspektiv ist (4 Gleichungen), 3) die *Abwicklung*, bei der die Verbindungslinie entsprechender Punkte die eine Fläche berührt und auf der andern senkrecht steht (3 Gleichungen), 4) die *parallele Perspektive*, bei der der vom Anfangspunkte der Koordinaten nach einem Punkte der einen Fläche gezogene Strahl der Normale in dem entsprechenden Punkte der andern Fläche parallel ist, und umgekehrt (4 Gleichungen), 5) die *Verwandtschaft der entsprechenden Ebenen*, d. h. die Kollineation (3 Gleichungen).

In der allein erschienenen ersten Lieferung seiner Schrift: *Ueber Curven und Flächen* hat PETERSON nur in Kapitel IV die Beziehung des Parallelismus, in Kapitel V die der Perspektive behandelt, wobei jedoch auch die soeben angeführten Verwandtschaften berücksichtigt worden sind. Hervorzuheben sind dabei seine Untersuchungen über Biegungen. Er entwickelt ein sehr fruchtbares Verfahren, aus einem bekannten Paare von Biegungsflächen unendlich viele neue Paare, ja sogar unter Umständen aus einer Familie von Biegungsflächen unendlich viel neue Familien herzuleiten, aus dem nicht nur die damals bereits bekannten Biegungen der *Rotationsflächen* (MINDING 1838), der *Gesims-* und der *Schraubenflächen* (BOUR 1861) hervorgehen, sondern auch eine Reihe neuer Biegungen, die zum Teil später von andern Forschern wieder entdeckt worden sind[2]).

Da sind zunächst die *Minimalflächen*, die PETERSON durch die Gleichungen:

$$x = a(p) + \alpha(q), \qquad y = b(p) + \beta(q), \qquad z = c(p) + \gamma(q)$$

mit den Bedingungen

---

geschlagen, dafs man die Beziehung 4), um ihre Analogie mit der konformen Abbildung hervortreten zu lassen, als *konjunktive Abbildung* bezeichnen sollte.

1) Man könnte auch umgekehrt verfahren und die Gleichung $\Psi = 0$ wegnehmen, sodafs nur eine Bedingungsgleichung $\Phi = 0$ besteht. Im Gebiete der Punkttransformationen hat diese Fragestellung freilich keinen Sinn, sie bekommt ihn aber, wenn man zu *Berührungstransformationen* übergeht.

2) Man vergleiche hierzu auch meine bereits angeführte Abhandlung: *Biegungen und conjugierte Systeme.*

$$da^2 + db^2 + dc^2 = 0, \qquad d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2 = 0$$

darstellt. Er findet dann als Biegungen einer solchen Fläche (S. 72, Gl. 75):

$$X = e^{i\nu} a + e^{-i\nu} \alpha, \qquad Y = e^{i\nu} b + e^{-i\nu} \beta, \qquad Z = e^{i\nu} c + e^{-i\nu} \gamma,$$

wo ν eine willkürliche Konstante bedeutet. Genau dieselben Formeln, abgesehen von der Wahl der Buchstaben, giebt Herr DARBOUX in seinen *Leçons sur la théorie générale des surfaces* (t. I, Paris 1887, S. 322, Gl. (3)). Wenn er dazu bemerkt: „Ce moyen si simple d'obtenir toute une famille de surfaces minima applicables sur une surface minima donnée est dû à M. SCHWARZ", so stehen allerdings Formeln, die mit den Formeln von PETERSON gleichbedeutend sind, in der bereits angeführten Abhandlung von Herrn SCHWARZ, der jedoch nicht verabsäumt hatte, unter der von ihm in der Einleitung zusammengestellten Litteratur über Minimalflächen auch PETERSONS Schrift zu nennen. Herr SCHWARZ wird daher gewifs der Letzte sein, der die Entdeckung dieses schönen Satzes über die Biegung der Minimalflächen für sich beanspruchte.

Ferner findet PETERSON eine Familie von Biegungen bei denjenigen *Translationsflächen*, die durch die Gleichungen

$$x = \alpha(p), \qquad y = \beta(q), \qquad z = c(p) + \gamma(q)$$

dargestellt werden, ein Resultat, das Herr BIANCHI im Jahre 1878 von sich aus gefunden hat (Giorn. di matem. **16** (1878), 467). Auch mit den merkwürdigen Flächen, denen die paradoxe Eigenschaft zukommt, sich selbst ähnlich zu sein, hat sich PETERSON bereits eingehend beschäftigt (S. 75—80); diese Flächen sind ebenfalls im Jahre 1878 fast gleichzeitig von SOPHUS LIE (Arch. for Mathem. **3** (1878), 460), der sie *Spiralflächen* nannte, und von MAURICE LÉVY (C. R. Paris **87** (1878), 788) wieder entdeckt worden, und haben in neuerer Zeit die Aufmerksamkeit der Geometer wiederholt auf sich gelenkt. PETERSON ist in seiner dritten geometrischen, 1883 veröffentlichten Abhandlung auf diese Flächen zurückgekommen. Er behandelt dort auch gewisse Biegungen von Paraboloiden, die sich den von ihm bereits 1868 betrachteten Biegungen von *Flächen zweiter Ordnung* (S. 72—75) anschliefsen. Sie gehen daraus hervor, dafs die Flächen zweiter Ordnung (mit Ausnahme der Paraboloide) durch Gleichungen der Form:

$$x = a(p)\ \alpha(q), \qquad y = a(p)\,\beta(q), \qquad z = b(p)$$

dargestellt werden können. Herr MLODZJEJOWSKIJ hat in den bereits angeführten Abhandlungen diese Biegungen genauer untersucht und in gewisser Weise verallgemeinert, ohne jedoch, wie mir scheint, den Gegenstand erschöpft zu haben.

Doch genug der Einzelheiten. Zum Schlufs noch eine Bemerkung

von allgemeiner Bedeutung. Was PETERSON auszeichnet, ist schöpferische geometrische Phantasie verbunden mit tüchtiger analytischer Schulung; jene war ihm angeboren, diese verdankte er der guten Tradition der Universität Dorpat. Wesentliche Fortschritte in der Differentialgeometrie erreicht nur, wer beide Eigenschaften in sich vereinigt; Gewandtheit in der Handhabung der Formeln vermag, um einen Ausspruch von GAUSS zu benutzen, „für sich nichts zu leisten und treibt nur taube Blüten, wenn nicht die befruchtende, lebendige Anschauung des Gegenstandes selbst überall waltet."

Kiel im Oktober 1900.

Wie sollen die Titel der mathematischen Zeitschriften abgekürzt werden?

Von PAUL STÄCKEL in Kiel.

Dafs man bei Verweisungen auf andere Autoren auch die Stelle angiebt, auf die man sich bezieht, ist bei wissenschaftlichen Veröffentlichungen allmählig zu einem Gebote des litterarischen Anstandes geworden. Solche Angaben sollen vollständig sein, das heifst, das Wiederfinden der Stelle sichern, sie sollen aber auch aus Gründen der Ökonomie einfach sein, und deshalb hat man von jeher bei Citaten, die häufig auftreten, Abkürzungen eingeführt. Da in der mathematischen Litteratur die Zeitschriften eine hervorragende Rolle spielen, ist das Bedürfnis nach abkürzenden Bezeichnungen bei ihnen in besonderem Grade vorhanden. Trotzdem giebt es nur wenige allgemein angenommene Abbreviaturen, und noch viel weniger ist man bis jetzt zu einer einheitlichen Regelung der Grundsätze gekommen, nach denen die Titel der mathematischen Zeitschriften abgekürzt werden sollen.

Man könnte versucht sein zu hoffen, dafs die seit 1898 erscheinende Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften uns diesem Ziele näher bringen wird, denn die in ihr gebrauchten Abkürzungen besitzen wegen der ungewöhnlichen Verbreitung, deren sich das monumentale Werk zu erfreuen hat, geradezu internationale Wichtigkeit, und es liefse sich denken, dafs sie allgemein gebräuchlich werden könnten und so ganz von selbst eine Einigung der Mathematiker zu stande käme. Wer die bis jetzt erschienenen Hefte der Encyklopädie von diesem gewifs sehr einseitigen, aber doch berechtigten Standpunkte aus betrachtet, wird sich bald lebhaft enttäuscht fühlen. Die Redaktion der Encyklopädie ist wohl bei ihren eben so mühevollen wie dankenswerten Arbeiten von Sorgen dringenderer Art derart in Anspruch genommen worden, dafs sie für eine einheitliche Regelung der Abkürzungen keine Zeit übrig behielt, ja es herrscht in der Encyklopädie, um der Wahrheit die Ehre zu geben, hierin eine zum System gewordene Systemlosigkeit. Ich möchte mir erlauben den Wunsch auszudrücken, dafs die künftig erscheinenden Hefte, die geplante französische Ausgabe, die gewifs nicht ausbleibende zweite Auf-

lage auch in Beziehung auf diese nicht unwichtigen Äufserlichkeiten den Stempel der Vollendung tragen sollten, und hoffe meinerseits zu der Erfüllung dieses Wunsches beizutragen, indem ich im Folgenden die Mängel darlege, mit denen die Abkürzungen in der Encyklopädie behaftet sind, und Vorschläge mache, wie ihnen abgeholfen werden kann. Ich würde mich freuen, wenn meine Vorschläge Gegenstand der Diskussion in der Bibliotheca Mathematica würden, denn nur bei der Mitarbeit der Fachgenossen lassen sich Fragen dieser Art zu einer befriedigenden Erledigung bringen.

Es wird sich empfehlen, mit einem Beispiel zu beginnen. Die folgende Liste giebt, ohne Gewähr der Vollständigkeit, in der Encyklopädie gebrauchte Abkürzungen für das Bulletin des sciences mathématiques, das gegenwärtig von den Herren GASTON DARBOUX und JULES TANNERY in Paris herausgegeben wird:

Bull. d. Sc. (I, 94), Bull. sci. m. (I, 33), Bull. sci. math. astr. (I, 608), Bull. scienc. math. (I, 248), Bull. d. scienc. math. (I, 237), Bull. des Sciences Math. (I, 182), Bull. Darb. (II, 108), Darboux Bull. (II, 39), *Darboux* Bulletin (I, 89), Darboux (I, 132)[1].

Woran liegt es, dafs hier, wie in andern Fällen, bei dem Bulletin de la société mathématique de France, den Jahresberichten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, dem Journal de l'école polytechnique, den Proceedings of the London mathematical society, u. s. w., eine solche Buntscheckigkeit der Bezeichnungen herrscht, die nicht nur unschön wirkt, sondern auch den in der Litteratur weniger bewanderten Leser leicht irre führen kann? Augenscheinlich daran, dafs nicht von vornherein feste Regeln für die Abkürzung der Titel aufgestellt worden sind, die wenn auch nicht vollständig bestimmte, so doch im wesentlichen übereinstimmende Bezeichnungen zur Folge gehabt hätten.

Was für Regeln gemeint sind, zeigt das soeben angeführte Beispiel. Es veranlafst zunächst zu der Frage, ob es zweckmäfsig ist, die Namen der Herausgeber in die Abkürzungen aufzunehmen. Die Antwort scheint mir nur „nein" lauten zu können, denn die Personen, mögen sie auch noch so grofse Verdienste haben, treten vom Schauplatze ab, die Zeitschriften pflegen zu bleiben. Bemerkenswert ist auch, dafs zwar in den ersten Bänden des Jahrbuches über die Fortschritte der Mathematik

1) Die Zahlen bedeuten Band nnd Seite der Encyklopädie und geben den Beleg, *dafs* die betreffende Bezeichnnng in ihr vorkommt; *wie oft* überhaupt, brancht hier nicht erwähnt zu werden.



die Bezeichnungen auftreten: Borchardt J.; Kronecker J.; Brioschi Ann.; Clebsch Ann.; Klein Ann.; Liouville J.; Jordan J.; dafs jedoch bald dafür J. für Math.; Annali di mat.; Math. Ann.; Journ. de math. geschrieben wird; freilich findet man daneben Grunert Archiv, was später in Hoppe Arch. übergeht und bald eine neue Verwandlung erfahren wird, ebenso heifst es — Darboux Bull. Ganz unzulässig ist es jedenfalls, weil es zu Verwechselungen mit den Schriften des Herausgebers Anlafs geben kann, dessen Namen ohne jeden Zusatz zu verwenden. Als erste Regel möchte ich daher aufstellen:

I. *Bei der Abkürzung der Titel der Zeitschriften sollen die Namen der Herausgeber nicht verwendet werden.*

Damit fallen die letzten vier Bezeichnungen für das „Bulletin“ weg. Wie steht es mit den übrigen? Es ist durchaus zu billigen, dafs bei ihnen Bulletin mit Bull. abgekürzt ist. Überhaupt gilt die Regel:

II. *Häufig wiederkehrende Worte sollen feste Abkürzungen erhalten.*

Solche Worte sind etwa:

Abhandlungen, Annalen (Annales, Annali, Annals), Archiv, Berichte, Bulletin, Commentarii, Histoire, Journal, Mémoires, Memorie, Mitteilungen, Proceedings, Rendiconti, Transactions, Verhandlungen, Zeitschrift.

Als die üblichen Akürzungen, die auch in der Encyklopädie, abgesehen von kleinen Schwankungen, gebraucht werden, können etwa gelten:

Abh., Ann., Arch., Ber., Bull., Comm., Hist., Journ. und J., Mém., Mem., Mitt., Proc., Rend., Trans., Verh., Z.

Der sachliche Titel der Zeitschriften besteht bis auf wenige Ausnahmen aus einem dieser Hauptworte, dem ersten Stichworte, wie die Bibliothekare sagen, und aus Beiworten, welche die besondere Zeitschrift kennzeichnen und die sich auf den Inhalt und auf den Ort oder das Land beziehen, in dem sie erscheint. Bei der Abkürzung der Beiwörter ist dem Belieben des Einzelnen ein gewisser Spielraum zu lassen, es giebt jedoch auch hier gewisse allgemeine Regeln, die ich etwa so aussprechen möchte:

III. *Es ist unzulässig, dem ersten Stichwort ein Beiwort hinzuzufügen, das in dem Titel der Zeitschrift selbst nicht vorkommt.*

Denn die Abkürzungen sollen auf Grund weniger, einfacher Regeln von jedem sofort im wesentlichen übereinstimmend hergestellt werden können, sie dürfen keine Rätsel sein, zu deren Lösung man als Schlüssel ein besonderes Verzeichnis der Abbreviaturen nötig hat. Deshalb ist die Bezeichnung Norw. Arch. (II, 257), die sich neben Arch. for Math. ok (!) Nat. (I, 155) für das in Christiania erscheinende Archiv for Mathematik og Naturvidenskab findet, zu verwerfen. Aufserdem würde mit demselben Rechte das Archiv für Mathematik und Physik als

Deutsch. Arch., das Journal für Mathematik als Deutsch. J. abzukürzen sein, u. s. w.

IV. *Man soll nicht abkürzen, wenn keine wesentliche Ersparnis an Raum gewonnen wird oder wenn der Verlust an Deutlichkeit die Ersparnis an Raum überwiegt.*

Zum Beispiel lohnt es sich nicht *de* durch *d.* zu ersetzen, also etwa statt J. de math. zu schreiben J. d. math. (I, 31), was überdies den Nachteil hat, dafs man nicht weifs, ob *d.* für *de* oder für *des* steht. An Deutlichkeit lassen ferner zu wünschen übrig Abkürzungen wie Gen. Atti (II, 471) für Atti di Genova, Tor. A. (I, 333) für Atti di Torino, Pal. R. (I, 352) für Rendiconto del Circolo matematico di Palermo. Überhaupt wird dem Leser das Verständnis erheblich erleichtert, wenn die Namen der Orte möglichst unversehrt gelassen werden. Es lohnt sich wahrlich nicht, Paris in Par. abzukürzen, wogegen Stockh. für Stockholm nicht beanstandet werden mag.

Weitere Regeln ergeben sich aus der Betrachtung eines zweiten Beispiels. Die älteren Sammelbände der Berliner Akademie werden in der Encyklopädie folgendermafsen bezeichnet:

> Berl. Hist. (I, 620), Berl. Ac. Hist. (I, 561), Berlin Hist. de l'Acad. (I, 236), Berl. Mem. (I, 38), Berlin Nouv. Mém. (I, 605), Berl. Ac. N. Mém. (I, 561), Hist. Acad. de Berlin (I, 136), Hist. de l'Acad. de Berlin (I, 60), Mém. de Berlin (I, 42)[1].

Ob man bei den Schriften der Akademien zu Berlin und Paris Histoire oder Mémoires citiert, ist keineswegs gleichgültig, denn die betreffenden Bände bestehen aus einem ersten, für sich paginierten Teil, der einen Bericht über die Geschichte der Akademie und die Arbeiten ihrer Mitglieder enthält, und den darauf folgenden Abhandlungen. An den citierten Stellen der Encyklopädie sind durchweg die Abhandlungen gemeint, und es hätten daher, um Mifsverständnisse zu vermeiden, immer die Mémoires angeführt werden sollen. Aber in welcher Form? Wo soll der unterscheidende Ortsnamen stehen, vorn oder hinten? In der Encyklopädie findet sich beides, und das gilt auch für die Schriften anderer Akademien, wo es heifst:

> Acta Petrop. (I, 123) neben Petrop. Acta (I, 149), Rend. Ist. Lomb. (I, 57) neben Lomb. Rend. (I, 211), Mém. Paris (I, 30) neben Par. Mém. (I, 146), Mem. Acad. Bologna (I, 76) neben Bologna Mem. (I, 385), Ann. Toul. (I, 110) neben Toul. Ann. (I, 331) u. s. w.

1) Vgl. die Fufsnote S. 134.

Demgegenüber möchte ich mit aller Entschiedenheit für die Regel eintreten:

V. *Die unterscheidenden Ortsnamen sind an das Ende der Abkürzungen zu stellen,*

und zwar aus folgenden Gründen:

1) Wenn die unterscheidenden Beiworte keine Ortsnamen sind, werden sie stets hinter das Hauptwort (erste Stichwort) gestellt: Bull. sci. math., J. de Math. Warum soll es bei den Ortsnamen anders gemacht werden?

2) Wenn man Bücher anführt, wird der Ort des Erscheinens stets an das Ende des Titels gestellt und darauf folgt die Jahreszahl. Die Analogie spricht dafür, es bei den Zeitschriften ebenso zu machen und z. B. zu schreiben Mém. Paris 1784.

3) Die grofsen öffentlichen Bibliotheken verfahren durchgängig in der Weise, dafs sie das Hauptwort (Abh., Ber., Comm., Mém., Verh. u. s. w.) als erstes Stichwort nehmen, dem als weitere Stichworte zunächst die sachlichen, dann die lokalen Beiworte folgen; wobei, wenn es zur Kennzeichnung einer Zeitschrift ausreicht, auch eine der beiden Arten, ja gelegentlich beide wegfallen können.

Es darf nicht verschwiegen werden, dafs in dem Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik in der Regel die Ortsnamen vorweggenommen werden: Belg. Bull., Berl. Ber., Cambr. Trans., Edinb. Proc., Liège Mém., Pisa Ann., u. s. w. Trotzdem mufs man sich für das eine oder das andere Verfahren entscheiden. Vielleicht haben alle beide Mängel, allein noch mangelhafter ist unter allen Umständen die Inkonsequenz.

Es bleibt übrig zu erörtern, was hinter den abgekürzten Titeln der Zeitschriften stehen soll. Zunächst ist erforderlichen Falls die Folge (Serie) anzugeben, wofür in der Encyklopädie fast durchgängig die vielfach übliche, zweckmäfsige Bezeichnung (1), (2), (3), . . . gewählt ist. Dann folgt sofort die Zahl des Bandes oder Teiles, darauf in Parenthese das Jahr der Veröffentlichung, endlich die Seitenzahl:

J. de math. (1) 6 (1841). 359.

Bei manchen Zeitschriften ist zwischen dem Jahrgang oder dem Jahre der Abfassung und dem Jahre der Veröffentlichung zu unterscheiden. Man verfährt dann wohl am besten wie bei den folgenden Beispielen: Mém. Paris Ann. 1784 (1787), Pap. Congr. Chicago 1893 (1896). Was die Seitenzahl angeht, so wird ihr in der Encyklopädie ein *p.* vorgesetzt. Das scheint mir überflüssig. Es genügt, wie in dem Jahrbuche über die Fortschritte der Mathematik, die durch einen Punkt abgetrennte Seitenzahl allein zu nehmen; was durch Weglassung

von *p.* erspart wird, möge einer ausführlicheren Schreibung des Titels zu gute kommen.

Es sei mir gestattet, zum Schlufs den Inhalt meiner Vorschläge zusammenzufassen in die folgende

Hauptregel. Die Titel der Zeitschriften sollen in der Weise abgekürzt werden, dafs der Reihe nach 1) das Hauptwort (Abh., Ann., Arch., Ber., u. s. w.), 2) die sachlichen, 3) die lokalen Beiworte in geeigneter Abkürzung aufeinander folgen; 2) oder 3) können auch, wenn die Deutlichkeit es gestattet, wegfallen.

Wenn man sich entschlösse, dieses Verfahren anzuwenden, so würde zwar noch immer der individuellen Wahl der Abkürzungen ein gewisser Spielraum bleiben, es würde aber doch eine Einheitlichkeit der Bezeichnung erreicht werden, die ich gegenüber dem jetzigen Chaos als einen wesentlichen Fortschritt ansehen möchte.

Kiel im September 1900.

Sur quelques points de la terminologie mathématique.

Par N. J. Hatzidakis à Athènes.

1.

Les surfaces de rotation à courbure *totale* constaute, la sphère exceptée, ne possèdent pas, que je sache, des noms particuliers caractéristiques, comme celles de rotation et à courbure *moyenne* constante (caténoïde, onduloïde, nodoïde). Je proposerais, à ce propos, les noms suivants:

1) *Courbure constante positive.*[1])
   a) $k < 1$, la surface à forme de fuseau („spindelförmige Fläche") *Atractoïde* (du grec Ἄτρακτος, fuseau).
   b) $k > 1$, la surface de forme aplatie („wulstförmige Fläche"): *Spondyloïde* (du grec Σπόνδυλος, vertèbre) ou *Tolypoïde* (du grec τολύπη, pelote).
2) *Courbure constante négative (surfaces pseudosphériques).*
   a) Surface du type elliptique: *Clepsydroïde* (du grec Κλεψύδρα, clepsydre). (La forme de la clepsydre à sable).
   b) Surface engendrée par la tractrice (*Pseudosphère* proprement dite): *tractricoïde* (ou *tractriçoïde*), ou bien *chonoïde* (du grec χώνη, entonnoir).
   c) Surface du type hyperbolique: *trochalioïde* (du grec Τροχαλία, poulie).

Ces noms sont peut-être un peu arbitraires; mais j'ai bien tâché de trouver des noms en partant d'objets de la vie de tous les jours ressemblant à ces surfaces. J'ai fait usage dans tous ces noms de la terminaison-*ide*, dans la signification primitive (*-ειδὴς -ειδὲς* = qui a la forme de —), excepté dans le mot tractricoïde, où -ïde doit signifier: qui est engendré par; cette significatiou est bien en usage dans les mathématiques (caténoïde, cycloïde, hélicoïde etc.). Donner des noms aux surfaces que nous traitons, n'a certes aucune valeur *théorique*, mais tous ceux qui enseignent s'accorderout, je pense, à eu reconnaitre la valeur *didactique*.

1) Voir p. ex. Bianchi, *Geometria differenziale*, pp. 184 et suiv.

2.

Parmi le grand nombre de termes techniques, en mathématiques, qui sont formés de mots grecs, il y a, surtout en français, quelques-uns qui ne sont pas *correctement* formés, c'est-à-dire qui sont contre les règles de la langue grecque. En voici quelques exemples.

Cinématique (Kinematik). Le mot *κίνημα* d'où *cinématique*, est un mot grec postérieur; bien plus ancien et plus préférable est *κίνησις* d'où l'on formerait *κινητική* (Cinétique). C'est ainsi que nous désignons la Cinématique, nous autres Grecs modernes. Malheureusement on emploie déjà, en Allemagne, le mot *Kinetik* dans un tout autre sens.

Endosmose, exosmose. Ces mots ne sont *nullement* grecs. Ils ne peuvent pas être formés de: *'Εντὸς* ou *'Εκτὸς* et *ὀσμή*, et même alors, ils n'auraient pas le sens exigé. Nous employons en Grèce, dans ce sens, le mot grec ancien *διαπίδυσις* (du verbe *διαπιδύω*) (*εἰσπίδυσις, ἐκπίδυσις*).

Homothétie. C'est ainsi que Chasles appela la propriété de deux figures d'être *semblables et semblablement posées.* *'Ομοθεσία* désignerait la propriété d'être posé *ensemble* (*ὁμοῦ*), c'est *ὁμοιοθεσία* que l'on doit dire (*ὅμοιος* = semblable): *homœothésie*, figures *homoœothétiques.*

Automorphe (fonction). On appelle comme cela une fonction qui reste invariable par rapport à une certaine transformation linéaire. Mais, „le même" se dit en grec *ὁ αὐτὸς* (*avec* l'article), dans les compositions: *ταὐτο-* (p. ex. *ταὐτολογία, ταὐτόσημος, ταὐτοπαθὴς* etc.), tandis que *αὐτὸς* (*sans* l'article) signifie „même" (p. ex. *αὔτανδρος, αὐτάρκης* etc.). On dit, par suite, très bien *automobile, automate* etc., car là c'est la signification *même* qui entre, mais on doit dire *tautomorphe* (*ταὐτόμορφος*), car ici l'on veut exprimer: *la même* forme. On dit, dans le même sens, très correctement, en mécanique: mouvements *tautochrones* (mouvements qui ont lieu dans *le même* temps).

Kleine Mitteilungen.

Congrès international d'histoire des sciences à Paris 1900.

Comme nous l'avons déjà signalé préalablement (cf. Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, p. 265), ce congrès, constituant la 5e section du Congrès d'histoire comparée, s'est tenu du 23 au 28 juillet. A la première séance[1]) le bureau a été constitué (président: M. PAUL TANNERY, vice-présidents: M. M. DUREAU et ANDRÉ LALANDE, secrétaire: M. SICARD DE PLAUZOLLES). Puis, après longue discussion, un vœu a été émis en faveur de l'établissement d'une langue scientifique universelle, et M. ANDRÉ LALANNE a été nommé délégué éventuel à la fédération des délégués des Congrès qui pourra être constituée dans ce bnt; le président a fait des réserves personnelles concernant la difficulté d'arriver à un résultat utile et pratique.

Aux séances suivantes ont été faites un très grand nombre de conférences se rapportant en partie à l'histoire des sciences naturelles et de la médecine. Voici la liste des communications relatives à l'histoire des sciences mathématiques.

MAURICE GALLIAN. *Sur les Mécaniques, attribués à ARISTOTE.* — Discussion des textes de cet ouvrage qui se rapportent à la balance et au levier. L'auteur grec aurait fait confusion entre deux systèmes d'explication distincts et de valeur très inégale.

J. L. HEIBERG. *ANATOLIUS sur les dix premiers nombres.* — Mémoire contenant le texte grec inédit qui a été compilé dans les *Theologumena arithmetices.*

PAUL TANNERY. Communication verbale sur les travaux de MAXIMILIAN CURTZE concernant l'histoire de l'enseignement de la géométrie au moyen âge.

SAAVEDRA. *Note sur l'histoire de la résolution des équations cubiques.* — Elle dériverait des travaux arabes. M. PAUL TANNERY ne partage pas cette opinion; si la découverte des Italiens du 16e siècle n'est pas absolument indépendante, il croirait plutôt à l'influence de DIOFANTOS.

SIEGMUND GÜNTHER. *Die Kompromiss-Weltsysteme des XVI., XVII. und XVIII. Jahrhunderts.* — Histoire détaillée des systèmes de RAIMARUS URSUS, TYCHO BRAHE, ARGOLI, RICCIOLI, etc. ainsi que des systèmes comme ceux de BOULLIAU et de CASSINI, dans lesquels l'ordre de COPERNICUS est adopté, mais les lois de KEPLER écartées ou modifiées.

ANTONIO FAVARO. *Il metro proposto come unità di misura nel 1675.* — Détails sur l'ingénieur italien TITO LIVIO BURATTINI, qui acquit en Pologne

1) Nous devons à l'obligeance de M. PAUL TANNERY les matériaux dont nous nous sommes servi pour composer cet article. *La rédaction.*

une situation considérable, et proposa, comme unité, sous le nom de *metro*, la longueur du pendule battant la seconde (apres Wren, mais d'une façon beaucoup plus précise).

Moritz Cantor. *Beiträge zur Lebensgeschichte von Carl Friedrich Gauss.* — D'après la correspondance de Gauss avec Olbers et avec Wolfgang Bolyai. Détails du plus vif intérêt sur la vie intime du grand mathématicien allemand.

Paul Tannery. *Sur un manuel d'astronomie cambodgienne.* — Ce manuel, qui est contemporain, reproduit presqu' identiquement les Règles Siamoises publiées par La Loubère et étudiées par Cassini, mais il donne aussi des préceptes pour le calcul des éclipses et pour celui de la position des planètes. L'intérêt particulier qu'il présente est que l'astronomie indo-chinoise semble dériver d'une tradition bouddhiste, distincte de la tradition brahmaniste des traités et manuels indiens.

Parmi les autres communications il convient de signaler les suivantes, qui présentent aussi de l'intérêt pour ceux qui s'occupent de l'histoire des mathématiques.

Daniel Berthelot. *Sur l'utilité de l'histoire des sciences dans l'enseignement de la physique et de la chimie.* — Observations topiques sur l'inconvénient de présenter les doctrines actuelles comme définitives. Le point de départ des découvertes modernes les plus intéressantes existent, à l'insu même des inventeurs, dans les travaux de date ancienne qu'on néglige d'étudier, dont on ne connaît que les conclusions saillantes, et où l'on trouverait amorcées nombre de questions dont on ne soupçonne même pas l'existence.

Albert de Rochas. *La physique de la magie.* — Aperçu sur l'histoire de l'explication scientifique des faits considérés comme merveilleux. Extraits de divers ouvrages, en particulier de la leçon d'ouverture, en 1556, du cours de Jean Pena au Collège de France.

Gustaf Eneström. *Projet d'une bibliographie de l'histoire des sciences.* — De nombreuses observations sont échangées à ce sujet, sans toutefois que les bases proposées par l'auteur soient critiquées. Le président, invoquant un récent article de M. Gino Loria: *Sui metodi di compilazione dei cataloghi bibliografici*, déclare regretter l'abus des tendances qui prédominent actuellement en bibliographie (être *complet* et être *impersonnel*).

A la fin de la dernière session a eu lieu une discussion des propositions pratiques ayant pour but d'activer le progrès de l'histoire des sciences. Les vœux suivants ont été adoptés:

1) que l'histoire *élémentaire* des sciences, donnée par les professeurs des sciences eux-mêmes, soit développée dans l'enseignement secondaire et reçoive une sanction dans les examens;

2) que des cours spéciaux d'Histoire générale des sciences soient créés à la Sorbonne, à l'Ecole Normale Supérieure, à l'Ecole Polytechnique et dans les principales Universités françaises;

3) que les Universités où des cours d'Histoire des sciences pourront être institués, créent des diplômes spéciaux pour cette étude.

Le bureau reçut la mission de diriger la publication des mémoires communiqués au Congrès et fut autorisé à s'adjoindre les membres dont la collaboration lui paraîtrait utile. M. M. Daniel Berthelot et Carra de Vaux furent immédiatement désignés.

La Commission ainsi constituée a été chargée d'étudier l'organisation d'une Société d'Histoire générale des sciences, la fondation d'une Revue, et de prendre les décisions relatives à la réunion du futur Congrès. Pleins pouvoirs lui ont été donnés pour maintenir son union avec le Congrès d'Histoire comparée, pour le rattacher au contraire au Congrès de philosophie, ou enfin pour le constituer indépendamment.

Kleine Bemerkungen zur zweiten Auflage von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik".

Die erste (fette) Zahl bezeichnet den Band, die zweite die Seite der „Vorlesungen".
BM = Bibliotheca Mathematica.

---

1 : 12, 22, 29, 34, 103. 135, 190, 197, 202, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 265—266. — **1 : 283,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499. — **1 : 284, 321,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266—267. — **1 : 370,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 319. — **1 : 388, 400, 432, 437, 440, 467, 469, 475, 476,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267—268. — **1 : 510,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 314. — **1 : 537, 540, 542,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268.

---

1 : 622. D'après Henry Cordier (Asiatic journal 1887, p. 358) le mémoire cité de Biernatzki: *Die Arithmetik der Chinesen* (Journ. für Mathem. **52**, 1856, 59—94) est une simple reproduction de l'article de Alexander Wylie: *Jottings on the science of the Chinese*; North China Herald, 108, Aug. 21, 1852; 111, 113, 116—117, 119—121, Nov. 20, 1852 (reproduit dans The Shangai Almanac and Miscellany 1853 [22 pages] et dans The Chinese and Japanese Repository, avril 1864). M. Cordier ajoute: „This article seems to have been the starting point of those mathematical and astronomical studies, which though little known in Europe, are perhaps the most important of the scientific baggage of Wylie".

J'ajouterai encore que Wylie a poursuivi l'œuvre inachevée du P. Matteo Ricci (voir p. ex. Cantor **1** : 625) en divulguant les notions mathématiques européennes en Chine, et que, le premier, il a traduit en chinois un traité de calcul infinitésimal. — Il serait fort désirable qu'on publiât les inédits (ils doivent être nombreux) de Wylie sur les mathématiques chinoises. On pourrait peut-être contrôler ainsi l'affirmation de M. Heans (Messenger of mathem. **27**, 1898, p. 174) que les Chinois du temps de Confucius auraient connu en partie un des théorèmes de Fermat (voir Formulaire de mathém. t. **2** n. 3, p. 83). G. Vacca.

---

1 : 661, 662, 671, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499.

---

1 : 687—688. Daſs Abraham ibn Esra etwas mit dem *Liber augmenti et diminutionis*, sei es als Verfasser, sei es als Übersetzer, zu thun gehabt habe, ist sehr unwahrscheinlich. Er hätte sonst in seinem *Sefer Hamispar*, das kurz vor 1160 verfaſst wurde, also zu einer Zeit, wo Abraham ibn Esra seinem 70. Lebensjahre nahe war, sich nicht auf den einfachen falschen Ansatz be-

schränkt, sondern auch etwas über den doppelten bemerkt, denselben an einem der zahlreichen Beispiele seines Buches zur Anwendung gebracht.

G. Wertheim.

1:694, 704, 706, 708, 714, 735, 736, 744, 748, siehe BM 1_3, 1900, S. 499—500. — **1: 749,** siehe BM 1_3, 1900, S. 268. — **1: 756, 757, 767,** siehe BM 1_3, 1900, S. 500—501. — **1:804, 805, 807, 808, 812, 823, 852,** siehe BM 1_3, 1900, S. 268—269. — **1:853, 854, 855,** siehe BM 1_3, 1900, S. 501.

2:8, 10, siehe BM 1_3, 1900, S. 501—502.

2:14—15. Der Umstand, dafs in einem Rechenbuche aus dem 18. Jahrhundert teils eine Multiplikation von Brüchen „nach dem lange Wege" (die gewöhnliche Bruchrechnung), teils die sog. „Welsche Praktik" (Zerlegung der Brüche in Stammbrüche vor der Multiplikation) vorkommt, veranlafst Herrn Cantor zu der Vermutung, dafs bei Leonardo Pisano „major guisa" die gewöhnliche Multiplikation, „minor guisa" dagegen die welsche Praktik bedeutet. Diese Vermutung scheint uns aber wenig plausibel, und wir schliefsen uns der Ansicht P. Cossalis an (siehe *Scritti inediti pubblicati da* B. Boncompagni [1857], S. 23), dafs „maior guisa" ganz einfach Regeldetri bedeutet. Schwieriger ist es die Bedeutung des Ausdruckes „minor guisa" zu finden; da derselbe aber nur in der Zusammenstellung: „modus consolandi, quem in libro minoris guise docuimus" vorkommt, ist es wohl nicht notwendig ihn als Benennung einer Rechenmethode aufzufassen; in der That sind wir geneigt, die Worte „liber minoris guise" durch „eine Schrift kleineren Umfanges" (als der *Liber abbaci*) zu übersetzen, und da diese Schrift nach der Angabe des Leonardo eine Methode zur Lösung unbestimmter Gleichungen ersten Grades enthielt, welche mit der in seiner *Epistola ad Magistrum Theodorum* vorkommenden übereinstimmt, könnte vielleicht die letzte Schrift gemeint sein. In jedem Falle giebt es bei Leonardo keine Andeutung, dafs der „liber minoris guise" die welsche Praktik behandelte.

G. Eneström.

2:20, siehe BM 1_3, 1900, S. 502. — **2:25,** siehe BM 1_3, 1900, S. 274.

2:34. Herr Cantor bemerkt, dafs Leonardo Pisano im 15. Abschnitt des *Liber abbaci* sich des Wortes „radix" (nicht „res" wie im 12. Abschnitte) für die Unbekannte selbst bedient. Diese Bemerkung mufs dahin berichtigt werden, dafs Leonardo im genannten Abschnitte sowohl „radix" als „res" für die Unbekannte benutzt; merkwürdiger Weise sagt er einmal (S. 410, Z. 3 in Boncompagnis Ausgabe) sogar: „pone pro maiori parte radicem, *quam appellabis rem*". An vielen Stellen ist es nicht ersichtlich, warum Leonardo gerade „res" und nicht „radix" anwendet, aber zuweilen ist der Grund dazu offenbar, dafs „radix" in einer anderen Bedeutung (Quadratwurzel aus einem gewissen Ausdrucke) vorkommt, und also nicht zugleich die Unbekannte bedeuten kann. So z. B. sagt Leonardo l. c. S. 452, Z. 5: „erunt radix 20, minus 4 rebus, et radix 20, et 4 rerum, equales 2 rebus" für $\sqrt{20-4x}+\sqrt{20+4x}=2x$.

G. Eneström.

2 : 37, 39, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 502. — **2 : 57,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 269. — **2 : 59,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 502. — **2 : 70,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 417. — **2 : 73, 82, 87, 88, 89, 90, 92,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 502—503. — **2 : 98,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 269—270. — **2 : 105, 122, 128,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 503—504. — **2 : 132,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 515—516. — **2 : 143, 163, 166,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 504. — **2 : 229, 242, 243, 273,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 504—505. — **2 : 282—283, 284, 286, 287, 289, 290, 291, 313, 334, 353, 381, 386, 395, 401, 405, 425,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 506—508.

---

2 : 430. Bei der grofsen Bedeutung, welche Michel Stifel für die Geschichte der Mathematik hat, und die äufserlich schon daraus ersichtlich ist, dafs Cantor ihm nahezu 20 Druckseiten widmet, wäre es vielleicht am Platze gewesen, einige Worte über sein 1546, also ein Jahr nach der Deutschen Arithmetica, ebenfalls bei Johan Petreius in Nürnberg gedrucktes Rechenbuch zu sagen. Das Werk, ein stattlicher Quartband, hat den Titel: „Rechenbuch | von der Welschen und Deu|tschen Practick, auff allerley vorteyl und be- | hendigkeit, mit erklerung viler Exempeln, auff | mancherley art und weisz, nach der | kürtz und vorteyl, zu | machen. Durch H. Michel Stifel newlich | gefertiget, und yetzt erstmals getruckt | durch Johan Petreium zu | Nürnberg, Anno | 1546".

Auf den 4 ersten, nicht numerierten Blättern steht der Titel, das Inhaltsverzeichnis und eine Vorrede an Johan Petreius. Dann folgt auf 343 Seiten der Text, der in 5 Teile zerfällt: I. Vom gemeinen Algorithmo der gantzen und gebrochnen zalen, S. 1. II. Was nötig und unnötig sey zur Practica, S. 23. III. Von der kleinen oder Deutschen Practick, S. 43. IV. Von der Welschen Practick, S. 110. V. Von den Exempeln der Practick, S. 165.

G. Wertheim.

---

2 : 481, 482, 486, 489, 497, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 508—509. — **2 : 509,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270, 509. — **2 : 510, 514, 516, 517, 532, 535, 541, 548, 549, 554, 569, 572, 573,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509—510.

---

2 : 579. Dafs Hommel indirekt doch von Levi ben Gerson abhängt, läfst sich folgendermafsen erweisen. Das, was Cantor anführt, beruht in letzter Instanz auf einer Bemerkung Tychos in den *Epistol. astronom. lib. I.* (Norib. 1601) p. 62. Nun war aber Tycho nicht direkter Schüler Hommels, sondern verkehrte nur mit dessen Schüler Bartolomaeus Scultetus. Dieser aber sagt in seiner Schrift *Von allerlei Solarien* (Görlitz 1582) auf S. 5, nachdem er den Transversalmafsstab beschrieben hat: „Solche angezeigte Form, den Circulum in „Minuten zu theilen, haben vor zeiten im brauche gehabt die zwene fürtreff„liche Mathematici Georgius Purbachius und Joh. Regiomontanus, zu welcher „ehren und gedechtnis wir denn auch denselben modum allhie beschrieben, „damit er auch zu unsern Zeiten nicht vergessen, sondern mehr in Übung bliebe „und in brauch erhalten würde." Daraus ist doch wohl klar, dafs Hommel nur das lehrte, was er aus uns jetzt nicht zugänglichen Schriften Regiomontans entnommen hatte. Da aber Regiomontan nachweislich das Buch Levi ben Gersons über den Jacobstab gekannt hat, so dürfte seine Benutzung der Vorrichtung auf dieses Buch zurückgehen. Es müfste daher der Schlufspassus bei Cantor eine kleine Änderung erfahren.

M. Curtze.

---

2 : 582, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510. — **2 : 583,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270.

2 : 592. Francon de Liége prenait $\sqrt{\frac{5}{8}}\,d$ pour le côté du carré équivalent à cercle de diamètre d (voir B M. **1**$_3$, 1900, p. 269).

2 : 594, 597, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270.

2 : 597. Ce n'est pas à Heidelberg, en 1609, que fut fondée la première chaire d'arabe en Europe, puisque celle du Collège de France de Paris remonte au moins à 1569. P. Tannery.

2 : 599—600. Adriaen Metius ist unter dem Namen Adriaen Adriaenz (Adrian Adriani) 1597 als Dozent in Jena genannt worden. In dem *Codex Mc 25* der Universitätsbibliothek zu Tübingen ist eine Arbeit, ein Kollegienheft eines Ungenannten, enthalten, mit dem Titel: *Fundamenta Geometriae ab Adriano Adriani Belgae in Jenensium Academia privatim proposita 1597.* In demselben Bande findet sich auch eine Arbeit: *Idaea Mathematica seu Capita praecipua Arithmeticae, Geometriae, Astronomiae, Opticae. A Clarissimo ac disertissimo viro D. M. Giorgio Lymnaeo, Matheseos in Salana Tyringetarum Professore publice proposita 15. Nov. h. 8. Anno 1596.* Von diesem Manne kannte Poggendorff keine Schrift. Unter Metius, Adriaan schreibt Letzterer: „Eigentlich hiefs er, da Familiennamen damals noch nicht, oder noch nicht allgemein in Holland üblich waren, Adriaan Adriaanszoon (Adriaansz), weil sein Vater den Namen Adriaan führte, und dieser nannte sich aus gleichem Grunde nach dem Grofsvater Anthonis, Adriaan Anthoniszoon". Da Adriaan Metius erst 1598 Professor in Franeker wurde, so kann füglich an seinem Aufenthalt 1597 in Jena kaum gezweifelt werden. M. Curtze.

2 : 602, 603—604, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270—271.

2 : 612. Die Handschrift der Göttinger Bibliothek aus dem Besitze Stephan Brechtels ist die 2 : 642 erwähnte Algebra des Initius Algebras.

2 : 612, 621, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 277.

2 : 621. L. 19, lire 1570 (non 1579) pour la date de la *Regula Aliza* de Cardan.

2 : 623, siehe BM. **1**$_3$, 1900, S. 277.

2 : 623. Die von Cataldi in seinem *Trattato dell' algebra proportionale* (Bologna 1610) für die Reihe der Potenzen der Unbekannten eingeführte Be-

zeichnung, die er später in seinen übrigen algebraischen Schriften angewendet hat [am wenigsten in dem *Trattato del modo brevissimo di trovare la radice quadra delli numeri* (Bologna 1613), da er hier sich nicht viel mit theoretischen Betrachtungen abgiebt, sondern nur rechnet], ist durchaus nicht — wie man nach Cantors Worten meinen könnte — durch eine Veränderung der Bombellischen Bezeichnung entstanden, sondern hat mit dieser gar nichts zu thun. Wie Cataldi selbst ausführlich darlegt, will er mit seiner Bezeichnung zwei Übelstände beseitigen: 1) Die Unbequemlichkeit, welche beim Studium algebraischer Bücher infolge der in verschiedenen Ländern und bei verschiedenen Autoren angewandten verschiedenen Zeichen für die Potenzen der Unbekannten sich herausstellt; 2) den Nachteil, der sich für den Drucker ergiebt, welcher nur selten ein algebraisches Werk zu drucken hat und doch für die Potenzen der Unbekannten besondere, sonst nicht zu verwendende Typen anschaffen mufs. Beide Übelstände werden vermieden, wenn man, wie Cataldi vorschlägt, zur Bezeichnung der Potenzen der Unbekannten sich der durchstrichenen Exponenten bedient, denn diese Zeichen seien bequem und in den Druckereien, wo sie in den Rechenbüchern beim Dividieren „a Galea“ Verwendung fänden, auch vorrätig.

G. Wertheim.

---

2 : 638. L. 16, lire *Paraplerosis.*

---

2 : 642, 643, siehe BM 1_3, 1900, S. 271.

---

2 : 659. La lettre de Fermat à Roberval, mentionnée par Chasles, est celle du 20 avril 1637 (*Oeuvres de* Fermat, II, 1894, p. 106). Fermat y parle de ses découvertes sur les lieux plans, solides et *ad superficiem*. Son traité *De contactibus sphaericis* a un tout autre sujet. P. Tannery.

---

2 : 659 Boulliau, dans son édition de Théon de Smyrne, a parfaitement maintenu l'union de la Musique et de l'Arithmétique. Ce qui manque dans cette édition, c'est l'Astronomie, dont un manuscrit n'a été retrouvé que par Th.-H. Martin, qui a publié cette partie isolément, en 1849. P. Tannery.

---

2 : 660. Golius n'était nullement un moine, mais bien le célèbre orientaliste (1596—1667) qui professa à Leyde. Il rapporta du Levant, non pas à Florence, mais à Leyde, deux exemplaires (dont l'un est actuellement à la Bodléienne d'Oxford) de la version des *Coniques* d'Apollonius par Tabit ibn Kurra; c'est de l'existence de cette version que Mersenne (Minime, non Minorite) eut connaissance. Golius se proposait de la traduire en latin, mais elle n'a été utilisée que pour l'édition de Halley (1710). — Quant au manuscrit de Florence (texte d'Aboul Fath d'Ispahan), il avait été donné avec d'autres au grand-duc Ferdinand I (1587—1608) par le patriarche d'Antioche, Ignace Néama, et il ne semble point que ce soit Borelli, mais bien le prince Léopold qui ait, en 1658, conçu le projet de publication. — Enfin, un troisième texte, celui d'Abdelmelik de Chiraz, fut apporté d'Orient par Ravius, professeur à Upsal, et il en donna, de concert avec le mathématicien Samuel Reyher, une traduction

imprimée à Kiel (1669), dont la mention fait défaut dans le Vol. III des *Vorlesungen*. Le manuscrit de Ravius est aujourd'hui à la Bodléienne. P. Tannery.

2 : 655, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 271.

2 : 683. Le voyage de Descartes en Angleterre est une invention de Baillet, et c'est en 1631, non en 1634, qu'eut lieu le voyage en Danemark. — La fille de Descartes, Francine, était déjà décédée, lorsqu'il écrivit, le 28 octobre 1640, à son père, qui venait lui-même de monrir, sans que Descartes en eût été informé. — Ce n'est point pour visiter la princesse Elisabeth que Descartes retourna en France, puisqu'elle résidait en Hollande, et qu'elle ne quitta ce pays que pour aller en Brandebourg. P. Tannery.

2 : 700, 701, 703, 704, 705, 721, 742, 746, 747, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 271—273.

2 : 767. Nach Aristide Marre (siehe *Problèmes numériques faisant suite et servant d'application au Triparty en la science des nombres de Nicolas Chuquet*; Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **14**, 1881, 469, Fufsnote zu CXXX) besitzt die Bibliothèque Nationale in Paris ein Exemplar der ersten Ausgabe von Bachets *Problèmes plaisans et délectables*. Ein aus der Bibliothek von E. Catalan herrührendes Exemplar der zweiten Auflage habe ich vor einiger Zeit erworben. G. Wertheim.

2 : 777. In der Stadtbibliothek zu Zürich ist unter der Nummer C. 114. a noch das eigenhändige Manuskript der Algebra des Johannes Heinricus Rhonius (so!) vorhanden. Es schliefsen sich daran noch andere Sachen an, welche nicht veröffentlicht scheinen. M. Curtze.

2 : 784. Parmi les travaux de Descartes sur la théorie des nombres, il convient de mentionner qu'il retrouva, comme Fermat au reste, la règle de Tabit ibn Korrah pour les nombres amiables. P. Tannery.

2 : 820. La première édition latine de la *Géométrie* de Descartes, parue en 1649, devait être mentionnée.

2 : 825. L. 5 et 6, les mots »parallel« et „senkrecht" sont mis l'un pour l'autre.

2 : 840. Le premier théorème de la moyenne, sous sa forme géométrique (parallélisme de la tangente à un point moyen d'un arc d'une courbe, à sa corde), se trouve dans Cavalieri ainsi qu'il résulte du passage suivant (*Geometria indivisib.* etc. [1635]; p. 492 de l'éd. de 1653): «Si curva linea quaecunque data tota sit in eodem plano, cui occurrat recta in duobus punctis...

poterimus aliam rectam lineam prefatae aequidistantem ducere, quae tangat portionem curvae lineae inter duos praedictos occursus continuatam».

G. Vacca.

2 : 856. D'après la signature de sept lettres autographes qui se trouvent dans le manuscrit 7049 de la „Hofbibliothek“ à Vienne, il faut écrire Debeaune, non de Beaune.

P. Tannery.

2 : 865. La lettre de Cavalieri, à laquelle répondit Fermat, existe à la Bibl. Nat. de Paris, dans le Recueil des lettres à Mersenne; elle est datée du 23 novembre 1641.

P. Tannery.

2 : 876, 878, 879, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 511. — **2 : 891,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 273. — **2 : 901, IX, X** (Vorwort), siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 511—512.

3 : 10, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 518. — **3 : 12, 17, 22, 45—48, 49, 50,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 512—513.

3 : 100. Le théorème énoncé par Leibniz en 1678 (*Mathem. Schriften* t. **7**, p. 119, éd. Gerhardt), que tout nombre premier (2 et 3 exceptés) est de la forme $6n \pm 1$, a été donné un siècle auparavant par Bungus (*Numerorum Mysteria* etc., Bergomi **1599**, p. 399): «... semper ... numeri primi post binarium et ternarium, in senariorum multiplicium vicinia collocati comperientur, aut uno minores, aut uno majores» (voir *Formul. de mathém.* t. **2**, n. 3, p. 82). Il convient d'ajouter que Leibniz (Mss. inédits conservés à Hannover, Math. t. **3**, B. 11, fol. 10) a aussi entrevu le théorème de Wilson, ainsi que j'ai remarqué dans le *Formulaire de mathém.* t. **2**, n. 3, p. 85: «Productus continuorum usque ad numerum qui antepraecedit datum divisus per datum relinquit 1 (*vel complementum ad unum*?), si datus sit primitivus. Si datus sit derivativus relinquet numerus qui cum dato habeat communem mensuram unitate majorem.»

G. Vacca.

3 : 116, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513. — **3 : 117,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 518. — **3 : 123,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513.

3 : 174. M. Zeuthen a fait observer incidemment (voir Bulletin de l'académie des sciences de Danemark 1895, p. 278) que les coordonnées obliques ont été utilisées avant Newton non seulement par Fermat mais aussi par Descartes. En effet, dans sa détermination du lieu à quatre droites (voir Descartes, *La géométrie*, éd. Paris 1886, p. 21—23), l'angle entre les axes coordonnés n'est pas droit, mais égal à un des angles donnés. D'autre part, il est un peu difficile de comprendre pourquoi M. Cantor estime que Fermat a seulement „fast verstohlenerweise angedeutet“ le progrès constitué par l'introduction de coordonnées obliques. Dans le passage reproduit par M. Cantor à la page 817 du 2[d] tome des *Vorlesungen*, Fermat introduit expressément des axes coordonnés dont l'angle peut avoir une grandeur quelconque, et en indiquant ensuite l'équation de la droite (voir *Oeuvres de* Fermat I [1891],

p. 92), il dit expressément qu'il fait l'angle entre les axes égal à un angle donné, c. à. d. de grandeur arbitraire. G. Eneström.

3 : 183, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 432. — **3 : 201,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 513. — **3 : 207,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 519.

3 : 215. Herr Cantor giebt an, dafs Leibniz in seinem Aufsatze vom Jahre 1694: *Nova calculi differentialis applicatio* zum ersten Mal das Wort „Funktion" benutzt hat, aber freilich in einer anderen Bedeutung als die jetzt geläufige, und giebt eine wörtliche Übersetzung von Leibnizens Definition. Hierzu ist zu bemerken, dafs Leibniz schon in den Acta Eruditorum 1692 das Wort „functio" in dieser Bedeutung benutzt hat (vgl. Pringsheim, *Encyklop. der mathem. Wissensch.* **2**, 1899, S. 3); in seinem dort (S. 168—172) erschienenen Artikel: *De linea ex lineis numero infinitis ordinatim ductis* etc., findet sich in der That (S. 170) folgender Passus: „recta tangens vel aliae nonnullae functiones ab ea pendentes" und auf derselben Seite: „*y* vel alia functio ad punctum illud determinandum aequivalens". — Die von Herrn Cantor mitgeteilte Definition ist sehr dunkel und es würde nützlich gewesen sein, wenn er als Ergänzung derselben auch die von Leibniz in dem Briefe an Huygens vom 28. Juni 1694 gegebene Erklärung des Wortes hinzugefügt hätte: „j'appelle fonctions l'abscisse, l'ordonnée, la corde, tangente, perpendiculaire . . . et quantité d'autres" (siehe *Der Briefwechsel von* G. W. Leibniz *mit Mathematikern, herausgegeben von* C. I. Gerhardt **1**, 1899, S. 740). G. Eneström.

3 : 218, 224, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 513—514.

3 : 225. In Bezug auf die Frage des Herrn Cantor: „Wo ist die Handschrift von [Johann] Bernoullis unterdrückten Vorlesungen über Differentialrechnung?" kann bemerkt werden, dafs es wenigstens drei Abschriften derselben gegeben hat; aus einem in der Bibliothek der Stockholmer Akademie der Wissenschaften befindlichen Briefe Montmorts an Johann Bernoulli vom 28. Oktober 1718 geht nämlich hervor, dafs aufser dem Exemplare, das Hôpital selbst besafs, zwei andere in den Händen des Pater Reyneau und des Pater Bizance waren (vgl. Johann Bernoulli, *Opera* II [1742], S. 509). Es wäre wohl also nicht ganz unmöglich, dafs eine Abschrift der Vorlesungen noch wiedergefunden werden könnte. G. Eneström.

3 : 228. Hier hätte vielleicht bemerkt werden können, dafs Johann Bernoulli in der „Lectio undecima" der *Lectiones mathematicae de methodo integralium* ausdrücklich die Integrabilität der homogenen Differentialgleichungen erster Ordnung vermittelst der Substitution $y = zx$ angegeben hat (siehe *Opera omnia* III [1742], S. 422, Z. 1—4). Dieser Umstand scheint Herrn Loria bei der Abfassung seines Aufsatzes in den Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. **9**, 1899, S. 241—274 entgangen zu sein, denn sonst hätte er wohl denselben erwähnt, wo er (S. 250) auf die von G. Manfredi 1714 ausgeführte Integration der homogenen Differentialgleichung erster Ordnung aufmerksam macht. G. Eneström.

3 : 232, siehe BM 1_3, 1900, S. 514.

3 : 246. Herr Cantor bemerkt, daſs offenbar nicht alles, was in der *Analyse des infiniment petits* sich findet, schon in den Lehrvorträgen Johann Bernoullis vom Jahre 1692 vorgekommen sein kann. Dies hat auch Johann Bernoulli selbst ausdrücklich hervorgehoben in der Verteidigungsschrift gegen Taylor, die von Joh. Burchardus im Jahre 1721 redigiert und in den Acta Eruditorum 1721, S. 195—228 publiziert wurde. Dort wird nämlich S. 224 gesagt, daſs „lectiones illae in usum Hospitalii Parisiis conscriptae, quamvis copiosae, minimam tamen constituunt partem eorum, quae Noster [= Johann Bernoulli] ... eidem suppeditavit“, und es wird daselbst auf verschiedene Paragraphen der *Analyse des infiniment petits* hingewiesen, deren Inhalt aus den Briefen Johann Bernoullis an Hôpital stammt. G. Eneström.

3 : 246, 250, siehe BM 1_3, 1900, S. 514.

3 : 447, 455. Die Angabe, daſs der in den Acta Eruditorum 1700, S. 261—266 abgedruckte Artikel von Jakob Bernoulli: *Solutio propria problematis isoperimetrici* „im Wesentlichen eine Anzahl von Beispielen“ bringt, dürfte verbessert werden können. In der That enthält dieser Artikel die später in der *Analysis magni problematis isoperimetrici* gegebenen allgemeinen Lösungen der besonderen Fälle des betreffenden Problems, aber ohne Herleitung. Jakob Bernoulli benutzt selbst die Ausdrücke: „genuina solutio“, „generalissimae solutiones“, und soweit uns bekannt ist, sind die Verfasser, welche die Geschichte des isoperimetrischen Problems behandelt haben, darüber einig, daſs der Artikel vom Jahre 1700 die Endresultate enthielt (vgl. z. B. Bossut, *Histoire des mathématiques* II [1810]; S. 40; Suter, *Geschichte der mathematischen Wissenschaften* II [1875], S. 139). G. Eneström.

3 : 477. Die Worte: „Daniel Bernoulli wartete noch zwei Jahre mit der Veröffentlichung seiner Methode“ sollten gestrichen oder wenigstens geändert werden. Wie Herr Cantor richtig angiebt, hatte Daniel Bernoulli seine Methode schon im Jahre 1724 in den *Exercitationes mathematicae* veröffentlicht, deren „Licenza“ vom 11. Juli 1724 ist, und von denen ihr Verfasser am 12. August 1724 an Goldbach schreibt, daſs sie kürzlich („nuper“) erschienen waren (siehe *Correspondance mathématique ... publiée par* P. H. Fuss II, S. 211). G. Eneström.

3 : 479. Der Umstand, daſs Daniel Bernoulli im Jahre 1725 von der Integrabilität homogener Differentialgleichungen in einer Weise spricht, als wenn es sich um eine ganz allgemein bekannte Thatsache handelte, veranlaſst Herrn Cantor zu der Vermutung, daſs Daniel Bernoulli damals Manfredis Aufsatz von 1714 kannte. Das ist ja sehr gut möglich, da aber die Integrabilität der homogenen Differentialgleichungen erster Ordnung schon in dem 1691—1692 verfaſsten *Lectiones mathematicae de methodo integralium* des

Johann Bernoulli angegeben wurde (siehe Johann Bernoulli *Opera omnia* III [1742], S. 422), und da dieser in den Acta Eruditorum 1720 (vgl. l. c. II [1742], S. 437) auf diese Integrabilität hingewiesen hatte, so ist es wohl wahrscheinlicher, dafs Daniel Bernoulli die betreffende Kenntnis von seinem Vater bekommen hatte. G. Eneström.

Anfragen.

89. Sur un traité d'algèbre du moyen âge en langue hébraïque. M. Steinschneider a mentionné différentes fois (voir Biblioth. Mathem. 7_2, 1893, p. 53; 2_3, 1901, p. 60) un manuscrit hébreu (n° 1029[5]) de la Bibliothèque nationale de Paris, qui contient un recueil de 194 questions algébriques conduisant à des équations des quatre premiers degrés. Ce recueil a probablement été traduit du latin par Mordechai Finzi (vers 1450), et l'auteur de l'original y est nommé „Dardi" de Pisa, mais M. Steinschneider fait observer que „Dardi" peut être une mutilation du vrai nom de l'auteur. De fait, on ne connaît actuellement aucun mathématicien „Dardi" du moyen âge, et s'il est permis de lire „Nardi" au lieu de „Dardi", le nom de l'auteur peut très bien être une mutilation de Leonardo de Pisa, dont le *Liber abbaci* contient à la fin (chapitre XV) un assez grand nombre de questions algébriques conduisant à des équations du quatrième degré au plus. On sait aussi qu'il existe des manuscrits contenant seulement les chapitres XIV et XV du *Liber abbaci* (voir Narducci, *Catalogo di manoscritti ora posseduti da B. Boncompagni*, 2ª edizione, Roma 1892, p. 78).

On demande un examen du manuscrit hébreu ci-dessus mentionné, en vue de constater s'il est une traduction ou non du dernier chapitre du *Liber abbaci* de Leonardo Pisano. G. Eneström.

90. Sur l'algèbre de Robert Recorde (1546). Dans son *History of the study of mathematics at Cambridge* (Cambridge 1889), M. W. W. R. Ball fait mention (p. 15—17) des deux traités *Grounde of artes* (1540) et *Whetstone of witte* (1556) de Robert Recorde, et il ajoute: „both these treatises were frequently republished, and had a wide circulation". Pour ce qui concerne le second traité, cette indication nous semble un peu suspecte; en effet, nous ne connaissons aucune nouvelle édition du *Whetstone of witte*, et l'édition originale paraît être excessivement rare, au moins hors de l'Angleterre. De plus, les renseignements sur le contenu du livre cité de Recorde donnés dans les traités d'histoire des mathématiques sont très incomplets (voir p. ex. Cantor, *Vorlesungen* II², p. 479).

On demande une notice sur le *Whetstone of witte*, faisant connaître en premier lieu s'il y a là quelques résultats attribués jusqu'ici à des auteurs postérieurs à Recorde. G. Eneström.

91. John Caswell (1685). Dans son article *Über die Entwickelung der Zeichen- und Formelsprache in der Trigonometrie* (Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, p. 70), M. A. von Braunmühl a appelé l'attention sur un écrit de John Caswell qui se trouve dans les *Opera* de John Wallis. Cet écrit assez important pour l'histoire de la trigonométrie semble être resté presque inconnu jusqu'ici, et dans les dic-

tionnaires biographiques nous avons en vain cherché des renseignements sur son auteur. Nous savons seulement qu'il doit avoir rédigé son *Account of the doctrine of trigonometry both plain and spherical* (l'original anglais de l'écrit mentionné par M. BRAUNMÜHL) peu de temps avant l'an 1685, où WALLIS l'inséra dans son *Algebra*; qu'il était alors „vice-principal of Harthall in Oxford" (WALLIS, *Algebra* p. 166); et qu'il a publié en outre *The quadrature of a portion of the epicycloid* (Philos. Trans. **19** [1698], p. 113—114) et *Account of his new invented baroscope* (ibid. **24** [1706], p. 1597—1603), où il est appelé „Mr CASWELL of Oxford". De plus, nous avons noté que CASWELL a été cité par WALLIS en 1699 à la fin de l'article *Quadrature of the parts of the lunula of HIPPOKRATES Chius* (Philos. Trans. **21**, p. 411—418; cf. Acta Erud. 1700, p. 306—312).

On demande une brève notice biographique sur JOHN CASWELL et une liste de ses écrits non mentionnés ci-dessus. G. ENESTRÖM.

92. Sur les manuscrits de J. Stirling. La notice biographique de STIRLING insérée dans l'*Encyclopaedia Britannica* contient le passage suivant: „A considerable collection of literary remains, consisting of papers, lettres, and two manuscript volumes of a treatise on weights and measures, are still preserved at Garden by STIRLINGS great-grandson and namesake". Ces manuscrits ont-ils été examinés par quelque mathématicien? En cas de l'affirmative, contiennent-ils des résultats intéressants? G. VACCA.

Bemerkung zur Anfrage 82 über die „formula exponentialis replicata". Diese Exponentialfunktion wurde im Jahre 1722 in einem Briefe von GOLDBACH an NIKOLAUS II BERNOULLI erwähnt. Jener schrieb nämlich den 2. Januar 1722 (siehe *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIe siècle publiée par* P. H. FUSS, II, St. Pétersbourg 1843, S. 128):

> Rogo ut mihi significes, liceatne illius [= NEWTONI] canonis ope quantitatem ... $a^{b^{c^{d \text{ etc.}}}}$ commutare in seriem cujus omnes termini sunt rationales; ... communicabo tecum methodum, qua rem praestare posse fateberis.

In seiner Antwort vom 31. Januar 1722 bemerkt BERNOULLI (a. a. O., S. 133):

> Quod ad seriem attinet, quae exhiberet valorem ... $a^{b^{c^{d \text{ etc.}}}}$ nondum mihi patet modus illas inveniendi ... sed haec aliquando attentius considerare licebit,

aber keiner der beiden Briefschreiber scheint auf diese Frage zurückgekommen zu sein. G. ENESTRÖM.

Recensionen.

Moritz Cantor. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Dritter Band. Zweite Abteilung. Von 1700—1726. Zweite Auflage. Leipzig, Teubner 1901. 8°, S. 263—492. M. 6,60.

In unserer Besprechung der ersten Auflage dieser Abteilung der *Vorlesungen* (Biblioth. Mathem. 1896, S. 17—24) bemerkten wir, dafs mit dem Anfange des 18. Jahrhunderts das mathematisch-historische Quellenmaterial so reichhaltig und so verschiedenartig wird, dafs es gar nicht von einem einzigen Manne bewältigt werden kann, ohne besondere, zum gröfsten Teil noch nicht vorhandene Vorarbeiten zur Verfügung zu haben, und dafs man folglich diese Abteilung der *Vorlesungen* nicht als eine eigentliche Geschichte des Zeitraumes 1700—1726, sondern vielmehr als eine Sammlung von wertvollen und zum Teil sehr vollständigen mathematisch-historischen Spezialuntersuchungen betrachten soll. Da die neue Auflage nur um 10 Seiten vermehrt worden ist, und wesentliche Umarbeitungen nicht vorkommen, so erhellt, dafs die oben gemachte Bemerkung auch hier statthaft ist, was um so weniger befremden kann, als in den letzten fünf Jahren verhältnismäfsig wenig gethan worden ist, um für den betreffenden Zeitraum die erwünschten Vorarbeiten auszuführen, sodafs sogar ein geschätzter Mitarbeiter dieser Zeitschrift behauptet hat (siehe oben S. 120), und zwar nicht ohne Grund, die Geschichte der Mathematik des 18. Jahrhunderts sei noch zu schreiben.

Wie soeben angedeutet wurde, betragen die Zusätze zusammen 10 Druckseiten; neu hinzugekommen sind u. a. eine Notiz über G. Manfredi (S. 460—461) und ein kurzer Bericht über einige Untersuchungen von J. Riccati (S. 411—412, 474—475). Dagegen scheint es dem Verfasser entgangen zu sein, dafs auch in Bezug auf einige Gegenstände, die schon in der 1. Auflage berücksichtigt waren, gewisse Ergänzungen erwünscht sind; wir werden uns hier erlauben auf einen solchen Gegenstand aufmerksam zu machen. Bei der ausführlichen Behandlung des Problems der rechtwinkligen Trajektorien (S. 461—473) wird auch (S. 468—469) die von Johann Bernoulli 1716 vorgelegte, damals sehr schwierige Trajektorienaufgabe erwähnt und (S. 469—472) die von Taylor herrührende Lösung dieser Aufgabe *in extenso* mitgeteilt. Darauf bemerkt Herr Cantor (S. 473): „Wir würden der Trajectorienaufgabe eine unverhältnifsmäfsig grofse Bedeutung verleihen, wenn wir in gleicher Ausführlichkeit weiter berichten wollten“, und fügt noch 6 Zeilen über diesen Gegenstand hinzu. Unseres Erachtens ist dieser unverhältnismäfsig kurze Abschlufs der vorhergehenden Darstellung sehr zu bedauern, und zwar sowohl vom litterargeschichtlichen als vom eigentlich mathematisch-historischen Gesichtspunkte aus. Denn teils würde es an und für sich von grofsem Interesse gewesen sein aus den *Vorlesungen* zu erfahren, auf welche Weise die Bernoullische Partei die von ihrem Leiter gestellte Aufgabe löste; teils hatte Taylor in seiner Lösung

dieser Aufgabe den eigentlich schwierigen Punkt, nämlich das Wegschaffen des Parameters a, durch ein Verfahren, das fast wie eine Taschenspielerei aussieht, erledigt, und darum würde es angemessen gewesen sein, wenigstens anzudeuten, wie JOHANN BERNOULLI und sein Sohn NIKOLAUS in den Acta Eruditorum 1720 sich einer leichtverständlichen Methode bedienten, deren Grundgedanke zum Teil mit dem des TAYLORschen Verfahrens übereinstimmt.

Aufser den eigentlichen Zusätzen sind an verschiedenen Stellen Verbesserungen eingeführt worden, die dem Leser natürlich auch sehr willkommen sind. Eine solche Verbesserung, die dem Verfasser offenbar ziemlich grofse Mühe verursacht hat, erlauben wir uns hier besonders hervorzuheben, zumal wir mit der Weise, in der Herr CANTOR seine Darstellung modifiziert hat, nicht ganz einverstanden sind. Bekanntlich giebt es einen Brief von LEIBNIZ an OLDENBURG, der vom 21. Juni 1677 ist, und dessen Anfangsworte in dem von GERHARDT veröffentlichten Konzepte: „Accepi hodie literas tuas" lauten, während das Wort „hodie" in dem von WALLIS (1699) veranstalteten Abdrucke des Briefes, sowie in dem *Commercium epistolicum* (1712) fehlen; Herr CANTOR ist in der ersten Auflage seiner *Vorlesungen* von der Voraussetzung ausgegangen, dafs LEIBNIZ seine Antwort am Empfangstage von NEWTONS Schreiben schrieb, und dafs das Wort „hodie" entweder dort stand, oder wenigstens nur durch ein Versehen von LEIBNIZ ausgelassen wurde. Jetzt hat es sich durch die von Herrn CANTOR gemachten Nachforschungen herausgestellt, dafs der Originalbrief das Wort „hodie" zwar ursprünglich enthalten hatte, dafs aber dieses Wort durch einen Klecks unleserlich gemacht worden ist, und Herr CANTOR ist geneigt, diesen Umstand so zu erklären, dafs LEIBNIZ zwar seine Antwort am Empfangstage von NEWTONS Schreiben begann, dieselbe aber erst später beendete und darum das Wort „hodie" bis zur Unkenntlichkeit tilgte. Mit dieser Erklärung sind wir vollständig einverstanden (vgl. Biblioth. Mathem. 1899, S. 26—27), aber durch dieselbe verliert unserer Ansicht nach die ganze Frage ihre historische Bedeutung; man hätte also im Texte alles, was sich auf das Wort „hodie" bezog, streichen können, und es genügte in einer Note zu bemerken, aus den Anfangsworten des Konzeptes könne man gar nichts über den Empfangstag von NEWTONS Schreiben schliefsen und ebenso wenig könne man erraten, wie LEIBNIZENS Antwort ausgesehen hätte, wenn sie wirklich am Empfangstage abgesandt worden wäre Auf diese Weise hat aber Herr CANTOR seine Darstellung nicht modifiziert; im Gegenteil wird auch in der neuen Auflage der *Vorlesungen* die „hodie"-Frage wenigstens sechsmal (S. 187, 191, 286—287, 302—303, 311, 320—321) berührt oder behandelt, und an der ersten Stelle wird es sogar ausdrücklich behauptet, LEIBNIZ habe NEWTONS Brief an dem Tage, an welchem er ihn erhielt, beantwortet. Diese Stelle gehört zwar der vorigen Abteilung der *Vorlesungen* an, und es ist ja möglich, dafs die Nachforschungen des Herrn CANTOR damals noch nicht beendet waren. In jedem Falle verstehen wir aber nicht, warum S. 303 die Note 3) noch beibehalten ist; wenn das Fehlen von „hodie" in dem älteren Abdrucke darauf beruht, dafs LEIBNIZ selbst in seinem Briefe das Wort unleserlich gemacht hatte, so hat es wohl keinen Sinn zu sagen, dafs H. SLOMAN dies Fehlen nicht hinreichend gewürdigt hat.

Unter den Druckfehlern, welche wir in der ersten Auflage notiert hatten, finden wir folgende in der zweiten Auflage wieder: S. 343, Z. 8 „$0 + 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots$" statt „$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots$"; S. 355, Z. 23 „Ars

cogitandi" statt „Ars conjectandi"; S. 287, Note 1) steht wie in der 1. Auflage „Bodmann", aber wahrscheinlich ist E. BODEMANN gemeint. — Von neuen Druckfehlern haben wir nur zwei notiert, nämlich S. 323, Z. 34 „1711" statt „1713" und S. 466, Z. 33 „$xdx + xydy$" statt „$xdx + ydy$".

G. ENESTRÖM.

F. X. Kugler. Die babylonische Mondrechnung. Zwei Systeme der Chaldäer über den Lauf des Mondes und der Sterne. Auf Grund mehrerer von J. N. STRASSMAIER kopierten Keilinschriften des Britischen Museums. Freiburg i. Br., Herder 1900. XV + 214 S. Lex. 8° + 13 Tafeln. M. 24.

Ein so gelehrtes, aber auch auf so fremdartigem, schwer übersehbaren Boden sich bewegendes Werk, wie das vorliegende, zu besprechen, ist nicht leicht, und es könnte die Aufgabe voll befriedigend nur von einem Berichterstatter gelöst werden, der auch in der Keilschriftforschung erfahren genug wäre, um ein entscheidendes Wort mitzusprechen. In dieser Lage befindet sich der Unterzeichnete nicht, und so mufs derselbe gleich von vornherein das Ziel, welchem er zustrebt, niedriger stecken und sich darauf beschränken, dem Leser eine Übersicht über die sehr wichtigen, ja vielfach geradezu überraschenden Ergebnisse des Buches zu geben. Einigermafsen tröstlich ist ja der Umstand, dafs Pater KUGLER ebenfalls nicht von Hause aus Assyriologe ist, sondern die sprachlichen Daten so, wie sie ihm geboten wurden, hinnehmen mufste, um ihren fachwissenschaftlichen Kern herauszuschälen, was ihm anscheinend vorzüglich geglückt ist. Es ist bekannt, dafs vor etwa zehn Jahren die beiden Jesuiten P. EPPING — als Astronom — und P. STRASSMAIER — als Sprachforscher — mit neuen Aufschlüssen über mesopotamische Sternkunde hervortraten, die über das, was man bisher hauptsächlich durch SAYCE über den erwähnten Gegenstand erfahren hatte, weit hinausgingen. Eine Fortführung dieser Untersuchungen war geplant, aber EPPING starb bald nachher, STRASSMAIER sah sich durch Kränklichkeit an weiterer Bearbeitung der Texte verhindert, und ein dritter Ordensgenosse, der sich bereits ziemlich eingehend mit der Sache vertraut gemacht hatte, sah sich durch anderweite Pflichten mitten in seinen Studien unterbrochen. So fiel dem P. KUGLER in Valkenburg (Niederlande) die Verpflichtung zu, in die Lücke zu treten, und wir sehen, dafs er es mit der selbst übernommenen Aufgabe sehr ernst genommen hat. Das Material war gegeben; es aber zu interpretieren und den tabellarischen hie und da sogar beschädigten Aufzeichnungen der chaldäischen Astronomen einen klaren Sinn abzugewinnen, mufste schwer genug fallen. Wir glauben, dafs der Verf. aus dem ihm übermittelten Stoffe ein lebensvolles Bild herausgeschält hat, dessen Züge nunmehr deutlich genug gesehen werden können, um von den Beziehungen zwischen altbabylonischer und griechischer Wissenschaft eine ungleich zutreffendere Vorstellung zu gewinnen, als dies früher möglich war.

Dafs man in Babylon Finsternisse vorauszubestimmen vermochte, wird bereits von PTOLEMAEUS bezeugt, und man hatte auch allen Grund zu vermuten, dafs sie zu diesem Zwecke einen ziemlich genauen Wert des Zahlenverhältnisses verwendeten, in welchem die Länge des synodischen zu der des drakonitischen Monates steht. Man war bisher allgemein der Ansicht, dafs eine exaktere Berechnung dieses Wertes zu den vielen Verdiensten des HIPPARCH gehöre. Dem gegenüber wird nun hier sorgfältig geprüft, was in den chaldäischen Tafeln selbt vorliegt, aus denen hervorgeht, dafs man den verwickel-

ten Lauf des Mondes aufs gründlichste verfolgt und auf Gesetzmäfsigkeiten zurückzuführen versucht hat. Dies in der Weise zu thun, wie es heute geschieht, indem man jede einzelne Störung isoliert und durch eine besondere Formel darstellt, ging damals freilich nicht an; wohl aber war man soweit gekommen, das Maximum und Minimum der Bewegungsgeschwindigkeit unseres Trabanten zu ermitteln und daraus die Zeitdauer eines Umlaufes herzuleiten. Hipparchs Angabe für die Dauer eines anomalistischen Monates, der also zwischen zwei konsekutiven Durchgängen des Gestirnes durch das Apo- oder Perigaeum verfliefst, stimmt mit derjenigen völlig überein, welche aus den Keilschrifttafeln gezogen wurde. Man war somit imstande, den Zeitpunkt des Neumondes mit grofser Schärfe normieren zu können. Endlich besteht auch noch volle Identität zwischen Hipparch und seinen Vorläufern in der Bestimmung des Drachenmonates, des Intervalles zwischen zwei konsekutiven Konjunktionen des Mondes mit dem auf- oder absteigenden Knoten seiner Bahn. Dafs man in Babylon von der Nichtkoinzidenz der Mondbahn und Ekliptik unterrichtet war, ist demgemäfs einleuchtend, und zwar scheint der Neigungswinkel auf $4^0\,56'$ angesetzt worden zu sein, was mit Tycho Brahes[1]) Resultate gut harmoniert. Wenn wir nun mehrfach erfahren haben, dafs zwischen dem, was als Hipparchs geistiges Eigentum im *Almageste* überliefert wird, und dem, was die Thontabletten Altbabylons als von den dortigen Astronomen gefunden ausweisen, eine ganz auffallende Übereinstimmung obwaltet, und wenn wir weiter vernehmen, dafs das gleiche auch bezüglich des siderischen Monates behauptet werden kann, so müssen wir wirklich fragen, ob da nicht ein gewisser Zusammenhang anzunehmen sei. Die Prüfung des Verf., der wir hier natürlich nicht in den Einzelheiten nachgehen können, läfst die Chaldäer als die Urheber der verbesserten Mondperioden erscheinen.

Bis hierher bewegte sich die Untersuchung immerhin noch auf einigermafsen bekanntem Gebiete, denn gerade der Mond stand ja stets im Vordergrunde, wenn nach den Leistungen der Babylonier gefragt wurde. Ungleich weniger vorbereitet erscheint der Boden, wenn nunmehr auch der scheinbare Sonnenlauf in Betracht gezogen wird. Aus den Texten erhellt jedoch, dafs man auch die Ungleichförmigkeit der Sonnenbewegung klar erkannt hatte; um der Thatsache möglichst Rechnung zu tragen, setzte man fest, dafs die Sonne auf dem Wege vom 13^0. der Jungfrau bis zum 27^0. der Fische monatlich 30^0, im übrigen Teile ihrer Kreisbahn hingegen nur $28^0\,7'\,30''$ zurücklege. Diese beiden Winkelgeschwindigkeiten stehen zu einander im Verhältnis

$$\frac{30\cdot 60\cdot 60}{28\cdot 60\cdot 60+7\cdot 60+30}=\frac{30\cdot 2\cdot 60}{28\cdot 2\cdot 60+14+1}=\frac{16}{15}\ (\text{appr.}),$$

und dafs diese Zahlen nicht blos der Erfahrung entnommen waren, sondern auch noch eine Nebenbedeutung besafsen, ist gar nicht unwahrscheinlich. Die Art und Weise, wie Sonnen- und Mondjahr in Einklang gebracht wurden, erläutert der Verf. durch eine ansprechende Hypothese, die er jedoch ausdrücklich nur als solche angesehen wissen will. Weiterhin wird die geographische Breite des alten Babylon zum Studienobjekte gemacht. Gewöhnlich wird diese auf 35^0 angesetzt; P. Kugler hat aber eine Originalangabe für die Dauer des längsten und kürzesten Tages in jener Stadt aufgefunden, und wenn man damit in die bekannte Formel eingeht, welche die Tageslänge aus Polhöhe und Dekli-

1) Wann wird der Däne allseitig das unrichtige Adelsprädikat „de“ verlieren?

nation der Sonne zu berechnen gestattet, so kommt man auf $32\frac{1}{2}^0$. Von da aus hat sich, was Cantor bereits zutreffend vermutete, was aber jetzt mit weit gröfserer Sicherheit festgestellt werden kann, eine sozusagen normative längste Tagesdauer nach den östlichen Ländern Asiens verbreitet.

Eine sehr wichtige Frage ist selbstverständlich die, ob man in Babylon die Präzession der Fixsterne, den stetigen Rückgang der Tag- und Nachtgleichenpunkte gekannt habe, deren Entdeckung einen unbestrittenen Ruhmestitel Hipparchs bildet. Man sollte meinen, wenn die Beobachtung der himmlischen Erscheinungen mit so grofser Genauigkeit erfolgte, wie es bislang den Anschein gewonnen, so mufste sich auch die zunehmende Vergröfserung der astronomischen Längen bemerkbar machen. Nun sind allerdings Gründe vorhanden, die dafür zu sprechen scheinen, dafs sich die erwähnte Thatsache der Aufmerksamkeit der Chaldäer entzogen habe; andererseits ist es doch sehr merkwürdig, dafs in drei Tafeln verschiedenen Alters die Jahrespunkte eine verschiedene Lage auf der Ekliptik haben, was doch wieder auf die Berücksichtigung einer Verschiebung des vermeintlichen Fixpunktes hinweisen würde. Der Verf. vertagt einstweilen die Entscheidung, weil es ihm gelungen ist, neben der als „System I“ bezeichneten Methode, nach welcher die Babylonier den Mondlauf arithmetisch analysiert hatten, auch noch einer zweiten abweichenden auf die Spur zu kommen, und dieses „System II“ gewährt natürlich wieder mannigfache neue Anhaltspunkte, mit deren Eigentümlichkeiten wir uns jetzt bekannt machen wollen. Durch das Studium neu erschlossener, jedoch ebenfalls nach dem Prinzipe einer arithmetischen Progression berechneter Zahlenreihen gelang der Nachweis, dafs die Astronomen des Zweistromlandes auch die wechselnde Gröfse des scheinbaren Monddurchmessers gebucht und für die beiden Grenzwerte ganz brauchbare Zahlen — bessere als z. B. Al Bâtani — ermittelt haben. Und ebenso hatten sie zu ihrer Verfügung Tabellen für den Abstand des Mondes von der Ekliptik. Diese letzteren spielten, wie sich leicht verstehen läfst, eine wichtige Rolle bei der Vorausbestimmung der Verfinsterungen; da man eben blos interpolierte und die charakteristischen Gröfsen lediglich zwischen zwei — wennschon nicht weit von einander abstehende — Grenzen einschlofs, so konnte es nicht fehlen, dafs gelegentlich auch einmal eine angekündigte Finsternis nicht eintraf, wie dies von Epping in einem konkreten Falle wirklich nachgewiesen ward. Das hindert jedoch nicht, dafs endgültig mit der nun als falsch erkannten Meinung gebrochen werden mufs, die Finsternisprognose habe sich einzig und allein auf den Saros, die neunzehnjährige Periode, gestützt. Es war vielmehr eine wirkliche Berechnung, freilich keine trigonometrische, aber doch eine verhältnismäfsig recht genaue arithmetische; die in Frage kommenden Elemente waren, indem das Argument sich stets um gleiche, aber kleine Beträge veränderte, in Tafeln zusammengestellt, und aus diesen wurde abgelesen, ob überhaupt, und bis zu welchem Grade die leuchtende Scheibe verdeckt werden konnte. Man wufste, dafs, wenn die Ekliptikdistanz des Mondmittelpunktes $1^0\,44'\,24''$ überstieg, die Möglichkeit einer Verdunkelung aufgehört hatte. Des ferneren begnügten sich die — man darf wohl sagen — rechenfreudigen Chaldäer nicht damit, zwei verschiedene Erscheinungsreihen, jede für sich, zahlenmäfsig zu ordnen, sondern sie stellten auch Beziehungen zwischen beiden Reihen her. Man könnte, wäre der Ausdruck nicht doch etwas zu modern, es aussprechen, dafs sie den scheinbaren Monddurchmesser als Funktion der täglichen Breitenänderung auszudrücken heab-

sichtigten; „zu der Zeit, da der Monddurchmesser $2^{I}\ 17^{II}\ 4^{III}\ 48^{IV}\ 53^{V}\ 20^{VI}$“ — es ist natürlich sexagesimale Teilung gemeint — „beträgt, werden $15^{0}\ 56'\ 54''\ 22'''\ 30''''$ als tägliche Mondverschiebung angenommen, und zu der Zeit, da jener $1^{I}\ 57^{II}\ 47^{III}\ 57^{IV}\ 46^{V}\ 40^{VI}$ beträgt, nur $11^{0}\ 4'\ 4''\ 41'''\ 15''''$.“ Es wird sich wohl nicht leugnen lassen, dafs der kühne Versuch, nur mittelst des gewöhnlichen Zahlenrechnens den so verwickelten Mondlauf begreifen zu wollen, ganz überraschend gut ausgefallen ist.

Der Rückblick, den der Verf. auf „System II“ wirft, giebt uns einen vollen Begriff von der Gröfse der Geistesarbeit, welche die Babylonier aufwenden mufsten, um eine Kontrolle über die Bewegung der beiden ihre Zeitrechnung und überhaupt ihr ganzes Leben regelnden Himmelskörper zu erlangen. Eine volle Klarheit über die Entdeckung der Präzession ist ja nicht zu erbringen, denn die 12 Zeichen welche auch sie unterschieden, waren keine Sternbilder wie bei den Griechen, sondern geometrische Flächenstücke, die ein für allemal mit der Ekliptik fest verbunden blieben. Aber gewisse Indizien sprechen doch auch da für die Priorität des Ostens. Um die Betriebsamkeit der Männer, welche auf gebranntem Thone den Lauf des Mondes und der Sonne darstellten, recht augenfällig zu machen, sei noch eine kurze Übersicht über den Inhalt der einzelnen bis jetzt entzifferten Tabletten gegeben. Es gab solche, ein bestimmtes Jahr der sogenannten seleucidischen Aera vorausgesetzt, für die Gröfse des in den einzelnen Monaten verschieden grofs aussehenden Monddurchmessers, für die astronomische Länge des Mondes in den Syzygien, für die wechselnde Tagesdauer, für die astronomische Breite und Geschwindigkeit unseres Trabanten, für den Betrag der Verfinsterung, für die Dauer des synodischen Monates, der zunächst für eine fiktiv gleichmäfsige Fortbewegung der Sonne bestimmt und hiernächst durch zwei Korrektionen auf den richtigen Stand gebracht wurde, für diese korrigierte Dauer selbst und endlich für das Datum des Eintrittes beider Syzygien. Der landläufige Glaube, dafs die Himmelsbeobachtung dieser Orientalen hauptsächlich astrologischen Zwecken gedient habe, mufs auf solche Proben einer sehr ernsten und nüchternen Thätigkeit hin fallen gelassen werden, und Strabons — von Ideler nicht ganz korrekt wiedergegebene — Aussage, die Mehrzahl der Chaldäer habe die Beschäftigung mit Sterndeuterei abgelehnt, wird in ein neues Licht gerückt.

Ein Anhang geht noch kurz auf die Planetentafeln ein, mit deren Lesung und Deutung ebenfalls bereits ein Anfang gemacht worden ist. Dieselben fassen zunächst die heliakischen Auf- und Untergänge ins Auge, mit deren Aufzeichnung ja auch die älteste hellenische Sternbeobachtung begonnen hat, doch sind auch andere merkwürdige Phänomene beobachtet worden. Auch hier ergiebt sich, dafs die einzelnen Tafeln durchaus nicht dem nämlichen Zeitpunkte entstammen und den nämlichen Wissensstand zur Geltung bringen; es ist vielmehr ein gewisser Fortschritt unverkennbar. Die synodische Umlaufsdauer des Juppiter wird mit staunenswerter Schärfe angegeben. Wir hoffen, dafs wir über diese nicht minder interessante Seite der chaldäischen Astronomie in Bälde manch weiteren Aufschlufs bekommen werden.

Dafs bei einer so umfassenden Forschungsarbeit auch manche Fragen, die mit dem Hauptgegenstande nur loser zusammenhängen, auf Klärung zu rechnen haben, versteht sich ganz von selbst. So hat namentlich die Geschichte der reinen Mathematik alle Ursache, von diesen merkwürdigen Tafelkonstruktionen Akt zu nehmen, welche uns so recht deutlich zeigen, mit welchem Geschicke

das Prinzip der Sexagesimalteilung gehandhabt wurde. Auch die Chronologie geht nicht leer aus; es sei nur an eine eigenartige Analogie zwischen römischem und chaldäischem Kalender erinnert. Vor allem ist es aber von gröfstem Interesse zu sehen, wie viele unscheinbare, eben erst durch eingehende Forschung aufzudeckende Fäden zwischen der Wissenschaft des Keilschriftvolkes und derjenigen anderer Völker hin- und herlaufen. Auf einen Punkt, dessen der Verf. keine Erwähnung thut, möchten wir noch hinweisen. Wenn wir uns die älteren Kompendien der mathematischen Geographie bei den Griechen ansehen, so bemerken wir bei Euklides überhaupt noch keinen Versuch einer Berücksichtigung des quantitativen Elements. Derjenige, der wirkliche Probleme zuerst zu lösen unternimmt, ist Autolykos, und da es für ihn noch keine Trigonometrie gab, so behalf er sich, so gut es gehen wollte, mit der Anwendung arithmetischer Reihen. Es liegt gewifs nicht ferne, darin einen Nachklang chaldäischer Methodik zu erblicken.

Von der Energie und dem Scharfsinn des Verf. wird man bei Lesung seines Buches einen hohen Begriff erhalten. Gerade der Umstand, dafs er nicht Keilschriftkenner und Orientalist von Fach ist, verstärkt das Vertrauen, mit dem man seinen vielleicht ab und zu etwas kühn erscheinenden Schlufsfolgerungen nachgeht; denn ihm lag eben der von anderen übersetzte Text vor, und wenn es ihm gelang, diesen mit feststehenden astronomischen Thatsachen in Einklang zu bringen, so wurde die Gefahr vermieden, dafs in die Originalien etwas hineingelesen ward, was eigentlich nicht darin stand. Übrigens hat der Autor des auch äufserlich mustergültig ausgestatteten Werkes sich und anderen das weitere Interpretationsgeschäft erheblich erleichtert, weil er es ermöglichte, eine ganze Anzahl immer wiederkehrender mathematischer und astronomischer Kunstwörter so festzustellen, dafs man mit ihnen als mit bekannten Dingen operieren kann.

München. S. Günther.

J. G. van Pesch. De Procli fontibus. Dissertatio ad historiam matheseos graecae pertinens. Leiden, Nifterik 1900. 168 S. 8°.

Der Verfasser dieser Inauguraldissertation ist Philologe und beherrscht als solcher das von seinen Fachgenossen bearbeitete Gebiet. Er besitzt aber auch eine Belesenheit in den der Geschichte der Mathematik gewidmeten Schriften, um welche mancher Mathematiker ihn beneiden könnte. Was für seinen Zweck in Veröffentlichungen von Heiberg, von Majer, von Martin, von Tannery, von Zeuthen, sowie des Referenten gefunden werden konnte, hat er aufs gewissenhafteste sich angeeignet. Wir vermissen nur ein Werk, das H. van Pesch mit Vorteil hätte gebrauchen können, welches aber vermutlich erst erschien, als die Arbeit abgeschlossen war: die von Max. Curtze herausgegebene mittelalterliche Übersetzung des Kommentars des Anaritius zu den Euklidischen Elementen. Statt ihrer fand nur die Heiberg-Besthornsche Ausgabe des gleichen Kommentars Benutzung, welche noch nicht das Ganze zur Veröffentlichung gebracht hat. Dagegen hat H. van Pesch die Arbeiten Tittels über Geminus zu verwerten gewufst, welche von Mathematikern noch nicht berücksichtigt worden waren. Aus allen den erwähnten Schriften, zumeist aber aus der eingehendsten Durchsicht des Kommentars des Proklus zu dem ersten Buche der Euklidischen Elemente hat H. van Pesch das Material gewonnen, das ihn befähigte, die in dem Titel seiner Schrift deutlich kund-

gegebene Frage nach den Quellen, deren PROKLUS sich bediente, zu beantworten. Ohne auf die Beweisführungen einzugehen, welche vielfach sprachlichen Eigentümlichkeiten ein recht grofses Gewicht beilegen, bemerken wir, dafs folgende Schriftsteller genannt werden, welche PROKLUS zur Verfügung gestanden haben sollen: EUDEMUS, ARCHIMED, APOLLONIUS, POSIDONIUS, GEMINUS, HERON, PTOLEMÄUS, PORPHYRIUS, PAPPUS, von den Mathematikern, neben den Philosophen PLATO, ARISTOTELES, PLOTIN, SYRIANUS. H. VAN PESCH ist somit der auch vom Referenten stets geteilten Ansicht, dafs zu PROKLUS' Zeiten noch recht vieles vorhanden war, was erst später zu Grunde ging, und H. VAN PESCH weifs diese Ansicht durch zahlreiche philologische Gründe zu stützen. Vor und neben der Frage nach den Quellen des PROKLUS behandelt der Verfasser noch zwei andere seither strittige Punkte. Hat PROKLUS einen Kommentar zu sämtlichen Büchern der EUKLIDischen Elemente verfafst, beziehungsweise verfassen wollen, und was beabsichtigte PROKLUS mit seinem Kommentare? H. VAN PESCH bejaht die erste Frage. In der zweiten Beziehung schliefst er sich weder der Meinung an, PROKLUS habe die geometrische Genauigkeit für die philosophische Dialektik nutzbar machen wollen, noch der anderen, es sei PROKLUS auf die Verbesserung und Vervollständigung der Elemente angekommen. PROKLUS, so meint vielmehr der Verfasser, trug seinen Schülern auch Mathematik vor, er lehrte dieselbe nach den aufs höchste von ihm bewunderten EUKLIDischen Elementen, indem er da, wo er es für wünschenswert hielt, Erläuterungen und Zusätze einschaltete, und ein Teil dieses Vorlesungsheftes ist auf uns gekommen.

Eine 34 Seiten starke Einleitung ist der eigentlichen Dissertation vorausgeschickt. Sie wirft einen raschen Überblick über die ganze griechische Mathematik, aber wir konnten uns nicht mit dieser Einleitung befreunden. Manche dort ausgesprochene Meinung und ganz besonders die Annahme indischen Einflusses auf alexandrinische Wissenschaft scheint uns die Sache geradezu auf den Kopf zu stellen. Wir gestehen, dafs wir nach Durchlesung der Einleitung mit einem wenig günstigen Vorurteil dem Hauptgegenstande uns zuwandten. Wir glaubten, dieses aussprechen zu sollen, weil dadurch das Vergnügen, welches die tieferen Untersuchungen des Verfassers uns bereitete, eine noch stärkere Betonung erhält, und unsere Anerkennung seiner Leistungen als eine ganz gewifs nicht voraus beeinflufste erscheint.

Heidelberg. M. CANTOR.

H. Suter. Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke. Leipzig, Teubner 1900. X + 278 p. in-8°. Mark 14. —

Cet excellent ouvrage vient à propos condenser les résultats de beaucoup de travaux passés et provoquer des travaux futurs. Il est encourageant, et ce n'est pas là son moindre mérite, car il montre combien est vaste le champ de la littérature scientifique chez les Arabes et combien il y reste encore à explorer. Dans son objet spécial comme dans sa forme ce livre est neuf; aucun ouvrage analogue ni de cette envergure sur les mathématiciens arabes n'avait encore été publié. Nous possédions sans doute de bons chapitres sur les mathématiques chez les Musulmans, mais non un inventaire méthodique et complet des hommes et des œuvres pour cette portion de l'histoire des sciences.

La forme que M. SUTER a donnée à son livre peut, au premier abord, surprendre. Cependant, si l'on y réfléchit, on voit qu'elle est très commode et

probablement la meilleure. Au lieu d'être une histoire de la littérature scientifique arabe ou un dictionnaire relatif à cette littérature, ce livre est un recueil d'articles biographiques et bibliographiques classés par ordre de dates. Cette disposition a l'avantage de représenter le marche historique du sujet, sans forcer l'auteur à rien sacrifier de la précision ou de l'intégrité de la documentation à l'élégance du discours. Les Arabes ont au reste employé eux-mêmes des dispositions analogues dans plusieurs de leurs ouvrages biographiques, en sorte que celui-ci se trouve avoir un cachet bien oriental.

Les sources d'après lesquelles ont été rédigés ces articles sont en majeure partie des ouvrages édités, quelquefois même traduits, et fort connus: ceux d'Ibn Abi Oçeïbiah, d'Ibn Khallikan, de Hadji Khalfa, d'Abou'l-Fida, d'Abou'l-Faradj, d'Abou'l-Mahâsin, d'Ibn en Nedîm, etc., auxquels se joignent les travaux de Casiri, de Wüstenfeld, de Hammer Purgstall. Je ne vois guère comme ouvrage très connu encore inédit que le *Tarikh el-hokama* dont les destinées, que j'ai suivies quelque temps avec un intérêt tout personnel puisque j'ai désiré l'éditer, sont décidément bien languissantes. Il ne faut pas croire qu'ayant pu puiser à un aussi riche arsenal d'œuvres célèbres, M. Suter ait négligé d'avoir recours en outre à quelques œuvres secondaires publiées ou manuscrites et que son travail ne contienne aucune part d'inédit. Cependant la recherche de l'inédit ne pouvait pas être ici capitale. Il est encore juste d'ajouter que l'auteur a trouvé un puissant secours dans les beaux catalogues que possèdont aujourd'hui la plupart des bibliothèques européennes. Son but au reste n'était pas seulement d'énumérer les œuvres des mathématiciens arabes, mais aussi d'indiquer celles qui subsistent encore et sont en notre possession, avec leurs lieux et places. En résumé son livre est une condensation des histoires, des dictionnaires biographiques et bibliographiques et des catalogues.

Tel étant le plan de l'ouvrage, je dois dire maintenant que l'exécution m'en semble tout-à-fait remarquable. Cela signifie-t-il qu'on n'y saurait relever aucune de ces petites erreurs, aucune de ces omissions de détail, dont la découverte fait en général la joie des critiques? Non sans doute. Il est invraisemblable à priori qu'une travail aussi vaste soit exempt de toute imperfection, et M. Suter, dans une phrase qui fait honneur à sa probité scientifique sollicite lui-même les critiques ou les avis qui pourraient servir à l'amélioration de son œuvre. Il a raison; il y a un intérêt général à ce qu'un recueil de cette sorte soit amené au plus haut point possible de perfection. Mais cette recherche des fautes ou des lacunes n'est pas elle-même très aisée; elle ne peut pas se faire en quelque semaines, et c'est surtout à l'usage que l'on pourra se rendre compte de ce qui manque encore à ce livre pour qu'il devienne un répertoire achevé. En ce moment à peine puis-je indiquer quelques fautes minimes, quelques doutes ou quelques idées que je vais noter en passant.

Page VI, le nom du second éditeur d'Abou'l-Faradj est Salhani, non pas Sâlihâni, et pourquoi ne pas citer son édition plutôt que celle de Pococke? — P. 40, la forme arabe du mot „Baʿalbek" est Baʿlabakka" et le relatif est „el-Baʿlabakki", non pas „el-Baʿalbeki". — P. 46, au lieu de „el-Farât", je lirais „el-Forât". — P. 40, au lieu de „Marzuban", je lirais „Marzaban"; v. ma traduction du *Kitâb et-tanbih*, p. 148. — P. 134, lire „el-Solami" au lieu de „el-Salami"; „Solami" est l'adjectif relatif du nom des „Bénou Soléïm", comme „Djohani" est le relatif de la tribu de „Djohaïna". — P. 85 et alibi, le relatif des „Bénou Oméyah" est „el-Amawi", par exception,

non pas „el-Omawi“; v. la *Grammaire arabe* de Donat-Vernier, I, 225. — P. 71 et alibi, au lieu de la forme „Chowârezmi“, pourquoi ne pas employer la forme contractée „Chârizmi“ qui est plus usuelle? — P. 188 en note; „Chandâmir“; ne dit-on pas plus souvent „Chondémir“? — P. 170 et alibi; au lieu de „Ardjouzah“, beaucoup de personnes lisent „Ordjouzah“; v. le Catalogue des manuscrits arabes de Paris. — P. 182. Dans l'article consacré à Sibt el-Mâridînî, je ne vois pas cité son traité sur le calcul sexagésimal qui existe à Paris et qui est intéressant. — P. 72. En parlant de l'*Almageste* d'Abû'l-Wefâ el-Bûzǵânî, il eût été bon de rappeler que ce texte a donné lieu à de curieuses discussions à l'Académie des sciences de Paris, et que Marcel Devic avait commencé à en préparer la publication. — P. 76. On eût pu rappeler aussi que c'est à Maslama el-Madjriti que furent attribués les importants traités des frères de la pureté.

Comme remarque plus générale, j'indiquerai que l'auteur aurait peut-être dû se préoccuper davantage des bibliothèques orientales qui ne sont pas toutes inaccessibles, et dans lesquelles d'heureuses trouvailles sont possibles. Ainsi, pour Constantinople, il n'a cité que la catalogue de la bibliothèque de Sainte Sophie; mais les Catalogues des autres mosquées sont faits et ont à peu près la même valeur. Il eût pu noter de la sorte que, à la bibliothèque Hamidieh, par exemple, qui est assez riche en écrits mathématiques, se trouve un ouvrage d'el-Qasrânî et plusieurs ouvrages d'el-Bardjendi. Je crois que l'on devrait avoir les yeux sur ces bibliothèques de l'Orient qui ne manqueront pas de nous être largement ouvertes tôt ou tard.

M. Suter a apporté un soin tout spécial à la transcription. En cela il a suivi l'esprit de l'école allemande, beaucoup plus méticuleuse sous ce rapport que l'école française. On paraît avoir renoncé en France à la rigueur des transcriptions. Les habitudes de notre langue et les élégances de notre typographie s'accommodent mal des sons exprimés par deux ou trois consonnes ou par des lettres hérissées de barres ou de points. Je n'aurai pas la sottise d'en vouloir à M. Suter pour avoir profité des avantages que lui offraient les habitudes de la typographie allemande. Mais lorsqu'il dit qu'il ne lui suffit pas de rendre les voyelles arabes par *a*, *i*, *u* et qu'il tient encore à distinguer entre *a* et *e*, *u* et *o*, *aï* et *eï*, je me demande si c'est là l'effet d'une science grammaticale très profonde ou d'un peu d'illusion. Malgré son goût de rigueur, l'auteur se voit forcé de céder quelquefois à l'incertitude ou à la liberté qui règnent dans l'arabe, et d'avouer que l'on peut lire par exemple „Djuhani“ ou „Djuheni“, “Djûzdjâni“ ou „Djauzdjâni“, „Suyouti“ ou „Osyouti“, „Jûnis“ ou „Jûnos“ et pourquoi pas „Jonas“? L'on a beau être érudit, l'on ne peut pas apporter dans une matière plus de précision qu'elle n'en comporte.

L'on me demandera peut-être d'indiquer brièvement les résultats généraux qui se dégagent de ce travail; mais j'imagine qu'à cette question je me retournerai vers l'auteur, en lui reprochant de n'y avoir pas suffisamment répondu lui-même. Il y a bien à la fin du livre quelques pages de conclusion, exactement cinq, dans lesquelles M. Suter jette un coup d'œil sur toute la période d'histoire scientifique que son œuvre a embrassée, et qui s'étend depuis el-Fazari, le premier musulman constructeur d'astrolabes, vers 750, jusqu'à l'an 1600. Ce coup d'œil est, à notre gré, trop rapide. L'auteur, la mémoire pleine des documents qu'il venait d'amasser, aurait aisément pu faire mieux. Je sais qu'un long discours historique sur le développement des sciences dans

le monde musulman n'entrait pas nécessairement dans le cadre de son recueil; le lecteur n'est pas en droit de l'exiger; il y a cependant des choses qui ne sont pas exigibles et qui font plaisir lorsqu'on vous les donne. A la place de cette conclusion trop brève et un peu vide, une introduction largement traitée, dans la manière des mémoires de Sacy ou de Quatremère, eût été fort agréable. Il est clair que je ne puis pas ici suppléer par quelques mots à ce travail absent. J'espère que M. Suter lui-même le fera un jour et qu'il nous montrera d'une manière vive comment se sont introduites et développées les sciences dans le monde musulman, la part qu'ont prise à leur floraison les diverses confessions religieuses et les diverses races, chrétienne, araméenne, juive, sabéenne, persane, turque, berbère, qu'il nous fera assister à ce périlleux exode de la science au cours duquel elle eut à traverser tant d'invasions et de guerres, à franchir tant de révolutions, et où elle fut hospitalisée par des princes de dynasties variées, Khalifes arabes, sultans bouyides, mongols ou seldjoukides. Tous les éléments de ce brillant panorama sont dans est ouvrage, et c'est là sans doute le meilleur et le plus décisif éloge qu'on puisse en faire.

Paris. Carra de Vaux.

F. J. Obenrauch. Geschichte der darstellenden und projektiven Geometrie mit besonderer Berücksichtigung ihrer Begründung in Frankreich und Deutschland und ihrer wissenschaftlichen Pflege in Österreich. Brünn, Winiker 1897. VI + 442 S. 8⁰. + 2 Porträts. M. 9.

Am 19. Januar 1795 eröffnete Monge seine Vorträge über darstellende Geometrie an der „École normale“, in welchen er die von ihm wissenschaftlich begründete darstellende Geometrie zum ersten Male öffentlich lehrte, nachdem er durch widrige Verhältnisse dreifsig Jahre lang gezwungen gewesen war, dieselbe als Geheimnis zu bewahren. In dem seit jenem denkwürdigen Tage verflossenen Jahrhundert hat die darstellende Geometrie nun nicht nur eine hervorragende Bedeutung erlangt, sondern sie ist auch durch die Einführung der Methoden der projektiven Geometrie wesentlich umgestaltet und wissenschaftlich weiter gefördert worden. Diese Thatsachen, sowie die hundertjährige Wiederkehr des Geburtstages von Jakob Steiner (18. März 1796) veranlafsten den Herrn Verf. zu der Herausgabe des vorliegenden Werkes.

Nun bedarf sicher eine Geschichte der darstellenden Geometrie um so weniger einer Rechtfertigung ihres Erscheinens, als bisher ein ausführlicheres Werk vollständig fehlte; nur in dem bekannten *Lehrbuche der darstellenden Geometrie* von Chr. Wiener findet sich auf den ersten 61 Seiten des ersten Bandes ein Abrifs der geschichtlichen Entwickelung dieser Disciplin, in welchem sich die wichtigsten Entwickelungsmomente und wesentlichsten Fortschritte zwar knapp, aber äufserst übersichtlich dargestellt finden. Die Lücke, welche hier in der Litteratur vorhanden ist, vermag jedoch das vorliegende Werk wie von vornherein hervorgehoben werden mufs, in keiner Beziehung auszufüllen. Das, was man nach dem Titel zu erwarten berechtigt ist, nämlich eine „Geschichte der darstellenden und projektiven Geometrie“ bietet das Werk nicht, sondern nur eine Sammlung von verschiedenen historischen Aufsätzen, welche zum gröfsten Teile in Beziehung zu den genannten geometrischen Disciplinen stehen und bereits anderweitig veröffentlicht worden waren. Infolge dieser Entstehung fehlt dem Werke eine bestimmte planvolle Anlage, wozu sich noch der weitere Übelstand gesellt, dafs man in dem ganzen Werke

kritische Forschung und Sichtung des Materials auf jeder Seite vermifst. So z. B. finden sich zwar Litteraturangaben von erstaunlichem Umfange, welche zeigen, in welchem bedeutenden Mafse der Herr Verf. die einschlägige Litteratur kennt, aber wertvolle und wertlose Werke und Abhandlungen folgen einander in bunter Reihenfolge und öfter auch gehört eine Schrift ihrem Inhalte nach nicht an die Stelle, an welcher sie genannt ist, oder überhaupt nicht in das Werk. Die Aufgabe einer Geschichte irgend einer Disciplin ist es aber doch nicht, sämtliche Werke, Abhandlungen und Lehrbücher in annähernder Vollständigkeit — Lücken bleiben doch immer und sind auch hier zu finden — aufzuzählen, sondern nur diejenigen, welche, wenn auch nur in bescheidenster Weise zur Weiterentwickelung der betreffenden Disciplin beigetragen haben, anzugeben und ihren Anteil daran festzustellen. Auch zahlreiche Wiederholungen, an welchen wohl die nicht einheitliche Entstehung des Werkes schuld ist, stören den Leser sehr.

Schon ein Blick auf die Einteilung des Werkes, welches in zwei Hauptteile zerfällt, läfst verschiedene der angegebenen Mängel sofort erkennen. Der erste Teil (S. 1—164) umfafst unter der Überschrift: „Monge, der Begründer der darstellenden Geometrie als Wissenschaft" fünf der sechs Abschnitte des Buches und stellt nur eine sehr ausführliche Biographie von Monge dar, welche infolge der vielfachen Wiederholungen und Einschaltungen dem Leser aber kein klares Bild von Monges Wirken zu geben vermag.

Der erste Abschnitt (S. 1—38) schildert Monges äufsere Lebensverhältnisse und wissenschaftliche Thätigkeit bis zu der Gründung der „École normale". In diesem Abschnitte findet sich, nachdem Monges Schicksale bis zu dem Zeitpunkte, wo er Repetitor an der Militärschule in Mézières wurde, erzählt sind, ein kurzer Überblick über die geschichtliche Entwickelung der darstellenden Geometrie von den ältesten Zeiten an, welcher knapp sieben Seiten einnimmt und daher weniger bietet als Wieners Darstellung. Es folgt dann eine Aufzählung von Monges ersten Arbeiten auf dem Gebiete der analytischen Geometrie, welche ihm die Mitgliedschaft der Pariser Akademie der Wissenschaften eintrugen. „Durch diese Auszeichnung trat Monge in den Kreis jener Gelehrten ein, der aus d'Alembert, Lagrange, Laplace etc. gebildet war, und dem es Frankreich in erster Linie zu verdanken hatte, dafs nach dem Tode des grofsen deutschen Mathematikers Euler das Principat der Mathematik in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts auf Frankreich überging. Erst den genialen deutschen Mathematikern dieses Jahrhunderts Jacobi, Dirichlet, Steiner, Möbius, von Staudt, Plücker etc. gelang es nach den ersten drei Decennien dieses Jahrhunderts in den mathematischen Wissenschaften wieder an die Spitze aller Kulturnationen zu treten." Dieser Satz ist geradezu charakteristisch für die kritiklose Darstellungsweise des Herrn Verfassers. Nach welchen Gesichtspunkten sind die deutschen Mathematiker ausgewählt und warum fehlt, von anderen abgesehen, der Name Gauss? Da sich einige Seiten später zeigt, dafs Gauss dem Herrn Verf. nicht unbekannt ist, so bleibt nur die Annahme übrig, dafs der Herr Verf. ihn an dieser Stelle vergessen hat, denn das „etc." soll doch sicher nicht Gauss mit umfassen. Am Schlusse des ersten Abschnittes folgt noch ein geschichtlicher Abrifs der Entwickelung der analytischen Geometrie, ebenfalls von den ältesten Zeiten an. Ein solcher Abrifs, wenn auch in engeren Grenzen, läfst sich in einer Biographie von Monge, um seine Verdienste in dieser Richtung scharf hervortreten

zu lassen, rechtfertigen, gehört aber nicht mehr in eine Geschichte der darstellenden und projektiven Geometrie.

Die engste Beziehung zum Titel des Werkes haben der zweite und dritte Abschnitt (S. 39—67 u. 68—106), deren ersterer eine ausführlichere Inhaltsangabe von MONGES *Géométrie descriptive* enthält, während in dem letzteren Abschnitte nochmals MONGES Verdienste um die darstellende Geometrie eingehend gewürdigt werden, die Bedeutung, welche die letztere in dem gegenwärtigen Jahrhunderte erlangt hat, hervorgehoben und die Begründung der projektiven Geometrie, sowie ihre Einwirkung auf die darstellende Geometrie skizziert wird. Hier findet man auch einen Exkurs über die Entwickelung der Schatten- und Beleuchtungslehre eingeschaltet.

Der vierte Abschnitt (S. 107—150) schildert im Anschlusse an MONGES berühmtestes Werk *Applications de l'analyse à la géométrie* seine Verdienste um die Differentialgeometrie, sowie deren Weiterentwickelung im 19. Jahrhundert. Zu der Geschichte der darstellenden und projektiven Geometrie steht dieser Abschnitt aber nur in sehr loser Beziehung und gehörte daher, zum mindesten in dieser Form und Ausführlichkeit, nicht in das vorliegende Werk.

Der letzte Abschnitt des ersten Teiles (S. 151—164) unterrichtet den Leser über MONGES äufsere Lebensverhältnisse seit dem Jahre 1795 bis zu seinem Tode, über seine verschiedenen politischen Missionen und vor allem über sein nahes persönliches Verhältnis zu NAPOLEON I. Am Schlusse dieses Abschnittes läfst der Herr Verf. noch eine lange Liste von berühmten und weniger berühmten Mathematikern Frankreichs, Deutschlands, Englands und Italiens folgen, bei welcher man sich vergeblich fragt, was für einen Zweck eine derartige Aufzählung von blofsen Namen hier haben soll, zumal die Liste sehr unvollständig ist und Mathematiker mit aufgeführt sind, deren Forschungen gar keinen Bezug auf die darstellende und projektive Geometrie haben und sich zum Teil überhaupt nicht auf das geometrische Gebiet erstrecken.

Diese fünf Abschnitte hatte der Herr Verf. bereits als drei Programmabhandlungen in den Jahren 1893—1896 veröffentlicht. Bei dem vorliegenden Wiederabdruck derselben hat der Herr Verf. zwar manche Änderungen und weitere Ausführungen, viele Citate und Zusätze hinzugefügt, sie sind aber keineswegs imstande den Wiederabdruck der drei Abhandlungen in der vorliegenden Form zu rechtfertigen. Selbst wenn diese Abschnitte nur eine brauchbare Biographie von MONGE darstellen sollen, müssen sie unbedingt kritisch gesichtet, umgearbeitet und von ganz unnützen Wiederholungen [z. B. findet man auf S. 63 eine kurze biographische Notiz über GAUSS und auf S. 109 eine etwas ausführlichere] befreit werden; dann erst werden sie dem Leser ein klares und plastisches Bild von MONGES Thätigkeit geben können. Diese Abhandlungen in der jetzigen Gestalt aber als ersten Teil einer Geschichte der darstellenden und projektiven Geometrie zu bezeichnen, ist ganz und gar unzulässig.

Ob der zweite Teil auch ein blofser Wiederabdruck einer früheren Programmarbeit des Herrn Verf. ist, konnte ich nicht bestimmt ermitteln, doch scheint es mir der Fall zu sein, wenigstens nach dem Übermafse von Ergebenheitsfloskeln gegen Minister und andere hochstehende Persönlichkeiten zu urteilen. In Gelegenheitsschriften können solche Dinge sehr am Platze sein, in ein rein wissenschaftliches Buch, wie es eine Geschichte einer mathematischen Disciplin sein soll, gehören sie unbedingt nicht hinein, ebensowenig wie lange Titulaturen und Prädikate, welche die Lektüre des Buches nur aufserordentlich ermüdend machen.

Dieser zweite Teil (S. 165—442) trägt die Überschrift „Die wissenschaftliche Pflege der darstellenden und projektiven Geometrie in Österreich"; er ist, obgleich er nur einen einzigen, den VI. Abschnitt bildet, weit umfangreicher als der ganze in fünf Abschnitte gegliederte erste Teil. Zunächst kann er den Leser dadurch überraschen, dafs sein Inhalt sich mit der gewählten Überschrift wieder sehr wenig deckt, wenn der Leser nicht bereits durch den ersten Teil hierauf vorbereitet sein sollte. Alle Mängel, welche bei der Besprechung des ersten Teiles wiederholt gerügt sind, besitzt dieser zweite Teil in gesteigertem Mafse und macht es dem Leser unmöglich, ein klares und richtiges Bild der geschilderten historischen Entwickelung zu erhalten, zumal wesentliche Momente und Dinge öfter nicht erwähnt, dagegen viele sehr unwesentliche, deren Erwähnung ganz gut hätte unterbleiben können, ausführlich erzählt sind. Auch Unrichtigkeiten finden sich vor. Dazu kommt noch, dafs diesem Teile, trotz seines bedeutenden Umfanges von fast 300 Seiten jede äufsere Gliederung fehlt und dafs auch das Inhaltsverzeichnis desselben auf S. IV nicht vollständig und zuverlässig ist, wodurch die Lektüre noch besonders erschwert wird.

Eine ausführliche Einleitung behandelt hauptsächlich die mittelalterliche Baukunst und erzählt dem Leser eine Menge interessanter Einzelheiten über Kirchen-, Burgen- und Schlofsbauten nicht nur in Österreich, wobei aber für die Geschichte der darstellenden Geometrie aufser einigen allgemeinen Redensarten kein positives Ergebnis herausspringt. Dann folgt eine Darlegung von Dürers und Keplers mathematischen Leistungen und der Rückwärtsentwickelung aller Lehranstalten in Österreich unter der Herrschaft des Jesuitenordens im 17. und 18. Jahrhundert. Damit ist der Herr Verf. zu dem Zeitpunkte gelangt, mit welchem die Gründung von höheren technischen Lehranstalten in Frankreich einsetzte. Andere Länder folgten in der Errichtung derartiger Lehranstalten, an welchen die darstellende Geometrie ihre hauptsächliche Pflege und Fortentwickelung im Sinne der projektiven Geometrie fand. Die Entwickelung der projektiven Geometrie wird ausführlicher geschildert und besonders der Leistungen Steiners gedacht.

Es seien hier nur noch einige für das Buch charakteristische Stellen hervorgehoben, bei welchen man sich vergeblich nach ihrem Zwecke und Nutzen fragt. So werden z. B. alle Männer aufgezählt, welche an österreichischen höheren Lehranstalten darstellende und projektive Geometrie gelehrt haben, und sogar deren Beförderungen in höhere Stellungen genau angegeben. Auf S. 361 versteigt sich der Herr Verf. sogar zu der sehr kühnen Behauptung, dafs die darstellende Geometrie in der zweiten Hälfte dieses Jahrhunderts „geistiges Eigentum des österreichischen Bürgerstandes" geworden ist. Auch eine Anzahl von Kultusministern in Österreich wird namhaft gemacht; es ist wenigstens gut, dafs das Buch bereits 1897 erschienen ist, denn sonst wäre diese Liste noch länger geworden. Auch die polnischen Lehranstalten und Lehrbücher sind nicht vergessen, obgleich weder die einen noch die andern auch nur den geringsten wissenschaftlichen Fortschritt bewirkt haben. Auf S. 364—366 findet der Leser die Dozenten aufgezählt, welche an den technischen Hochschulen Österreichs, Deutschlands, der Schweiz etc. während des Studienjahres 1895/6 darstellende Geometrie vorgetragen haben, nebst Angabe der Anzahl von Vortrags- und Übungsstunden; welchen Wert soll eine solche, nicht einmal vollständige und richtige Liste haben? Auf S. 382 wird dem Leser in nicht weniger als sechs Zeilen die an eine hohe Persönlichkeit ge-

richtete Widmung eines Buches mitgeteilt. Bei der Nennung einer Abhandlung berichtet Herr O., dafs ihr Verfasser „so liebenswürdig“ war, sie Herrn O. „in dankbarer Erinnerung für die von ihm als ausgezeichnet anerkannte litterarische Arbeit *Monge, der Begründer der darstellenden Geometrie als Wissenschaft*“ zuzusenden; was hat die Anführung einer derartigen Liebenswürdigkeit für Wert? Auf S. 440 erzählt Herr O. von einem dort genannten, 397 Seiten umfassenden Werke überhaupt gar nichts weiter, als wem dasselbe gewidmet ist und dafs sein Verfasser „so liebenswürdig“ war es Herrn O. „mit einer kollegialen Widmung zuzusenden“. Mit einer Lobrede auf den damaligen österreichischen Kultusminister v. Gautsch schliefst das vorliegende Werk würdig ab.

Das oben über das vorliegende Werk gefällte Urteil glaube ich durch das Vorstehende genügend gerechtfertigt zu haben. Es wäre nur zu wünschen, dafs der Herr Verf., statt den angezeigten zweiten Band erscheinen zu lassen, eine vollständige Umarbeitung und Neugestaltung des vorliegenden Bandes, unter Zugrundelegung einer strengen chronologischen und sachlichen Disposition und einer kritischen Sichtung des gesammelten reichen Materials vornähme. Dadurch würden die jetzigen Wiederholungen und Weitschweifigkeiten, die vielen überflüssigen und nicht zur Sache gehörigen Angaben verschwinden und die jetzt öfter über ganze Seiten sich erstreckenden Litteraturangaben, welche zum Teil in den Text eingearbeitet werden müfsten, wesentlich reduziert werden. Mag das Buch dabei auch auf die Hälfte oder den dritten Teil seines jetzigen Umfanges zusammenschrumpfen, an innerem Gehalte dagegen würde es in weit höherem Mafse gewinnen. Auch ein einfacherer Satzbau ist sehr wünschenswert; jetzt findet man oft die wesentlichsten Dinge in irgend einem Nebensatze eingeschaltet, während der Hauptsatz ganz Gleichgültiges, was zu jenen in keiner Beziehung steht, enthält. Neben dem verwirrenden Durcheinander in sachlicher Beziehung ermüdet den Leser nicht zum wenigsten auch die übermäfsige Anhäufung von schmückenden Nebensätzen und Beiwörtern, die Anführung sämtlicher Titel und Würden — die Orden fehlen — der namhaft gemachten Autoren. Auch von einer Beschränkung auf ein Land oder von einer besonderen Berücksichtigung desselben mufs ganz entschieden Abstand genommen werden, wenn nicht das Buch Stückwerk bleiben soll. Schliefslich ist die Hinzufügung eines ausführlichen Namen- und Sachregisters unbedingt nötig, um das Aufsuchen eines Autors oder eines Werkes zu ermöglichen. Wenn der Herr Verf. sich zu dieser durchgreifenden Umarbeitung entschliefsen könnte, so würde sein Buch in der That einen zeitgemäfsen und erwünschten Beitrag zur Geschichte der darstellenden und projektiven Geometrie liefern und sich seine dahingehende Hoffnung, welcher er in der Vorrede des vorliegenden Buches Ausdruck gegeben hat, vollkommen erfüllen.

Giefsen. Robert Haussner.

R. Guimarães. Les mathématiques en Portugal au XIXe siècle. Coïmbre 1900. 164 + (3) p. in-4°.

Cet ouvrage, composé à l'occasion de l'exposition universelle de 1900 à Paris, contient un catalogue systématique des écrits de mathématiques pures et appliquées publiés par les auteurs portugais du 19e siècle, avec des analyses succintes de la plupart de ces écrits. Le classement est celui adopté pour le *Répertoire bibliographique des sciences mathématiques*, et le catalogue

est précédé par deux petites notices, l'une sur le développement des mathématiques modernes (p. 5—9), l'autre sur l'étude des mathématiques en Portugal (p. 11—14); à la fin on trouve une table alphabétique des auteurs cités dans le catalogue.

Dans le discours *Über die neuesten mathematisch-bibliographischen Unternehmungen*, prononcé au premier congrès international des mathématiciens à Zürich en 1897, nous avons déjà parlé en faveur de la publication de catalogues spéciaux de la littérature mathématique du 19e siècle, se rapportant à différents pays, et il est évident que l'utilité d'un tel catalogue devient plus grande encore, si l'on ajoute, comme l'a fait M. GUIMARÃES, des indications sur le contenu des écrits mentionnés.

Nous avons tout lieu de croire que le catalogue est aussi complet que possible, et la rédaction de l'ouvrage, qui doit avoir coûté à son auteur beaucoup de travail, est très soignée. Aussi les remarques que nous avons faites en le parcourant ne portent que sur des points d'importance secondaire. Quant aux articles publiés dans des journaux, les indications bibliographiques qui s'y rapportent ne sont pas toujours rédigées d'après les mêmes principes. Ainsi p. ex. les renvois au Jornal de sciencias mathematicas sont donnés tantôt par le numéro du tome (voir p. 25, l. 14), tantôt par l'année du feuillet de titre du tome (voir p. 31, l. 18), tantôt par l'année de la couverture du cahier respectif (voir p. 31, l. 6); à notre avis le premier procédé est ici le plus correct. — Quand il s'agit de livres dont plusieurs éditions ont été publiées, M. GUIMARÃES signale tout simplement ce fait, mais il aurait été utile de mentionner en ce cas au moins l'année de publication de la première édition. — Dans la table alphabétique, il est un peu difficile de retrouver certains auteurs; p. ex. en parcourant les noms commençant par la lettre T, on ne trouve pas celui de M. F. G. TEIXEIRA, qui a été mis sous la lettre G (GOMES TEIXEIRA). Probablement M. GUIMARAES peut s'appuyer en ce cas sur le coutume portugais, qui est alors contraire à celui de l'étranger (voir p. ex. les tables alphabétiques du Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, de la Revue semestrielle des publications mathématiques, etc.), mais, l'ouvrage dont nous nous occupons étant rédigé en français, il aurait été convenable d'adapter aussi la table alphabétique à l'usage international. Du reste, il est très fâcheux que les auteurs portugais portent souvent plus d'un nom qu'on peut considérer comme surnom, et il serait à désirer que, si le dernier nom n'est pas celui à employer pour la table alphabétique, on ajoutât un trait d'union entre les deux mots formant le surnom.

En terminant, nous nous permettons de regretter que l'auteur n'ait pas jugé à propos d'amplifier considérablement son intéressante notice sur l'étude des mathématiques en Portugal; d'autre part il nous semble que l'aperçu du développement des mathématiques modernes aurait pu être omis sans trop de dommage.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

Neuerschienene Schriften.

Das Zeichen * bedeutet, dafs die betreffende Schrift der Redaktion nicht vorgelegen hat.

Autoren-Register.

Al-Hadschdschadsch, 23.
Al-Narizi, 23.
Anzoletti, Luisa, 41.
Aubry, 29.
Bellacchi, 68.
Beltrami, 65.
Beman, 7.
Besthorn, 23.
Bögehold, 56
Bolyai, W., 50.
Braunmühl, 9
Cantor, M., 3, 6.
Cardinaal, 31
Clerval,, 24.
Cole, 76.
Couturat, 80
Cremona, 63
Curtze, 26, 37.
Czuber, 75.
Delaunay, 58.
Duhem, 14, 66.
Eneström, 1, 25, 32, 73.
Engel, 60.
Euklides, 23.
Fabbri, 53.
Favaro, 33, 34, 68
Fink, 7.
Franchis, 67.
Galdeano, 75
Galilei, 34.
Gauss, 49, 50.
Gerland, 38
Görland, 13.
Guimarães, 47.
Gutzmer, 77
Häbler, 20.
Hagen, 48.
Hall, 54
Halsted, 51, 61.
Heiberg, 23.
Kapteyn, 5.
Kikuchi, 39.
Klug, 35.
Kluyver, 5.
Knauff, 19.
Kneser, 57
Korteweg, 5
Kürschák, 15.
Lampe, 4, 59, 75.
Laussedat, 10.
Lévy, M., 63.
Loria, 2, 8, 11.
Lovett, 81.
Maltbie, 76
Meder, 77
Milhaud, 12.
Miller, 55, 76
Müller, Felix, 74.
Pesch, 21.
Picard, 45.
Pringsheim, 40.
Rosenberger, 30
Schmidt, Fr., 50
Schmidt, W., 16, 17, 18
Schoute, 5
Scott, Charlotte, 75.
Smith, 7.
Stäckel, 43, 50, 52.
Studnička, 36.
Suter, 22
Tannery, P., 24
Timtchenko, 28.
Van t'Hoff, 46.
Voit, 63, 70.
Wallenberg, 4.
Wassilief, 58.
Wertheim, 27.
Whittaker, 78.
Wölffing, 42.
Zeeman, 5.

a) Zeitschriften. Allgemeines.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Herausgegeben von G. Eneström. Leipzig (Stockholm). 8°. [1
1_3 (1900) : 3—4. — [Recension des Doppelheftes 1_3 : 1—2 :] Naturwiss. Rundschau 15, 1900, 568 (E. Lampe.) — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1900, 121—123. — Zeitschr. für lateinlose h. Schulen 12, 1900, 92. (Holzmüller.)

Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche pubblicato per cura di G. Loria. Torino (Genova). 8°. [2
1900 : 4.

Historisch-literarische Abteilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik, herausgegeben von M. Cantor. Leipzig (Heidelberg). 8° [3
45 (1900) : 4—6.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik herausgegeben von E. Lampe und G. Wallenberg. Berlin. 8°. [4
29 (1898) : 3.

Revue semestrielle des publications mathématiques, rédigée sous les auspices de la société mathématique d'Amsterdam par P. H. Schoute, D. J. Korteweg, J. C. Kluyver, W. Kapteyn, P. Zeeman. Amsterdam. 8°. [5
9 : 1 (avril — octobre 1900).

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Dritter Band. Zweite Abtheilung. Von 1700—1726. Zweite Auflage. Leipzig, Teubner 1901. [6
S. 263—492. — [6,60 *M*] = 1^2 (1894). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, 499—501. (H. Suter, G. Eneström.) = 2^2 (1900) [Recension oder kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, 501—512. (M. Curtze, P. Tannery, I. Timtchenko, G. Wertheim, G. Eneström.) — Naturwiss. Rundschau 15, 1900, 580—581. (E. Lampe.) — Monatsh. für Mathem. 12, 1901; Lit.-Ber. 4. = 3^2 : 1 (1900). [Recension oder kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, 512—514, 518—519. (G. Eneström.) — Deutsche Litteraturz. 22, 1901, 184. — Mathesis 1_3, 1901, 26. — Zeitschr. für mathem. Unterr. 31, 1900, 612—614. (G. Wertheim.)

Fink, K., A brief history of mathematics, translation by W. W. Beman and D. E. Smith (1900). [Recension:] Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, 519—521. (G. Eneström.) — Nature 63, 1900, 103—104. (G. B. M.) — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1900, 115—116. (G. L.) [7

Loria, G., Le trasfigurazioni di una scienza. Genova 1900. [8
8°, 39 S. — Discorso pronunciato per la solenne inaugurazione dell' anno scolastico 1900—1901.

— Bemerkungen über den Entwickelungsgang der Mathematik.

Braunmühl, A. von, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie. 1 (1900). [Recension:] Blätter für das bayer. Gymnasialwesen, 1900, 582—584. (ZWERGER.) — Zeitschr. für Mathem. 45, 1900; Hist. Abt. 129. (CANTOR.) — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1900, 100—105. (G. L.) [9

Laussedat, A., Recherches sur les instruments, les méthodes et le dessin topographique. I (1898). [Recension:] Biblioth. Mathem. 1_2, 1900, 521—524. (F. KUCHARZEWSKI.) [10

b) Geschichte des Altertums.

Loria, G., Le scienze esatte nell' antica Grecia. Libro IV. Il periodo argenteo della geometria greca. [11
Modena, Accad. d. sc., Memorie 12_2, 1900, 139—216 + 8 Taf.

* **Milhaud, G.,** Les philosophes géomètres de la Grèce. Platon et ses prédécesseurs. Paris, Alcan 1900. [12
8°, 387 S. — [6 fr.] — [Recension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1900, 116—117. (G. L.)

Gerland, A., Aristoteles und die Mathematik (1899). [Recension:] Monatsh. für Mathem. 11, 1900; Lit.-Ber. 22—23. (K. ZINDLER.) [13

Dahem, P., Archimède connaissait-il le paradoxe hydrostatique? (Biblioth. Mathem. 1900). [Recension:] Vjestnik elem. matem. 24, 1900, 157. [14

Kürschák, J., Moderne Überschreibung der „Kyklu métresis". [15
Biblioth. Mathem 1_2, 1900, 514—515.

Schmidt, W., Haben Vitruv und die römischen Feldmesser aus Heron geschöpft? [16
Biblioth. Mathem. 1_2, 1900, 297—316.

Schmidt, W., Sind die Heronischen Vielecksformeln trigonometrisch? [17
Biblioth. Mathem. 1_2, 1900, 319—320.

Schmidt, W., Zur handschriftlichen Überlieferung Herons von Alexandria. [18
Rheinisches Museum für Philol. 55_2, 1900, 625—634.

Knaff, F., Die Physik des Heron von Alexandria (1900). [Recension:] Monatsh. für Mathem. 11, 1900; Lit.-Ber. 55. [19

Häbler, A., Die Lehren des Claudius Ptolemäus von den Bewegungen der Planeten. [20
Zeitschr. für Mathem. 45, 1900; Hist. Abt. 161—198.

Pesch, J. G. van, De Procli fontibus. Dissertatio ad historiam matheseos pertinens. Leiden 1900. [21
8°, (5) + 166 S. — Inauguraldissertation.

c) Geschichte des Mittelalters.

Suter, H., Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke (1900). [Recension:] Deutsche Litteraturz. 21, 1900, 3249—3251. (M. CURTZE.) — *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin. 7_2, 1901, 188—190. (E. W. BROWN.) — Zeitschr. für mathem. Unterr. 31, 1900, 614—615. (G. WERTHEIM.) [22

Codex Leidensis 399,1. EUCLIDIS elementa ex interpretatione AL-HADSCHDSCHADSCHII cum commentariis AL-NARIZII. Arabice et latine ediderunt, notisque instruxerunt R. O. BESTHORN et J. L. HEIBERG. Partis II fasciculus I. Kjöbenhavn, Gyldendal 1900. [23
8°, 79 S.

Tannery, P., et Clerval, Une correspondance d'écolâtres du XI[e] siècle (1900). [Recension:] Biblioth. Mathem. 1_2, 1900, 524. (G. ENESTRÖM.) — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1900, 124. [24

Eneström, G., Sur l'origine du terme „surdus" (= incommensurable). [25
Biblioth. Mathem. 1_2, 1900, 518. — Anfrage.

Curtze, M., Urkunden zur Geschichte der Trigonometrie im christlichen Mittelalter, gesammelt und erläutert. 1. Aus dem „Liber embadorum" des Savasorda in der Übersetzung des Plato von Tivoli. 2. Aus den „Canones sive regule super tabulas Toletanas" des Al-Zarkali. 3. Aus den „Scripta Marsiliensis super Canones Azarchelis". 4. Anonyme Abhandlung über Trigonometrie aus dem Ende des XIII. Jahrhunderts. 5. Aus „Leo de Balneolis Israhelita de sinibus, chordis et arcubus, item instrumento revelatore secretorum". 6. Anonyme Abhandlung „De tribus notis". 7. Die „Canones Tabularum primi mobilis" des Johannes de Lineriis. 8. Die Sinusrechnung des Johannes de Muris. [26
Biblioth. Mathem. 1_2, 1900, 321—416.

Wertheim, G., Über die Lösung einiger Aufgaben im „Tractatus de numeris datis" des Jordanus Nemorarius. [27
Biblioth. Mathem. 1_2, 1900, 417—420.

Timtchenko, I., Sur un point du „Tractatus de latitudinibus formarum" de Nicolas Oresme. [28
Biblioth. Mathem. 1_2, 1900, 515—516.

d) Geschichte der neueren Zeit.

Aubry, A., Estudio sobre los conicógrafos. [29
El progreso matem. 2_2, 1900, 337—363. — Historische Übersicht.

Rosenberger, F., Die moderne Entwickelung der elektrischen Principien (1898). [Recension:] Zeitschr. für Mathem. 45, 1900; Hist. Abt. 216—217. (B. NEBEL.) — Deutsche Litteraturz. 22, 1901, 243. [30

Cardinaal, J., L'enseignement mathématique en Hollande. [31
L'enseignement mathém. 2, 1900, 317—339.

Eneström, G., Gabriel de Aratoribus (1539). [32
Biblioth. Mathem. 1_2, 1900, 516. — Anfrage.

Favaro, A., Delle Meccaniche lette 1594 da Galilei (1899). [Recension:] Zeitschr. für Mathem. 45, 1900; Hist. Abt. 130. (CANTOR.) [33

Le Opere di GALILEO GALILEI. Edizione nazionale sotto gli auspicii di sua maestà il re d'Italia. Volume X. Firenze 1900. [34
4°, 531 + (1) S. — Herausgegeben von A. FAVARO.

Klug, J., Das Prinzip der virtuellen Ge-

schwindigkeiten lei Galilei. Würzburg 1900. [35
8°, 50 S — Programm des Neuen Gymnasiums zu Würzburg für das Studienjahr 1899/1900. — [Recension:] Deutsche Litteraturz. 21, 1900, 3125

Studnička, F. J., Prager Tychoniana, zur bevorstehenden Säkularfeier der Erinnerung an das vor 300 Jahren erfolgte Ableben des Reformators der beobachtenden Astronomie Tycho Brahe gesammelt. Prag 1901. [36
8°, 69 S. + Porträt. — [Recension:] Nature 63, 1900, 206—207. (J. L. E. D.) — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1900, 117—118. (G. L.)

Curtze, M., Über den Ursprung der Benennung „Radius“ für Halbmesser. [37
Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, 516. — Anfrage.

Gerland, E., Über Leibnizens Thätigkeit auf physikalischem und technischem Gebiete. [38
Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, 421—432.

Kikuchi, D., Seki's method of finding the length of an arc of a circle. [39
Tokyo, Sugaku-butsurigaku kwai, Kiji 8, 1900, 179—198. — Der japanische Mathematiker Seki starb im Jahre 1708.

Pringsheim, A., Zur Geschichte des Taylorschen Lehrsatzes. [40
Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, 433—479.

* **Anzoletti, Luisa,** Maria Gaetana Agnesi. Milano, Cogliati 1900. [41
8°. 495 S. — [4,50 lire.] — [Recension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1900, 107—108. (G. L.)

Wölffing, E., Bibliografia della coeleoïde. [42
Bollett. di bibliogr. de sc. matem. 1900, 97—99.

Stäckel, P., Über die Legendre'sche Transformation. [43
Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, 517. — Antwort auf eine Anfrage.

[Porträt von J. L. Lagrange nebst einigen biographischen Notizen.] [44
Nouv. ann. de mathém. 19_3, 1900, (cahier de janvier)

* **Picard, E.,** Sur le développement, depuis un siècle, de quelques théories fondamentales dans l'analyse mathématique. Conférences faites à Clark University. Paris Colie 1900. [45
8°, 91 S. — [Polnische Übersetzung von S. Dickstein:] Wiadomości matem. 4, 1900, 173—231. — [Recension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1900, 119—120. (G. L.)

Van t'Hoff, J. H., Über die Entwickelung der exakten Naturwissenschaften im 19. Jahrhundert. [46
Naturwiss. Rundschau 15, 1900, 557—562. — Vortrag gehalten an der deutschen Naturforscherversammlung in Aachen, 1900.

Guimarães, R., Les mathématiques en Portugal au XIXe siècle (1900). [Recension:] Wiadomości matem. 4, 1900, 250—253. (S. D.) — L'enseignement mathém. 2, 1900, 458—459. (E. Lebon.) — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1900, 111. (G. L.) [47

Hagen, J. G., On the technical terms „Differential Quotient“, „Definite Integral“. [48
Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, 517. — Anfrage.

Gauss, C. F., Werke. Herausgegeben von der Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen. Band 8. Leipzig (Göttingen), Teubner 1900. [49
4°, (3) + 458 S. — [24 M.] — Unter der Redaktion von M. Brendel bearbeitet von R. Fricke, A. Börsch, L. Krüger, P. Stäckel und J. Weingarten. — [Recension:] Deutsche Litteraturz. 21, 1900, 3383—3384. (H. Weber) — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1900, 118—119. (G. L.)

Briefwechsel zwischen Carl Friedrich Gauss und Wolfgang Bolyai. Herausgegeben von Fr. Schmidt und P. Stäckel (1899). [Recension:] Zeitschr. für Mathem. 45, 1900; Hist. Abt. 130—131. (Cantor.) [50

Halsted, G. B., Gauss and the non-euclidian geometry. [51
The americ. mathem. monthly 7, 1900, 247—252. — [Wieder abgedruckt:] Science (New York) 12_2, 1900, 842—846.

Stäckel, P., Friedrich Ludwig Wachter, ein Beitrag zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie. [52
Mathem. Ann. 54, 1900, 49—85.

* **Fabbri, E.,** Il teorema integrale di Cauchy; contributo alla storia critica dell' analisi. Bologna, Zamorani 1900. [53
8°, 71 S.

* **Hall, F.,** Die ältesten reingeometrischen Beweise zu Steiners Construction der Malfatti'schen Aufgabe. Wattenscheid 1898. [54
4°, 13 S. + 1 Taf. — Schulprogramm.

Miller, G. A., Report on the groups of an infinite order. [55
New York, Americ. mathem. soc., Bulletin 7_2, 1900, 121—130.

* **Bögehold, H.,** Historisch-kritische Darstellung der Construction der Fläche zweiter Ordnung aus neun Punkten. Jena 1898. [56
8°, 52 S. — Inauguraldissertation.

Kneser, A., Übersicht der wissenschaftlichen Arbeiten Ferdinand Mindings nebst biographischen Notizen. [57
Zeitschr. für Mathem. 45, 1900; Hist. Abt. 113—128

Wassilief, A. und Delaunay, N., P. L. Tschebyschef und seine wissenschaftlichen Leistungen. Die Tschebyschefschen Arbeiten in der Theorie der Gelenkmechanismen (1899). [Recension:] Monatsh. für Mathem. 11, 1900, Lit.-Ber. 52—53. [58

[Porträt von J. J. Sylvester nebst einigen biographischen Notizen] [59
Nouv. ann. de mathém. 19_3, 1900 (cahier de juin).

Engel, Fr., Sophus Lie (Biblioth. Mathem., 1900). — [Recension:] Deutsche Litteraturz. 22, 1901, 52—53. [60

Halsted, G. B., Robert Tucker. [61
The americ. mathem. monthly 7, 1900, 237—239

Les périodiques mathématiques des Etats-Unis. [62
L'enseignement mathém. 2, 1900, 455—456.

e) Nekrologe.

Eugenio **Beltrami.** [63
Palermo, Circolo matem., Rendiconti 14, 1900, 275-289 (Abdruck des Nekrologes von L. Cremona in den „Rendiconti dell' accademia dei Lincei" 1900). — Wiadomości matem. 4, 1900, 261—267. — *Paris*, Acad. d. sc., Comptes rendus 131, 1900, 1037—1038. (M. Lévy.) — *München*, Akad. d. Wissensch., Sitzungsber. 30, 1900, 345—348. (C. Voit.)

Joseph-Louis-François **Bertrand.** [64
Wiadomości matem. 4, 1900, 267—268.

Francesco **Brioschi.** [65
Palermo, Circolo matem., Rendiconti 14, 1900, 262—274 (Abdruck des Nekrologes von E. Beltrami in den „Rendiconti dell' accademia dei Lincei" 1898).

Georges **Brunel.** [66
Georges Brunel. Bordeaux 1900, 10 S. 8° [mit Porträt und Schriftverzeichnis]. (P. Duhem.)

Fortunato **Bucca.** [67
Palermo, Circolo matem., Rendiconti 14, 1900, 303—304. (M. de Franchis.)

Raffaello **Caverni.** [68
Venezia, Istituto Veneto, Atti 59, 1900, 377—379. (A. Favaro.) — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1900, 125—126. (G. Bellacchi.)

Ernst Reinhold Eduard **Hoppe.** [69
Berlin, Deutsche physikal. Gesellsch., Verhandl. 2, 1900, 183—201. (E. Lampe.) — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1900, 126—127.

Sophus **Lie.** [70
Mathesis 10_2, 1900, 228—229. (P. M.) — *München*, Akad. d. Wissensch., Sitzungsber. 30, 1900, 339—345. (C. Voit.)

Aleksandr **Shbikowskij** (Жбиковскій). [71
Wiadomości matem. 4, 1900, 268.

Charles Scott **Venable.** [72
New York, Americ. mathem. soc., Bulletin 7_2, 1900, 47.

f) Aktuelle Fragen.

Eneström, G., Über die von der „Royal Society" geplante mathematische Jahresbibliographie. [73
Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, 480—484.

Müller, F., Vocabulaire mathématique français-allemand et allemand-français. I (1900). [Recension:] Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, 524—525. (G. Eneström.) — Deutsche Litteraturz. 21, 1900, 3064—3065. (E. Neito.) — Mathesis 10_2, 1900, 251—252. — Bullet. d. sc. mathém. 24_2, 1900, 174. [74

[Der internationale Mathematiker-Kongreſs in Paris 1900.] [75
L'enseignement mathém. 2, 1900, 378—382. (H. F.) — Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, 485—494. (E. Lampe.) — Periodico di matem. 3_2, 1900, 95—96. (A.) — Zeitschr. für das Realschulwesen (Wien) 25, 1900. (E. Czuber.) — El progreso matem. 2_2, 1900, 388—399 [mit 6 Porträts]. (Z. G. de Galdeano.) — Wiadomości matem. 4, 1900, 243—247. (S. D.) — *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 7_2, 1900, 57—79. (Charlotta A. Scott.) — Nouv. ann. de mathém. 19_3, 1900; Chronique XLII—XLIII.

[Die amerikanische Mathematiker-Versammlung in New York 1900.] [76
New York, Americ. mathem. soc., Bulletin 7_2, 1900, 1—24 (F. N. Cole, W. H. Maltbie); 79—87 (G. A. Miller). — Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, 498.

[Die deutsche Mathematiker-Versammlung in Aachen 1900.] [77
Naturwiss. Rundschau 15, 1900, 541—543. (Meder.) — Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, 495—496. (A. Gutzmer.) — L'enseignement mathém. 2, 1900, 453—454.

[Die englische Mathematiker-Versammlung in Bradford 1900.] [78
Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, 496—498. (E. T. Whittaker.) — Nature 62, 1900, 561. (E. T. Whittaker.) — *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 7_2, 1900, 100—101.

[Die französische Mathematiker-Versammlung in Paris 1900.] [79
Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, 496.

Couturat, L., Les mathématiques au congrès de philosophie. [80
L'enseignement mathém. 2, 1900, 397—410.

Lovett, E. O., Mathematics at the international congress of philosophy, Paris 1900. [81
New York, Americ. mathem. soc., Bulletin 7_2, 1901, 157—183.

Wissenschaftliche Chronik.

Ernennungen.

— Dr. Brillouin in Paris zum Professor der allgemeinen und mathematischen Physik am „Collège de France" in Paris.

— Dr. Cullis in Southampton zum Professor der Mathematik am „Presidency College" in Calcutta.

— Dr. A. Emch in Kansas zum Professor der Mathematik an der Universität in Colorado Springs.

— Dr. J. B. Faught zum Professor der Mathematik an der „Michigan Northern Normal School" in Marquette.

— Prof. E. Janisch in Brünn zum Professor der darstellenden Geometrie an der deutschen technischen Hochschule in Prag.

— Privatdoz. L. Klug zum Professor der darstellenden Geometrie an der Universität in Klausenburg.

— Prof. A. Kneser in Dorpat zum Professor der Mathematik an der Bergakademie in Berlin.

— Prof. G. Morera in Genua zum Professor der Mechanik an der Universität in Turin.

— Prof. P. Pizzetti in Genua zum Professor der Geodäsie an der Universität in Pisa.

— Dr. A. W. Reid in Princeton zum Professor der Mathematik am „Haverford College" in Haverford.

— Privatdoz. A. Sucharda zum Professor der Mathematik an der technischen Hochschule in Brünn.

— Prof. V. Volterra in Turin zum Professor der mathematischen Physik an der Universität in Rom.

Todesfälle.

— Georg Heinrich Otto Böklen, Oberstudienrath in Stuttgart, geboren in Weinsberg den 12. September 1821, gestorben in Stuttgart den 20. Juni 1900.

— Georges Brunel, Professor der Mathematik an der Universität in Bordeaux, geboren in Abbeville den 17. September 1856, gestorben in Bordeaux den 24. Juli 1900.

— Charles Hermite, emeritierter Professor an der Universität in Paris, geboren in Dieuze (Lothringen) den 24. Dezember 1822, gestorben in Paris den 14. Januar 1901.

— Kristian Fredrik Lindman, emeritierter Professor der Mathematik am Gymnasium in Strengnäs, geboren in Vireda (Schweden) den 17. September 1816, gestorben in Örebro den 10. Januar 1901.

— Oskar Schlömilch, emeritierter Professor an der technischen Hochschule in Dresden, geboren in Weimar den 13. April 1823, gestorben in Dresden im Februar 1901.

Demnächst erscheinende Werke.

— D'après une notice dans L'enseignement mathématique 3, 1901, p. 56, la première année de l'*Annuaire des mathématiciens* (voir Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, 294) est actuellement sous presse et paraîtra dans quelques mois. Elle comprendra environ 7000 noms avec leurs adresses, et on y trouvera en outre signalés les journaux mathématiques et les principales sociétés scientifiques s'occupant de la science mathématique.

Mathematisch-historische Arbeiten in Vorbereitung.

— Für Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften ist ein *Handbuch der Geschichte der Mathematik* in Aussicht genommen. Das Handbuch soll unter der Redaktion des Herrn G. Eneström von mehreren Fachgelehrten bearbeitet werden.

— Die Akademie der Wissenschaften in Berlin hat Herrn L. Nix in Bonn zu einer Reise nach England zum Zweck der Vergleichung der arabischen Handschriften des Apollonios 500 Mark und zur Drucklegung der arabisch erhaltenen Schriften desselben Verfassers 1200 Mark bewilligt.

Neue Berichte erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

— Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung hat u. a. auch die Aufgabe größere Referate über einzelne Zweige der mathematischen Wissenschaften anzuregen und zu veröffentlichen, und eine ganze Anzahl solcher Referate ist schon erschienen, von denen einige als historische Schriften zu betrachten sind und darum in der Abteilung „Neuerschienene Schriften" angezeigt wurden. Kürzlich sind in den Jahresberichten der Vereinigung zwei neue Referate veröffentlicht worden, nämlich Bericht über *Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten* von A. Schönflies und Bericht über *Die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik* von K. Heun. Beide Berichte enthalten viele historische Notizen, aber die erste kann sicherlich nicht als historische Schrift betrachtet werden, da sie nicht die historische, sondern die *genetische* Entwickelung der betreffenden Lehre darstellt, und fast die Form eines Lehrbuches angenommen hat. Aus dem Vorworte, aber *nicht* aus dem Titel geht hervor, dafs dieser Bericht noch nicht vollendet ist. — Der Bericht des Herrn Heun hat mehr die Form einer historischen Abhandlung, da aber bei der Bearbeitung desselben besondere Rücksichten, welche auf die Darstellung wesentlichen Einfluſs gehabt haben, maſsgebend waren, dürfte es weniger angemessen sein, denselben als historische Schrift zu bezeichnen.

Gekrönte Preisschriften.

— *Akademie der Wissenschaften in Krakau.* Herr G. A. Miller hat für eine Abhandlung über die Gruppentheorie einen Preis bekommen.

— *Jablonowskische Gesellschaft in Leipzig.* Die Preisaufgabe für das Jahr 1898 beabsichtigte eine wirkliche Lösung der von Green in seiner Abhandlung „Über die Gesetze des Gleichgewichts von Flüssigkeiten ähnlich dem elektrischen Fluidum" (1832) nur angedeuteten Aufgaben, sowie auch die Ausfüllung der in der genannten Schrift vorhandenen Lücken und Dunkelheiten hervorzurufen, und der Preis wurde Herrn Fr. Büttner zuerkannt, dessen Preisschrift: *Studien über die Greensche Abhandlung: „Mathematical investigations concerning the laws of the equilibrium of fluids" (1832)* soeben erschienen ist (98 S. 4°).

— *Académie des sciences de Paris.* Le grand prix des sciences mathématiques a été décerné en 1900 à M. M. Lerch pour son mémoire sur le sujet proposé: Perfectionner en quelque point important la recherche du nombre des classes de formes quadratiques à coefficients entiers et de deux indéterminées.

Preisfragen gelehrter Gesellschaften.

— *Akademie der Wissenschaften in Berlin.* Preisfrage für das Jahr 1901. Sei $f_1(z), f_2(z), \cdots, f_n(z)$ ein Fundamentalsystem von Integralen einer linearen homogenen Differentialgleichung mit algebraischen Koeffizienten. Es soll die Funktion z der Variabeln $\frac{u_2}{u_1}, \frac{u_3}{u_1}, \cdots, \frac{u_n}{u_1}$, welche durch die Gleichung

$$u_1 f_1(z) + u_2 f_2(z) + \cdots + u_n f_n(z) = 0$$

definiert ist, einer eingehenden Untersuchung unterworfen werden. Insbesondere ist für den Fall, dafs z eine endlichwertige Funktion wird, eine Darstellung derselben zu ermitteln. Hieran ist die Erörterung der Frage anzuschliefsen, inwieweit diese besonderen Funktionen für die Integration der linearen Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung verwertet werden können.

— *Academia de ciencias exactas, físicas y naturales de Madrid.* Concurso del año 1902. Los matemáticos españoles en el siglo XVI. Noticia biográfica de los principales. Y exposición compendiosa y crítica de las obras que compusieron, hállanse ó no impresas, dignas de aprecio por cualquier concepto. (Les mathématiciens espagnols du 16ᵉ siècle: notices

biographiques, exposition succincte et raisonnée de leurs ouvrages.)

— *Accademia Pontaniana di Napoli.* Tema del concorso per l'anno 1901. Esposizione elementare dei principii del disegno assonometrico con applicazioni alle arti.

— *Académie des sciences de Paris.* Concours pour l'année 1902. Perfectionner, en un point important, l'application de la théorie des groupes continus à l'étude des équations aux dérivées partielles. — Développer et perfectionner la théorie des surfaces applicables sur le paraboloïde de révolution.

Vermischtes.

— Das im Jahre 1841 von J. A. GRUNERT begründete und nach seinem Tode (1872) von R. HOPPE fortgesetzte Archiv der Mathematik und Physik ist in den Verlag von B. G. Teubner übergegangen und wird von den Herren E. LAMPE in Berlin, W. FR. MEYER in Königsberg und E. JAHNKE in Berlin redigiert werden. Das Archiv wird auch unter der neuen Redaktion die Bedürfnisse der Lehrer höherer Lehranstalten besonders berücksichtigen.

— Die im Jahre 1856 von O. SCHLÖMILCH begründete Zeitschrift für Mathematik und Physik wird jetzt unter der Redaktion der Herren R. MEHMKE in Stuttgart und C. RUNGE in Hannover in ein Organ für angewandte Mathematik verwandelt werden. Die bisher von Herrn M. CANTOR herausgegebene Historisch-litterarische Abteilung kommt darum in Fortfall.

— Le *Congrès international de philosophie*, dont nous avons fait mention auparavant (Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, p. 296), s'est tenu à Paris du 1 au 5 août 1900. Dans la section de logique et d'histoire des sciences, des communications ont été faites par MM. M. CANTOR et G. MILHAUD sur les origines du calcul infinitésimal et par M. S. GÜNTHER sur l'histoire des origines de la gravitation. D'autre part MM. H. MAC COLL, W. E. JOHNSON, P. PORETZKY, E. SCHRÖDER, G. PEANO, A. PADOA, C. BURALI-FORTI, M. PIERI, G. VAILATI, A. VASSILIEFF, A. MACFARLANE, G. LECHALAS, B. A. W. RUSSELL, J. HADAMARD et H. POINCARÉ se sont occupés de diverses questions de la logique mathématique ou de notions fondamentales des sciences mathématiques.

Neue Beiträge zur ägyptischen Teilungsrechnung.

Von Friedrich Hultsch in Dresden.

In den *Mélanges sur la métrologie, l'économie politique et l'histoire de l'ancienne Égypte* (Paris 1895) teilt E. Revillout eine Reihe von ägyptischen Teilungsaufgaben und deren Lösungen mit. Sie sind in einem demotischen Papyrus enthalten, der ihm aus den Beständen des 'Egypt Exploration Fund' geliehen worden war. Wie Herr F. G. Kenyon mir auf meine Anfrage freundlichst mitteilte, befindet sich der Papyrus jetzt wieder in der Bibliothek des 'Exploration Fund' zu London; er gehört, wie Herr F. Ll. Griffith vorläufig festgestellt hat, der römischen Epoche an. Die folgenden Bemerkungen werden zeigen, dafs dieses Fragment eines ägyptischen Rechenbuches nicht blofs der Zeit nach, sondern auch mit seinem Inhalte eine Mittelstufe zwischen dem mathematischen Handbuche des Ahmes (um 1700—1600 v. Chr.) und dem mathematischen Papyrus von Akhmim (7. oder 8. Jahrhundert n. Chr.) einnimmt. Es sei bei dieser Gelegenheit dem Wunsche und der Hoffnung Ausdruck gegeben, dafs die Verwaltung des 'Exploration Fund' ein Facsimile dieser wichtigen Urkunde veröffentlichen und dadurch die Kenntnis des Gebietes ältester Rechenkunst bereichern möge.

Die Handschrift, die wir im Folgenden kurz als „Fund-Pap." bezeichnen werden, hat eine Übersicht über die Teilung durch verschiedene ganze Zahlen n nach dem Schema $1:n$, $2:n \ldots (n-1):n$, $n:n$ gegeben. Vollständig sind, abgesehen von einigen kleineren Lücken, nur die Reihen der Teilungen durch 7 und 8, mehr oder minder lückenhaft die Teilungen durch die Zahlen 9 bis 15 erhalten. Die ursprüngliche Übersicht hat entweder, wie in der Tabelle des Papyrus von Akhmim, mit den Ausrechnungen von je $\frac{2}{3}$ einer gegebenen Zahl oder mit der Teilung durch 3 begonnen und ist wahrscheinlich noch über die Teilung durch 15 hinausgegangen. Ganz in derselben Weise sind im Papyrus von Akhmim die Teilungen durch die Zahlen 11 bis 20 durchgeführt.[1]) Auch die Teilungen durch

---

1) J. Baillet, *Le papyrus mathématique d'Akhmim.* Mémoires publiés par les membres de la Mission archéologique française au Caire 9:1, S. 28ff.

$\frac{3}{2}$, 3, 4, ⋯, 10 sind dort überliefert; doch schliefsen diese Übersichten nicht mit der Stufe $n:n$ ab, sondern erstrecken sich bis zu den Divisionen $10000:n$.[1])

Jede im 'Fund-Pap.' noch vorhandene Lösung einer Teilungsaufgabe läfst sich also mit der entsprechenden Stelle im Pap. v. Akhmim vergleichen; aufserdem aber steht auch die Kontrolle durch verschiedene im mathematischen Handbuche des AHMES[2]) und in einem Papyrus von Kahun[3]) überlieferte Lösungen zu Gebote. BAILLETS Ausgabe des Papyrus von Akhmim ist in demselben Jahre wie die *Mélanges* von REVILLOUT und wie meine *Elemente der ägyptischen Teilungsrechnung*[4]) erschienen; daher konnte REVILLOUT weder diese Abhandlung noch den Papyrus von Akhmim benutzen. Allein auch das mathematische Handbuch, das im Folgenden kurz nach seinem Verfasser, dem Schreiber AHMES (*Elem.* S. 11), zitiert werden soll, hat er unberücksichtigt gelassen. Hätte er diese älteste und ergiebigste Qnelle ägyptischer Rechenkunst herbeigezogen, so würde er bei der Wiederherstellung des 'Fund-Pap.' mehrere Fehler vermieden haben, deren Berichtigung uns jetzt zunächst obliegt.

Die Tabellen des Papyrus geben, abgesehen von den der Vollständigkeit wegen mit aufgeführten Formeln $1:n = \frac{1}{n}$ und $n:n = 1$, die Lösungen der Vielheitsteilungen (*Elem.* 25f.) $2:n$, $3:n$ u. s. f. Jede Lösung ist entweder ein durch Kürzung gefundener Einheitsteil, d. i. ein Stammbruch, z. B. $2:8 = \frac{1}{4}$ (vgl. *Elem.* 25, 111), oder eine geordnete Reihe von Einheitsteilen (*Elem.* 111f.). Dafs dabei Wiederholungen desselben Stammbruches in einer geordneten Reihe, wie sie REVILLOUT S. LXXIf. bei den Teilungen

1) Ebenda S. 24ff.

2) *Ein mathematisches Handbuch der alten Ägypter (Papyrus Rhind) übersetzt und erklärt von* A. EISENLOHR. I. Band: Commentar; II. Band: Tafeln (Leipzig 1877). Eine zweite Ausgabe des I. Bandes ist, ebenfalls unter der Jahreszahl 1877, im Jahre 1891 erschienen. In dieser findet sich hinter S. 8 dieselbe Tafel mit Zahlzeichen wie in der 1. Ausgabe; dann folgen zwei unnummerierte Textblätter, die in der 1. Ausg. als Seite 9—12 gezählt waren. Dahinter fehlen Seite 13—26 der 1. Ausg. Mit S. 9 der 2. Ausg. = S. 27 der 1. Ausg. beginnt der Kommentar in unverändertem Abdruck; nur ganz am Ende sind in der 2. Ausg. als Abschlufs der langen Reihe von „Zusätzen und Berichtigungen" drei Zeilen und eine Anmerkung über die Umrechnung der Seitenzahlen der 1. Ausg. zu solchen der 2. Ausg. hinzugefügt. Im Folgenden sind allenthalben die Seiten der 1. Ausg. zitiert.

3) F. LL. GRIFFITH, *The Petrie Papyri.* I. *Kahun Papyri*, plate VIII p. 15. Erhalten sind die Teilungsaufgaben 2 : 3, 2 : 5 u. s. f. bis 2 : 21 und deren Lösungen, die durchweg mit den Lösungen des AHMES übereinstimmen.

4) Abhandl. der philol.-hist. Kl. der Sächs. Gesellsch. der Wissenschaften, Bd. 17 Nr. 1 (Leipzig 1895). Diese Arbeit werden wir im Folgenden nur als *Elem.* bezeichnen.

3:7 und 6:13 bietet, nicht vorkommen dürfen, geht unmittelbar aus der Teilung der 2 durch ungerade Zahlen bei AHMES S. 36ff. hervor. Denn bei der Vielheitsteilung 3:7 giebt der 'Fund-Pap.' richtig $\frac{1}{3}$ als erstes Glied der Auflösung an. Da $\frac{3}{7} = \frac{7+2}{21}$ ist, so bleibt noch der Rest $\frac{2}{21}$ oder nach ägyptischer Methode die Vielheitsteilung 2:21 zu verrechnen. Die minimale Lösung (*Elem.* 170) ist $\frac{1}{14}\ \frac{1}{42}$; sie findet sich bei AHMES nicht blofs in der Tabelle S. 38, sondern ist auch aus einer Zwischenrechnnng zu Problem 61 zu entnehmen.[1]) Im 'Fund.-Pap.' haben also Schriftzüge gestanden, deren wörtliche Übersetzung lauten würde „ein Siebentel [von] 3 giebt $\frac{1}{3}\ \frac{1}{14}\ \frac{1}{42}$." Diese Lösung giebt in griechischen Zahlzeichen der Papyrus von Akhmim S. 26; im 'Fund-Pap.' ist der vorletzte Stammbruch verstümmelt, der letzte ganz verloren gegangen. Das letzte noch vorhandene Zeichen ist als $\frac{1}{10}$ zu deuten; dahinter fehlt zunächst das Zeichen für $\frac{1}{4}$ (denn der Bruch $\frac{1}{14}$ wird demotisch geschrieben $\frac{1}{10}\ \frac{1}{4}$, wie in griechischen Handschriften ι' γ' statt ιγ' und Ähnliches nicht selten vorkommt) und zuletzt sind die Zeichen für $\frac{1}{42}$ wiederherzustellen.

Anch bei der Aufgabe „$\frac{1}{13}$ [von] 6" ist im 'Fund-Pap.' nur der Anfang der Lösung „giebt $\frac{1}{3}\ \frac{1}{10}$" erhalten. REVILLOUT setzt S. LXXII als vollständige Lösung $\frac{1}{3}\ \frac{1}{13}\ \frac{1}{39}\ \frac{1}{39}$, statt dessen ist aber, indem man statt $\frac{2}{39}$ die von Ahmes S. 39 gegebene Lösung $\frac{1}{26}\ \frac{1}{78}$ einschaltet, zu lesen $\frac{1}{3}\ \frac{1}{13}\ \frac{1}{26}\ \frac{1}{78}$, wie im Pap. v. Ahkmim S. 29 richtig überliefert ist.

Als Lösung der Aufgabe „$\frac{1}{11}$ [von] 4" sind im 'Fund-Pap.' nur die beiden ersten Glieder $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{11}$ erhalten. REVILLOUT S. LXXII fügt $\frac{1}{33}$ hinzu; allein $\frac{1}{4}\ \frac{1}{11}\ \frac{1}{33}$ sind $= \frac{49}{132} = \frac{4}{11} + \frac{1}{132}$. Die richtige Lösung erhält man, wenn man die Lücke im Papyrus durch die dem Werte $\frac{1}{44}$ entsprechenden Zeichen ausfüllt, denn es sind $\frac{1}{4}\ \frac{1}{11}\ \frac{1}{44} = \frac{4}{11}$, wie gefordert war.

Auch die Lösung der Aufgabe „$\frac{1}{13}$ [von] 4" ist im 'Fund-Pap.' verstümmelt. Erhalten ist das Zeichen für $\frac{1}{4}$ und dahinter[2]) noch ein von REVILLOUT als $\frac{1}{50}$ aufgefafstes Zeichen. Sollte dieses Zeichen wirklich im Papyrus stehen, so müfste man vor demselben eine Lücke annehmen; doch ist noch zu untersuchen, ob der als $\frac{1}{50}$ gedeutete Schriftzug vielleicht als $\frac{1}{20}$ gelesen werden kann.[3]) Jedenfalls ist als richtige Lösung $\frac{1}{4}\ \frac{1}{26}\ \frac{1}{52}$ herzustellen, wie auch im Pap. v. Akhmim überliefert ist. REVILLOUT hat mit $\frac{1}{4}\ \frac{1}{52}$ die Lösung von $\frac{7}{26}$, nicht von $\frac{4}{13}$ gegeben.

Leichter läfst sich die Lösung der Aufgabe „$\frac{1}{13}$ [von] 5" in Ordnung

---

1) EISENLOHR S. 149. Die Aufgabe „$\frac{1}{7}$, $\frac{2}{3}$ [davon]", d. i. die Multiplikation $\frac{1}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{21}$ wird gelöst durch „$\frac{1}{14}\ \frac{1}{42}$". Vgl. *Elem.* 35f.

2) Der Papyrus ist rückläufig geschrieben; die demotischen Zeichen folgen also in der Richtung von rechts nach links auf einander.

3) Nach REVILLOUT ist (in rückläufiger Schrift) das Zeichen für $\frac{1}{50}$ 2́, für $\frac{1}{20}$ ʃ.

bringen. Überliefert sind als Anfangsglieder der Stammbruchreihe $\frac{1}{4}\ \frac{1}{13}$. Da diese zusammen $= \frac{17}{52}$ sind, so haben wir noch das Äquivalent für $\frac{5}{13} - \frac{17}{52} = \frac{3}{52}$ hinzuzufügen und erhalten, da $\frac{3}{52} = \frac{1}{26}\ \frac{1}{52}$ sind, als vollständige Reihe $\frac{1}{4}\ \frac{1}{13}\ \frac{1}{26}\ \frac{1}{52}$, nicht $\frac{1}{4}\ \frac{1}{13}\ \frac{1}{52}$, wie bei REVILLOUT steht.

Die richtige Lösung der Vielheitsteilung 6:14 mufs identisch sein mit der von 3:7. REVILLOUT hat, wie gezeigt wurde, 3:7 irrtümlich zu $\frac{1}{3}\ \frac{1}{21}\ \frac{1}{21}$ aufgelöst; hier bei „$\frac{1}{14}$ [von] 6“ ist ihm ein anderer Fehler entschlüpft. Im Papyrus sind als Anfang der Reihe $\frac{1}{2}\ \frac{1}{14}$ erhalten; dahinter war noch $\frac{1}{42}$ hinzuzufügen, nicht $\frac{1}{28}$, wie REVILLOUT gerechnet hat.

Bei den Lösungen von 6:7, 7:8, 8:9 ist im Papyrus ein besonderes Zeichen für den Wert $\frac{3}{4}$ überliefert, das freilich eine andere Form zeigt wie das entsprechende Zeichen im Papyrus Rhind (EISENLOHR S. 76), aber ebenso wie dieses in die Stammbruchreihe $\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}$ (*Elem.* 39f.) zu zerlegen ist.

Bei der Aufgabe „$\frac{1}{9}$ [von] 8“ ist nur die ebenbesprochene Lösung $\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}$ erhalten. Dahinter fügt REVILLOUT die Brüche $\frac{1}{8}\ \frac{1}{72}$ hinzu. Das ist eine richtige Lösung; doch lag, wenn einmal als Anfang der Reihe $\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}$ gegeben sind, die Ergänzung $\frac{1}{9}\ \frac{1}{36}$ näher, denn so gewinnen wir einen kleineren Schlufsnenner (*Elem.* 148, 151f.).

Wir stellen nun die verbesserten Lösungen von Teilungsaufgaben im 'Fund-Pap.' zusammen. Die Teilung durch 7 geben wir vollständig, die Teilungen durch 8 bis 15 nur soweit, als sie im Papyrus vollständig oder teilweise erhalten sind und Reihen von Stammbrüchen enthalten, also mit Ausschlufs von $1:8 = \frac{1}{8}$, $2:8 = \frac{1}{4}$ u. s. f.

$1:7 = \frac{1}{7}$	$6:11 = \frac{1}{2}\ \frac{1}{22}$
$2:7 = \frac{1}{4}\ \frac{1}{28}$	$7:11 = \frac{1}{2}\ \frac{1}{11}\ \frac{1}{22}$
$3:7 = \frac{1}{3}\ \frac{1}{14}\ \frac{1}{42}$	
$4:7 = \frac{1}{2}\ \frac{1}{14}$	$5:12 = \frac{1}{3}\ \frac{1}{12}$
$5:7 = \frac{2}{3}\ \frac{1}{21}$ [1]	$7:12 = \frac{1}{2}\ \frac{1}{12}$
$6:7 = \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{14}\ \frac{1}{28}$	$2:13 = \frac{1}{7}\ \frac{1}{91}$
$7:7 = 1$	$3:13 = \frac{1}{7}\ \frac{1}{13}\ \frac{1}{91}$
	$4:13 = \frac{1}{4}\ \frac{1}{26}\ \frac{1}{52}$
$3:8 = \frac{1}{4}\ \frac{1}{8}$	$5:13 = \frac{1}{4}\ \frac{1}{13}\ \frac{1}{26}\ \frac{1}{52}$
$5:8 = \frac{1}{2}\ \frac{1}{8}$	$6:13 = \frac{1}{3}\ \frac{1}{13}\ \frac{1}{26}\ \frac{1}{78}$
$6:8\,[= 3:4] = \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}$	$7:13 = \frac{1}{2}\ \frac{1}{26}$

1) Dafs der Bruch $\frac{2}{3}$ in den ägyptischen Teilungsrechnungen als Einheitsteil gilt, habe ich in den *Elem.* S. 30ff. aus dem Rechenbuche des AHMES nachgewiesen. Vgl. EISENLOHR I, S. 46, 64; CANTOR, *Vorles. über Gesch. der Mathem.* I[2], S. 24.

$7:8 = \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{8}$

$7:9 = \frac{2}{3}\ \frac{1}{9}$

$8:9 = \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{9}\ \frac{1}{36}$

$2:11 = \frac{1}{6}\ \frac{1}{66}$

$3:11 = \frac{1}{4}\ \frac{1}{44}$

$4:11 = \frac{1}{4}\ \frac{1}{11}\ \frac{1}{44}$

$5:11 = \frac{1}{3}\ \frac{1}{11}\ \frac{1}{33}$

$3:14 = \frac{1}{7}\ \frac{1}{14}$

$4:14\,[=2:7] = \frac{1}{4}\ \frac{1}{28}$

$5:14 = \frac{1}{4}\ \frac{1}{14}\ \frac{1}{28}$

$6:14\,[=3:7] = \frac{1}{3}\ \frac{1}{14}\ \frac{1}{42}$

$2:15 = \frac{1}{8}\ \frac{1}{120}$

$4:15 = \frac{1}{5}\ \frac{1}{15}$

$6:15\,[=2:5] = \frac{1}{3}\ \frac{1}{15}$

Zum Schlusse sind die vorstehenden Lösungen noch mit denen bei Ahmes und im Papyrus von Akhmim zu vergleichen.

$2:7 = \frac{1}{4}\ \frac{1}{28}$] Dieselbe Zerlegung findet sich in den Tabellen des Ahmes (Eisenlohr, S. 36) und des Pap. v. Akhmim (Baillet, S. 26); auch ist sie bei der Lösung der Aufgaben Nr. 31 und 33 des Ahmes (S. 69, 6f. 72, 7f.) und Nr. 23, 28, 29 des Pap. v. Akhm. (S. 76. 79) angewendet worden. Nach *Elem.* S. 151 ist es die minimale Lösung, auf welche der ägyptische Rechner auch kommen mufste, wenn er aus der Vielheitsteilung zuerst das Maximum $\frac{1}{4}$ herausnahm (*Elem.* 168f.).

$3:7 = \frac{1}{3}\ \frac{1}{14}\ \frac{1}{42}$] Ebenso der Pap. v. Akhm. S. 26.

$4:7 = \frac{1}{2}\ \frac{1}{14}$] Diese Zerlegung, die sich ebenso im Pap. von Akhm. S. 26 findet, ergiebt sich auch aus der Aufgabe des Ahmes Nr. 63 (S. 158), wo $1:1\frac{1}{2}\ \frac{1}{4} = 4:7 = \frac{1}{2}\ \frac{1}{14}$ gerechnet wird (*Elem.* 53f.).

$5:7 = \frac{2}{3}\ \frac{1}{21}$] Diese Zerlegung ist nach der *Elem.* S. 32 entwickelten Regel gebildet worden und findet sich ebenso in der Tabelle des Pap. v. Akhm. S. 26 und in den Aufgaben Nr. 34 und 36 (S. 82). Auf die Zerlegung $\frac{1}{2}\ \frac{1}{7}\ \frac{1}{14}$ ist Ahmes bei einer Zwischenrechnung zu Nr. 33 (S. 73 a. E.) gekommen. Wenn wir bei der ersteren Lösung statt $\frac{2}{3}$ die ursprüngliche Reihe $\frac{1}{2}\ \frac{1}{6}$ einsetzen (*Elem.* 36), so ergiebt sich die Reihe des Ahmes $\frac{1}{2}\ \frac{1}{7}\ \frac{1}{14}$ als die minimale Zerlegung (*Elem.* 148, 151).

$6:7 = \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{14}\ \frac{1}{28}$] So hat auch Ahmes Nr. 33 (S. 73, 11) gerechnet. Der Redaktor der Tabelle des Pap. v. Akhm. hat zuerst das Maximum $\frac{1}{2}$, dann aus dem Reste das Maximum $\frac{1}{3}$ herausgenommen (*Elem.* 156, 167ff.) und ist so auf die Zerlegung $\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{42}$ gekommen, die er auch in der Aufgabe Nr. 31 (S. 80) angewendet hat. Die minimale Zerlegung würde $\frac{1}{2}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{7}\ \frac{1}{21}$ sein. So hat Ahmes Nr. 69 (S. 175, 16) gerechnet, nur dafs er nach ägyptischem Brauche $\frac{2}{3}$ statt $\frac{1}{2}\ \frac{1}{6}$ setzte (vgl. *Elem.* 88).

Teilung durch 8] Bei den Vielheitsteilungen, deren Divisor eine teilbare Zahl ist, haben die ägyptischen Rechenmeister zunächst eine unmittelbare Zerlegung gesucht (*Elem.* 150, 1). Da nun Divisoren von der Form 2^n (wobei n eine ganze Zahl ≥ 2 bedeutet) in allen Fällen eine

unmittelbare Zerlegung zulassen, die zugleich als die minimale sich herausstellt, so kommt in den ägyptischen Quellen bei diesen Vielheitsteilungen jedesmal nur eine Zerlegung vor. Demnach sind 3:8, 5:8, 6:8, 7:8, wie oben nach dem 'Fund-Pap.', so auch bei Ahmes S. 37 (in einer Zwischenrechnung zur Teilungsaufgabe 2:13, vgl. *Elem.* 169), S. 115, 160 u. ö. (vgl. *Elem.* 39f.) und in der Tabelle des Pap. v. Akhm. zerlegt worden.

$7:9 = \frac{2}{3}\,\frac{1}{9}$] Dieselbe Zerlegung findet sich bei Ahmes in einer Zwischenrechnung zur Aufgabe Nr. 43 (S. 105) und in der Tabelle des Pap. v. Akhm. S. 27. Auch in der Aufgabe Nr. 28 (Baillet, S. 79) ist so gerechnet worden.

$8:9 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{9}\,\frac{1}{36}$] Diese Lösung ist umständlicher als es nötig war. Auch im Pap. v. Akhm. ist zuerst $\frac{1}{2}$ herausgenommen und der verbleibende Rest zu $\frac{1}{3}\,\frac{1}{18}$ zerlegt worden, womit die minimale Lösung $\frac{9+6+1}{18}$ gefunden war. Bei Ahmes Nr. 42 (S. 103f.) ist zunächst $\frac{2}{3}$ herausgenommen, dann der Rest $2:9$ nach der Tabelle S. 36 zu $\frac{1}{6}\,\frac{1}{18}$ zerlegt worden (vgl. *Elem.* 62). Da dem ägyptischen Einheitsteile $\frac{2}{3}$ ursprünglich die Reihe $\frac{1}{2}\,\frac{1}{6}$ entspricht, (*Elem.* 36f.), so erhalten wir mit $\frac{9+3+3+1}{18} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{18}$ dieselbe Zerlegung wie im Pap. v. Akhmim.

$2:11 = \frac{1}{6}\,\frac{1}{66}$] Ebenso Ahmes S. 36, Pap. v. Akhmim in der Tabelle S. 28 und in der Aufgabe Nr. 31 (S. 80f.). Dies ist die minimale Zerlegung; herausgenommen wurde zuerst das Maximum $\frac{1}{6}$, wonach sich $\frac{2}{11} = \frac{11+1}{66} = \frac{1}{6}\,\frac{1}{66}$ ergab (*Elem.* 168f.).

$3:11 = \frac{1}{4}\,\frac{1}{44}$] Ebenso der Pap. v. Akhmim in der Tabelle S. 28, sowie in den Aufgaben Nr. 9, 15, 30 (S. 67, 71, 80). Vgl. *Elem.* S. 134. Minimale Zerlegung, ähnlich, wie vorher, durch Herausnahme des Maximum gebildet.

$4:11 = \frac{1}{4}\,\frac{1}{11}\,\frac{1}{44}$] Diese Zerlegung ist entstanden, indem zu $\frac{3}{11} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{44}$ noch $\frac{1}{11}$ hinzugefügt wurde. Die minimale Zerlegung $\frac{1}{3}\,\frac{1}{33}$ bietet die Tabelle des Pap. v. Akhmim S. 28.

$5:11 = \frac{1}{3}\,\frac{1}{11}\,\frac{1}{33}$] Ebenso die Tabelle des Pap. v. Akhmim. Es ist die minimale Zerlegung, die auch in der Aufgabe Nr. 14 (S. 70) zur Anwendung gekommen ist. In der Aufgabe Nr. 8 erscheint ein Subtrahendus $\frac{1}{3}\,\frac{1}{9}\,\frac{1}{99} = 45:99$; auch dies ist also eine Lösung der Vielheitsteilung $5:11$. Vgl. *Elem.* S. 134.

$6:11 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{22}$] Diese minimale Zerlegung hat auch der Pap. v. Akhm. in der Tabelle S. 29, sowie in den Aufgaben Nr. 14 und 49 (S. 70, 87f., vgl. *Elem.* S. 134).

$7:11 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{11}\,\frac{1}{22}$] Minimale Zerlegung, wie im Pap. v. Akhm. a. a. O.

$5:12 = \frac{1}{3}\,\frac{1}{12}$] Ebenso hat Ahmes bei der Lösung der Teilungsaufgabe $2:17$ (S. 37) gerechnet, indem er $17:12 = 1\frac{1}{3}\,\frac{1}{12}$ setzt (*Elem.* 179. 183 mit

Anm. 3). Auch in der Tabelle des Pap. v. Akhm. kehrt die Reihe $\frac{1}{3}\,\frac{1}{12}$ wieder. Sie ist gebildet worden nach der Methode der Herausnahme des Maximum ($\frac{5}{12} = \frac{4+1}{12}$, *Elem.* 167f.). Allein die minimale Zerlegung ist nach der Regel des günstigsten Falles (*Elem.* 151f.) $\frac{3+2}{12} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{6}$. Diese findet sich bei AHMES neben der Reihe $\frac{1}{3}\,\frac{1}{12}$ bei den Lösungen der Teilungsaufgaben 2:17 und 2:19 (*Elem.* 169f. 183).

7:12 $= \frac{1}{2}\,\frac{1}{12}$] Ähnlich, wie vorher, ist diese Zerlegung gebildet, indem zuerst das Maximum herausgenommen wurde. So hat auch AHMES (S. 37) in der ersten und zweiten Probe zur Zerlegung von 2:19 gerechnet (*Elem.* 184), und der Pap. v. Akhm. ist ihm darin gefolgt. Die minimale Zerlegung zu $\frac{4+3}{12} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{4}$ hat AHMES bei den Zwischenrechnungen zu den Teilungsaufgaben 2:17, 2:73, 2:79 (S. 37, 43) angewendet. Vgl. *Elem.* S. 169, 181 Anm. 1.

2:13 $= \frac{1}{7}\,\frac{1}{91}$] Dies ist die minimale, durch Herausnahme des Maximum gebildete Zerlegung (*Elem.* 151, 167, 169), die auch in der Tabelle des Pap. v. Akhmim (S. 29) wiederkehrt. Allein nach der älteren Rechnungsmethode wurden je im ersten Gliede einer Zerlegungsreihe Primzahlen, aufser 2 und 3, nicht zugelassen (*Elem.* 153f., 169). So ist AHMES (S. 37) zu der Lösung $\frac{1}{8}\,\frac{1}{52}\,\frac{1}{104}$ gekommen.

3:13 $= \frac{1}{7}\,\frac{1}{13}\,\frac{1}{91}$] Diese Zerlegung ist aus der vorhergehenden durch Einfügung von $\frac{1}{13}$ abgeleitet. Allein die minimale Lösung ist im Pap. v. Akhmim (S. 29) durch Erweiterung von 3:13 mit 6 gefunden worden; denn es ist $\frac{18}{78} = \frac{13+3+2}{78} = \frac{1}{6}\,\frac{1}{26}\,\frac{1}{39}$.

4:13 $= \frac{1}{4}\,\frac{1}{26}\,\frac{1}{52}$] So auch der Pap. v. Akhmim (S. 29).

5:13 $= \frac{1}{4}\,\frac{1}{13}\,\frac{1}{26}\,\frac{1}{52}$] Wie vorher bei 3:13 ist auch diese Zerlegung aus der vorhergehenden durch Einfügung von $\frac{1}{13}$ abgeleitet worden. Dagegen hat AHMES in einer Zwischenrechnung zur Aufgabe Nr. 65 (S. 163) die dreigliedrige Reihe $\frac{1}{3}\,\frac{1}{26}\,\frac{1}{78}$ bevorzugt, die auch in die Tabelle des Pap. v. Akhmim übergegangen ist. Vgl. *Elem.* S. 148 Defin. 6; S. 154 Regel 5.

6:13 $= \frac{1}{3}\,\frac{1}{13}\,\frac{1}{26}\,\frac{1}{78}$] So der Pap. von Akhmim (S. 29). Im 'Fund-Pap.' sind, wie oben bemerkt wurde, nur die Zeichen für $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{10}$ erhalten. Das letztere war zu $\frac{1}{13}$ zu vervollständigen. Der Rest der Lösung kann nur $\frac{1}{26}\,\frac{1}{78}$ gelautet haben. Vgl. bei AHMES (S. 39) 2:39 $= \frac{1}{26}\,\frac{1}{78}$.

7:13 $= \frac{1}{2}\,\frac{1}{26}$] So der Pap. v. Akhmim; im 'Fund-Pap.' ist $\frac{1}{2}$ erhalten, $\frac{1}{26}$ von REVILLOUT ergänzt.

3:14 $= \frac{1}{7}\,\frac{1}{14}$] Diese minimale Zerlegung ist im 'Fund-Pap.' richtig überliefert. Der Redaktor des Pap. v. Akhmim hat zuerst das Maximum $\frac{1}{5}$ herausgenommen und ist so auf die Lösung $\frac{1}{5}\,\frac{1}{70}$ gekommen.

4:14 $= \frac{1}{4}\,\frac{1}{28}$] So auch der Pap. v. Akhmim. Vgl. vorher 2:7.

5:14 $= \frac{1}{4}\,\frac{1}{14}\,\frac{1}{28}$] Im 'Fund-Pap.' sind nur die Zeichen für $\frac{1}{4}\,\frac{1}{14}$ erhalten; die Zeichen für $\frac{1}{28}$ hat REVILLOUT ergänzt. Im Pap. v. Akhmim ist die

Heraushebung des Maximum $\frac{1}{3}$ und damit die zweigliedrige Reihe $\frac{1}{3}\ \frac{1}{42}$ bevorzugt worden.

$6:14 = \frac{1}{3}\ \frac{1}{14}\ \frac{1}{42}$] So der Pap. v. Akhmim übereinstimmend mit der Lösung der vorhergehenden Teilungsaufgabe 3:7. Im 'Fund-Pap.' sind nur die Zeichen für $\frac{1}{3}\ \frac{1}{14}$ überliefert. Das noch fehlende Glied kann, wie oben gezeigt wurde, kein anderes als $\frac{1}{42}$ sein.

$2:15 = \frac{1}{8}\ \frac{1}{120}$] Im 'Fund-Pap.' ist nur das Zeichen für $\frac{1}{8}$ erhalten; die Zeichen für $\frac{1}{120}$ hat REVILLOUT ergänzt. Diese Lösung ist gefunden worden, indem man zuerst das Maximum $\frac{1}{8}$ heraushob (vgl. *Elem.* 169). Die minimale Zerlegung $\frac{1}{10}\ \frac{1}{30}$ ist von AHMES S. 37 und im Pap. v. Akhm. S. 29, 69 bevorzugt worden. Vgl. *Elem.* 38, 138 a. E., 169.

$4:15 = \frac{1}{5}\ \frac{1}{15}$] So hat schon AHMES in der Aufgabe Nr. 21 (EISENLOHR, S. 58) gerechnet, indem er $\frac{4}{15}$ unmittelbar zu $\frac{3+1}{15}$ zerlegte (*Elem.* 70, 169). In der Tabelle des Pap. v. Akhmim ist zuerst das Maximum $\frac{1}{4}$ herausgehoben und so die Zerlegung $\frac{1}{4}\ \frac{1}{60}$ gefunden worden (*Elem.* 169). Die minimale Zerlegung zu $\frac{5+3}{30} = \frac{1}{6}\ \frac{1}{10}$ (*Elem.* 152) ist bisher noch nicht in ägyptischen Quellen aufgefunden worden.

$6:15 = \frac{1}{3}\ \frac{1}{15}$] Diese unmittelbare Zerlegung (*Elem.* 140) findet sich auch im Pap. v. Akhmim S. 29, sowie als Lösung der Teilungsaufgabe 2:5 bei AHMES S. 36 und im Pap. v. Akhmim S. 25.

Die Sternkataloge des Hipparch und des Ptolemaios.

Von FRANZ BOLL in München.

I.

ERNST MAASS hat 1892 in seinen *Aratea* (p. 311 ff.) aus Laurentianus LXXXVII 10 s. XIV zwei Sternbilderverzeichnisse herausgegeben, die in dieser griechischen Hs. anonym erschienen. Er entdeckte gleichzeitig, dafs diese beiden Verzeichnisse in barbarisch-lateinischer Übersetzung in einer sehr alten Basler Hs. (Basil. AN IV 18 s. VIII—IX) sich finden; und dort sind glücklicherweise auch die Namen der Urheber erhalten: der eine Katalog wird dem ERATOSTHENES, der andere, der im Basileensis noch ein zweites Mal in etwas anderer Übersetzung sich findet, dem HIPPARCH zugeschrieben. Diese Kataloge (von MAASS zum zweitenmal in seinen *Commentariorum in ARATUM reliquiae* p. 134 ff. herausgegeben) sind freilich nur dürre Excerpte; sie enthalten nichts weiter als die Namen der bekannten Sternbilder in verschiedener Reihenfolge, die denn vielleicht auf ERATOSTHENES und HIPPARCH zurückführen mochte. Von entscheidender Wichtigkeit war erst der Fund ALESSANDRO OLIVIERIS, der den Hipparchischen Katalog 1898 in der Rivista di storia antica **3** S. 22 ff. aus Cod. gr. 29 (s. XIV) der Bibliotheca Angelica herausgegeben hat. Diese Handschrift enthält neben den Namen der Sternbilder auch die Sternsummen, die ihnen HIPPARCH giebt. OLIVIERIS mangelhafte Publikation wurde überholt durch die Neubearbeitung ALBERT REHMS (Hermes **34**, S. 251 ff.). REHM hat nicht nur die Hs. ungleich besser ausgebeutet, sondern darüber hinaus den echthipparchischen Ursprung gegen THIELE (*Antike Himmelsbilder*, S. 46) verfochten, die Bedeutung der Sternzahlen ernstlicher gewürdigt und den Nachweis geliefert, dafs die Sternkataloge der Eratosthenischen Katasterismen offenbar einmal nach dem Hipparchischen Katalog abgeändert worden sind. Manche Schwierigkeiten blieben auch so noch bestehen. Umso willkommener war mir der Fund einer weiteren Handschrift, die gleich dem Angelicanus auch die Sternsummen für die einzelnen Bilder angiebt, aber von jener Hs. völlig unabhängig und viel besser ist als sie. Diese Hs. war Parisinus 2420, eine umfangreiche Astrologenhandschrift aus dem Jahre 1550, geschrieben von CHRIST.

Auer, deren Zuverlässigkeit ich schon früher zu erproben Gelegenheit hatte (vgl. *Catal. cod. astr. graec.* II, 138). In ihr fand ich f. 194 unter dem verdorbenen Titel *ἐκ τῶν ὑπάρχων ἀστέρων* den Hipparchischen Sternkatalog. Bei genauer Durchsicht dieser trefflichen, aber jungen Hs. glaubte ich jedoch zu bemerken, daſs ihre Vorlage wenigstens für die hier in Betracht kommende Kapitelgruppe uns noch erhalten ist; und diese Annahme bestätigte sich. Parisinus 2506, eine Astrologenhandschrift des XIV. Jahrhunderts, enthält eine lange Reihe von Kapiteln in gleicher Anordnnng wie 2420, und die Lücken dieser Hs. sind auch in 2506 schon vorhanden. Der Schluſs, daſs Paris. 2506 die Vorlage von 2420 sei, bestätigte sich auch für den Hipparchischen Sternkatalog, der in 2506 f. 126ᵛ ebenfalls unter der Überschrift *ἐκ τῶν ὑπάρχων ἀστέρων* steht und von dem ich durch Franz Cumonts Freundlichkeit eine Kopie erhielt. Der Schreiber von 2420 hat sorgfältig kopiert und aus eigener Kraft nur statt des in seiner Vorlage viermal vorkommenden sinnlosen *ἄρρητος* das richtige *ἄρκτος* hergestellt. Somit scheidet Paris. 2420 aus der Zahl der selbständigen Hss. aus.

Ich gebe im Folgenden wiederum eine recensio des Textes mit knappstem Apparat. Die Sternzahlen sind, wie ich nochmals bemerke, nur in A (Angelicanus 29) und P (Parisinus 2506) enthalten, dagegen nicht in L (Laurentianus LXXXVII 10) und in der alten lateinischen Übersetzung (Lat.).

Κεῖται ἐν μὲν τῷ βορείῳ ἡμισφαιρίῳ τάδε· Ἄρκτος μεγάλη, ἀστέρες κδ', Ἄρκτος μικρά, ἀστέρες ζ', Ὄφις διὰ μέσου τῶν Ἄρκτων, ἀστέρες ιε', Βοώτης, ἀστέρες ιθ', Στέφανος, ἀστέρες θ', ὁ Ἐγγόνασιν, ἀστέρες κδ', Ὀφιοῦχος (ἐν ἀμφοτέροις τοῖς ἡμισφαιρίοις), ἀστέρες ιζ', Λύρα, ἀστέρες ι', Ὄρνις, ἀστέρες ιδ', Ἀετός, ἀστέρες δ', Οἰστός, ἀστέρες δ', Δελφίς, ἀστέρες θ', Ἵππος (ἐν ἀμφοτέροις τοῖς ἡμισφαιρίοις), ἀστέρες ιη', Κηφεύς, ἀστέρες ιθ', Κασσιέπεια, ἀστέρες ιδ', Ἀνδρομέδα, ἀστέρες κ', Τρίγωνον, ἀστέρες γ', Περσεύς, ἀστέρες ιθ', Ἡνίοχος, ἀστέρες η'.

Inscribitur: *Ἐκ τῶν Ἱππάρχου περὶ τῶν ἀστέρων ποσοῦ* A *Ἐκ τῶν ὑπάρχων ἀστέρων* P Hipparchus de magnitudine et positione errantium stellarum Basil. fol. 6ᵃ Hipparchus de magnitudine et positione de inerrantium stellarum Basil. fol. 3ᵃ *Περὶ μεγέθους καὶ συντάξεως τῶν ἀπλανῶν ἀστέρων* Maass *Ἐκ τῶν Ἱππάρχου περὶ τῶν ἀστέρων πόσοι καὶ ποῦ* Rehm

1 *Κεῖται — τάδε* om. AP *ἄρρητος* P (sic passim pro *ἄρκτος*) *μείζων* L Lat. 2 *ἐλάσσων* L Lat. *δι' ἀμφοτέρων τῶν* L Lat. *μέσον ὄντα ἄρκτων* P 3 *ἐν γόνασιν* L *ἐγεγόνασιν* P 4 *Λύρα — ἡμισφαιρίοις* om. Lat. 5 *η'* A *ιη'* P: scripsi *ι'* coll. schol. Arat. v. 269 p. 394 M. *ιδ'*] *κδ'* A *Ἀετός* scripsi] *δέλτος* P *ἀετός. ἀστέρες δ'* om. A L *ὁ ἰστός* P *Ὀιστός, ἀστέρες δ'* in marg. (man. 1) A. Post *Ὀιστός* L inseruit *Ἀιετός* 6 *Δελτωτόν* A *δελφός* P 7 *ιδ'*] *κδ'* A *ιδ' ἀστέρες* P 8 *ιθ'* P] *η'* A

ἐν δὲ τῷ νοτιωτέρῳ τοῦ ζῳδιακοῦ κύκλου· *Ὕδρα (ἐν ἀμφοτέροις τοῖς ἡμισφαιρίοις), ἀστέρες κζʹ, Κρατήρ, ἀστέρες ιʹ, Κόραξ, ἀστέρες ζʹ, Ἀργώ, ἀστέρες† ιγʹ, Κένταυρος, ἀστέρες κϛʹ, Θηρίον, ὃ ἔχει ὁ Κένταυρος ἐν τῇ δεξιᾷ χειρί, ἀστέρες ιγʹ, Θυτήριον, ἀστέρες δʹ, ὁ ὑπὸ τὸν Τοξότην Στέφανος ⟨ἀστέρες —⟩, ὁ ἁδρὸς Ἰχθύς, ἀστέρες ιβʹ, Κῆτος, ἀστέρες ιδʹ, ⟨Ποταμός, ἀστέρες —⟩, Ὠρίων (ἐν ἀμφοτέροις τοῖς ἡμισφαιρίοις), ἀστέρες ιηʹ, Λαγωός, ἀστέρες ⟨—, Κύων, ἀστέρες⟩ καʹ, Προκύων, ἀστέρες γʹ (ἐν δὲ τῷ βορείῳ).*

Τοῦ ζῳδιακοῦ κύκλου βόρεια· *Καρκίνος, ἀστέρες ιϛʹ, Λέων ἀστέρες ιθʹ, Παρθένος, ἀστέρες ιθʹ.*

νότια· *Χηλαὶ ἤτοι Ζυγός, ἀστέρες δʹ, Σκορπίος, ἀστέρες ιεʹ, Τοξότης, ἀστέρες ιϛʹ, Αἰγόκερως, ἀστέρες κϛʹ, Ὑδροχόος, ἀστέρες ιηʹ, Ἰχθύες (ἐν ἀμφοτέροις τοῖς ἡμισφαιρίοις), ἀστέρες μαʹ.*

βόρεια· *Κριός, ἀστέρες ιζʹ, Ταῦρος, ἀστέρες ιηʹ, Δίδυμοι, ἀστέρες ιθʹ.*

Zwischen Schwan und Pfeil führt P, wie man sieht, mit geringer Verstümmelung den *Ἀετός* mit 4 Sternen auf, der in A ganz fehlt, während er in L entgegen dem Sprachgebrauch des Hipparch *Αἰετός* heifst und nach dem Pfeil eingesetzt ist. Wir erfahren aus P weiter auch die uns bisher fehlende Zahl der Sterne in den Zwillingen. Wo A und P in den Zahlen auseinandergehen, müssen zunächst sachliche Gründe entscheiden. Dies ist der Fall beim Schwan, Kassiopeia, Perseus, Grossen Fisch, Krebs, wo über die durchgängige Unrichtigkeit der Lesarten von A kein Streit sein kann. Beim Walfisch und Schützen hat P nur *einen* Stern mehr als A: hier wäre die Entscheidung unmöglich, wenn nicht auch die Germanicus-Scholien von Saint Germain (G) beidemal die in P enthaltene

9 *δὲ* om. AP *νοτίῳ* A L Lat. *κύκλου* om. A L *Ὑδροχόος* L Lat. 11 *Ἀργώ* om. P (sed lacuna quatuor fere verborum indicatur) et A (man. 2 supplevisse videtur) *ἀστέρες ιγʹ* om. A *τὸ θηρίον* L 12 *ιγʹ* om. P *θηρίον* P *ὑπὸ Τοξότη* A
13 In P post *Στέφανος* lacuna indicatur. *ὁ ἁδρός* Rehm: *ἁδρός* A *ἀνδρὸς* P *Ἀριάδνης* L inrigator Basil. fol. 3ª; om. fol. 6ª. *ιηʹ* A *τὸ Κῆτος* A *ιγʹ* A
14 *Ποταμός* add. Rehm *ὅριον* P 15 *καʹ* A] *κόʹ* (id est *κ* et signum pro *ἡμέρα* usitatum) P: an *κεʹ* legendum? (scriptor cod. Parisini 2420 primum legerat *κϛʹ*, deinde in *καʹ* correxisse videtur) *προκύων. ἐν δὲ τῷ βορείῳ τοῦ ζῳδιακοῦ κύκλου. βόρεια καρκίνος* L Antecanis. in aquilonio autem et in signale circulo Lat. *προκύων ἀστέρες γʹ ἐν τῷ βορείῳ τοῦ ζῳδιακοῦ βόρεια· καρκίνος* P *προκύων ἀστέρες γʹ. βόρεια καρκίνος* A. Codicis P auctoritatem maxime secutus sum.
17 *ϛʹ* A 18 In L post *Παρθένος* sequuntur *Κριός, Ταῦρος, Δίδυμοι.*
19 *νοτιώτερα* A *νοτιότεραι* P *ἤτοι Ζυγός* om. L Lat. 20 *ιϛʹ* P] *ιεʹ* A
22 *Δίδυμοι — ιθʹ* om. A In P adduntur inepta quaedam de arctis et planetis: *Ἄρρητος* (!) *μεγάλη ἀστέρες κδʹ, Ἄρρητος μικρὰ ἀστέρες καὶ ζʹ· πλανῆται εʹ· Κρόνου ἀστὴρ αʹ ἀστήρ· Ἥλιος· Διὸς ἀστὴρ αʹ ἀστήρ· Σελήνη· Ἄρεως ἀστὴρ αʹ ἀστήρ· Ἄρεως· Ἀφροδίτης ἀστὴρ αʹ ἀστὴρ Διός· Ἑρμοῦ ἀστὴρ αʹ ἀστὴρ Ἑρμοῦ ἀστὴρ Ἀφροδίτης ἀστὴρ Κρόνου.* Nomina planetarum et signorum zodiaci in P siglis scripta sunt.

höhere Zahl mitteilten. Und wie sich bald herausstellen wird, sind eben diese Germanicus-Scholien noch häufiger als die übrigen Vertreter der Katasterismenüberlieferung nach dem Hipparchischen Katalog abkorrigiert. Es ist also Grund anzunehmen, dafs P auch hier die richtige Lesart erhalten hat. Eigentümlich liegt die Sache beim Sternbild der Leier. In A steht die Sternzahl η', in P aber ιη'. Dafs diese letztere Zahl viel zu hoch ist, wird niemand bezweifeln; Ptolemaios kennt nur 10 Sterne der Leier und selbst Bayers Atlas von 1603 nicht mehr als 13. Aber die Lesart von A ist in bedenklichem Widerspruch zu dem wichtigen Schol. Arat. v. 268 p. 394 M., wonach Timocharis dem Sternbild der Leier acht, Hipparch dagegen zehn Sterne zugeteilt hat. So scheint doch P das richtige zu enthalten: aus dem ιη' dieser Hs., in deren Vorlage die ältere Zahl der neuen zugesetzt oder eine Korrektur vorgenommen worden sein mufs, ist die durch die Arat-Scholien bezeugte Zahl ι' herzustellen. Die Prüfung, welche der beiden Hss. A P vorzuziehen ist, hat somit ein eindeutiges Ergebnis: P ist bei den Differenzen gegenüber A durchweg im Recht. Einzig bei der Sternsumme des grofsen Hundes (κα') war A zu folgen, aber nur deshalb, weil in P keine wirkliche Zahl, sondern durch Mifsverständnis ein Gemisch aus dem Zahlzeichen κ' und der Abbreviatur für ἡμέρα überliefert ist.

II.

Das Verhältnis der Sternsummen der Eratosthenischen Katasterismen zum Hipparchischen Katalog wird durch dessen neue Textgestalt einheitlicher und klarer. Im ganzen enthält unser Hipparch-Excerpt 46 Sternbilder (von denen des Ptolemaios fehlen das kleine Pferd, das wohl trotz Geminos von Hipparch noch nicht genannt wurde, und ferner, jedoch unzweifelhaft nur durch die Schuld des Excerptors, die Schlange des Ophiuchos). Von diesen 46 sind uns jetzt für 43 die Sternsummen bekannt. In 31 von diesen 43 Fällen hat der Hipparchische Katalog genau die gleichen Sternsummen wie die Katasterismen. In den übrigen 12 Fällen ist, abgesehen von der offenbar falsch überlieferten Zahl für die Argo[1]), nur einmal die Zahl des Hipparchischen Katalogs kleiner als die der Katasterismen, nämlich beim Krebs: hier aber findet, wie schon Rehm bemerkt hat, von Hipparch zu Ptolemaios eine weitere *Verminderung* der Sternsumme statt. In allen übrigen elf Fällen (Bootes, Engonasin, Lyra, Kentaur, Wolf, Walfisch, Orion, Hund, Schütze, Stein-

1) Nur in P erhalten. Das ιγ', eine Zahl, aus der sich das grofse Sternbild nicht wohl herstellen läfst, ist leicht zu erklären als eine irrige Vorausnahme der Zahl ιγ' für das Θηρίον, die in P in der nächsten Zeile ungefähr am gleichen Platze stehen sollte, jedoch ausgefallen ist.

bock, Wassermann) kennt das Hipparch-Excerpt je 1—5 Sterne mehr als die Katasterismen. Dabei ist von besonderem Interesse, dafs in vier Fällen die höheren Zahlen des Hipparch-Excerptes teilweise auch in der Überlieferung der Katasterismen die ursprünglichen verdrängt haben. Zwei dieser Fälle (Walfisch und Schütze), wo die Schol. G die Sternzahl von P angeben, während die übrige Katasterismenlitteratur mit A übereinstimmt, wurden schon oben erwähnt. Ihre richtige Auffassung ergiebt sich aus den Differenzen beim Steinbock und beim Wassermann. Der Steinbock hat bei Hipparch 26 Sterne, in der Epitome der Katasterismen dagegen, sowie in den Germanicus-Scholien B P und bei Hygin nur 24: aber in den Scholia Sangermanensia ist die Zahl 26 aufgenommen. Ganz ähnlich ist das Verhältnis beim Wassermann: er hat im Katalog des Hipparch (ohne die *Χύσις ὕδατος* natürlich) 18 Sterne, in der Epitome und bei Hygin 17; aber in den Germanicus-Scholien BP und G ist die Zahl XVIII als Gesamtsumme überliefert, und zwar in den ersteren, trotzdem die wirkliche Summe der vorher aufgeführten Sterne nur 17 ausmachen würde. Offenbar ist also in den Schol. G und auch einmal in BP die Modernisierung des alten Katalogs etwas vollständiger durchgeführt als in der Epitome und bei Hygin. Zugleich aber beweisen gerade diese Fälle deutlicher noch als die anderen, dafs in der That ein allmählicher Ersatz älterer, fast durchweg kleinerer Sternsummen durch jüngere in den Katasterismen stattgefunden hat: und es gilt gleich, ob man dabei den Katalog des Timocharis[1]) oder den des Eratosthenes, wenn es von ihm einen selbständigen gegeben hat, durch einen neuen Katalog ersetzt glaubt.

Der neue Katalog, der den alten verdrängt hat, mufs offenbar ein mafsgebender gewesen sein. Unsere Überlieferung schreibt das Excerpt einstimmig dem Hipparch zu; und die Terminologie ist dieser Urheberschaft, nach Rehms Ausführungen (S. 254f.), zu denen sich jetzt auch der Name *Ἀετός* für den Adler anführen läfst, durchaus günstig; nur dafs jedenfalls der Zusatz zu den *Χηλαί*: *ἤτοι Ζυγός* und wie ich vermute, auch der *Name* des südlichen Kranzes Interpolationen sein werden.[2]) Dafs die

1) Maass, *Anal. Eratosth.* p. 30 und Thiele *Ant. Himmelsbilder* p. 156 führen die Kataloge der Katasterismen auf Timocharis zurück, im Hinblick auf eine schon oben angeführte Stelle in den Arat-Scholien (Maass, *Comment. in Arat.* p. 394), wonach die Leier bei Timocharis 8 Sterne hatte, also genau soviel wie in den Katasterismen. Vgl. auch Rehm a. a. O. S. 271, 2.

2) Der Beweis, dafs Hipparch den Namen *Στέφανος* für den südlichen Kranz noch nicht gebraucht hat, läfst sich viel sicherer führen als es bisher geschehen ist; er mag indessen einer anderen Stelle vorbehalten bleiben. — In unserem Excerpt fehlt übrigens die Sternzahl hinter *Ὁ ὑπὸ τὸν Τοξότην Στέφανος*, ohne dafs sich

Sternsummen unseres Verzeichnisses gröfstenteils in die Katasterismen eingetragen worden sind, spricht ebenfalls schon an sich für die Autorschaft des Hipparch: denn man würde kein Bedürfnis einer derartigen Revision empfunden haben, wenn nicht inzwischen ein neues Verzeichnis dem älteren mit unvergleichlicher Autorität und Überlegenheit gegenüber getreten wäre. Alles scheint sich hier gegenseitig zu stützen, um die handschriftliche Überlieferung, die uns den Katalog als ein Excerpt aus Hipparch vorlegt, zu bestätigen. Nach Geminos (c. 3 p. 36ff. Man.) müfste man allerdings auch noch das kleine Pferd als *Προτομὴ ἵππου*, das *Κηρύκιον* und den *Θυρσολόγχος* des Kentauren in Hipparchs Katalog erwarten; aber ich glaube geradezu das Paradoxon vertreten zu können, dafs in Geminos' Sternbilderverzeichnis so gut wie alles von Hipparch herstammt *aufser* jenen drei Bildern, bei denen der ausdrückliche Zusatz *καθ' Ἵππαρχον* sich findet.[1])

Einwendungen gegen die Urheberschaft des Hipparch für unseren Katalog sind, soweit sie die Anordnung betreffen, von Rehm wohl end-

---

die zwei übrigen Fälle dieser Art unmittelbar vergleichen liefsen. Es scheint also hier sicherlich ein Einschub angenommen werden zu müssen.

1) Für das *Κηρύκιον* habe ich den wohl nnumstöfslichen Nachweis, dafs es *nicht* von Hipparch stammt, bereits im Hermes 34, 643 geliefert. Der Speer des Kentauren heifst in der erhaltenen Schrift des Hipparch *Θύρσος*, und Ptolemaios sagt auch so: wie wunderlich wäre es, wenn Ptolemaios hier, während er in dem Sternverzeichnis des Hipparch *Θυρσολόγχος* gefunden hätte, ohne jeden ersichtlichen Grund auf die *ältere* Hipparchische Terminologie zurückgegangen wäre! *Θυρσολόγχος* scheint überhanpt nur Geminos zn kennen (auch die Katasterismen sagen *Θύρσος*); und überdies fand es schon Ideler (*Sternnamen* 275f.) mit Recht verwunderlich, dafs ein mit so kleinen Sternen bezeichnetes Teilbild von Hipparch sollte besonders aufgezählt worden sein. — Endlich die *Προτομὴ ἵππου*. Dies ist der Terminus des Ptolemaios; dagegen finden wir das kleine Bild weder in dem erhaltenen Werk des Hipparch, noch in unserm Sternkatalog. — Manilius' Anordnung der Sternbilder ist, wie schon Rehm (S. 257) bemerkt, der des Hipparchischen Kataloges ähnlich. Genauer zu reden ist die erste Hälfte, das Verzeichnis der nördlichen Sternbilder, hei Manilius der Anordnung in unserm Hipparch-Excerpt und der damit fast völlig übereinstimmenden des Geminos recht ähnlich (es hegegnen mehrfach Umstellungen); das der südlichen aber ist, mit Ausnahme von zwei kleinen Umstellungen (Prokyon—Kyon Geminos, Kyon—Prokyon Manilius; ferner Fisch—Ketos Geminos, Ketos—Fisch Manilius) ganz genan so wie das des Geminos geordnet. Eine Mittelquelle mag also zwischen Hipparch und Geminos-Manilius liegen(man darf an Poseidonios denken); aber die Hauptsache geht bei beiden auf Hipparch zurück, und es ist daher bezeichnend, dafs bei Manilius weder vom kleinen Pferd, noch vom *Θυρσολόγχος* des Kentauren, noch vom südlichen Kranz, noch endlich vom *Κηρύκιον* gesprochen wird. Dafs nun Geminos *selbst* diese Zusätze dem Hipparch zugeschrieben haben sollte, wäre allerdings seltsam; haben wir aber, wie Manitius meint, nnr das Werk eines späten Excerptors vor uns — vielleicht hat dieser Excerptor, wie ich hinzufüge, Joannes Philoponos geheifsen —, so ist an der Interpolation nicht mehr viel zu verwundern.

giltig beseitigt worden. Für die Sternzahlen ist aber noch ein möglicher Einwand zu prüfen. Der anscheinende Widerspruch gegen das Arat-Scholion zu v. 269 über die Sternzahl der Leier ist zwar durch P glücklich behoben. Allein es ist nicht zu leugnen, dafs Hipparch in einem früheren Werk, dem Aratkommentare, einzelnen Sternbildern mehr Sterne zuzuteilen scheint, als in dem späteren Katalog, dessen Excerpt wir vor uns zu haben glauben. Dies ist der Fall beim Perseus, wo schon Rehm im erhaltenen Werk des Hipparch 21 Sterne zusammenrechnete (gegen 19 des Katalogs), sodann beim Adler (ohne Zweifel 5, gegen 4 des Katalogs); Heniochos (9 gegen 8); Thyterion (6 gegen 4); Walfisch (14 gegen 13); Wage (6 gegen 4). Die Echtheit unseres Excerptes wird also durch die Frage bestimmt, ob es denkbar ist, dafs Hipparch in einem späteren Werk einzelnen Bildern *weniger* Sterne zugeteilt hat als in einem früheren.

Das Bedenken ist viel weniger schwer, als es auf den ersten Blick scheinen mag. Vor allem mufs man sich klar machen, dafs *vollständige* Sternverzeichnisse überhaupt nicht in der Absicht der Alten lagen. Ptolemaios hat im Ganzen 1029 Sterne verzeichnet; Bayers Verzeichnis umfafst mit Ausschlufs der Sternbilder um den Südpol etwa 1600 und vollends Heis giebt die Summe der in Mitteleuropa mit blofsen Augen sichtbaren Sterne auf nicht weniger als 5421 an. Die Sternkataloge der Alten gaben also notwendig nur eine Auswahl der wirklich sichtbaren Sterne, und dem entspricht es, dafs Ptolemaios viel mehr Sterne dritter (208) und vierter Gröfse (474) aufnimmt als fünfter (217) und sechster (nur 49), während bei Heis das Verhältnis dieser Sterne dritter, vierter, fünfter und sechster Gröfse 152: 293: 854: 2014 + 1964 ist. Nun ist es allerdings durchaus nicht wahrscheinlich, dafs man in späteren Sternverzeichnissen Fixsterne, deren Koordinaten schon früher bestimmt waren, wieder aufgegeben hätte. Aber das ist unbestreitbar, dafs *einzelnen* Sternbildern Ptolemaios *weniger* Sterne giebt als die Katasterismen und als unser Excerpt; diese Sternbilder sind der nördliche Kranz[1]), Kepheus, Kassiopeia, Hydra, Becher, Hund, Prokyon, Widder, Zwillinge, Krebs, Fische. Allein diese scheinbare Verminderung der Sternsummen gegenüber den Vorgängern ist sicherlich nichts anderes als eine Folge einer teilweisen Veränderung in der Zeichnung der Sternbilder. Ptolemaios sagt uns VII 4 a. E. ausdrücklich, dafs er in der Verteilung der Einzelsterne auf die Bilder nicht durchweg dem Hipparch gefolgt sei, und dafs die älteren Astronomen ebenfalls vielfach dem richtigen Umrifs und Eben-

1) Ptolemaios hat acht Sterne; unser Hipparch-Excerpt, die Katasterismen und Ovid haben neun. Durch Ovid (*Fast.* III 516: aurea per stellas nunc micat illa novem) ist die Zahl gegen jeden Zweifel gesichert.

mafs der Bilder zuliebe die Anordnung ihrer Vorgänger geändert haben.[1]) Ein Hauptmittel, die Zeichnung der Sternbilder natürlicher zu gestalten, mag namentlich in der Ausscheidung einzelner Sterne als *ἀμόρφωτοι* gelegen haben, die bei PTOLEMAIOS in gröfserem Umfang durchgeführt ist, aber schon bei ARAT vorkommt (vgl. v. 367ff.; 389ff.; 399ff.), sodafs sie wohl auch HIPPARCH in Anwendung gebracht haben wird. — Es ist sonach durchaus begreiflich, dafs HIPPARCH bei der Bearbeitung seines neuen Fixsternverzeichnisses einigen Sternbildern etwas engere Grenzen zog als in dem älteren Buch, wo er sein eigenes Himmelsbild noch nicht abgeschlossen hatte, sondern noch die Astrothesie des EUDOXOS und ARAT zu bessern strebte.

Nach alledem mufs man zu dem Schlufs kommen, dafs gegründete Bedenken gegen die Ableitung unseres Kataloges, namentlich in der korrekteren Gestalt des Parisinus, von HIPPARCH nicht vorliegen; und da die Terminologie, die Anordnung der Sternbilder, auch die Benutzung in der uns vorliegenden Bearbeitung der Katasterismen deutlich für HIPPARCH sprechen, so haben wir guten Grund, dem handschriftlich hezeugten Autornamen Glauben zu schenken.

III.

Auf Grund des Parisinus kann man nun versuchen, sich von der Gesamtsumme der von HIPPARCH in sein Verzeichnis aufgenommenen Fixsterne eine annähernd genaue Vorstellung zu bilden. Es sind uns im Parisinus im Ganzen die Sternsummen von 43 Bildern überliefert; von diesen mufs die Argo, deren Zahl sicher verdorben ist, ausgeschieden werden. Weiter ist zu beachten, dafs die Sterne der Schlange des Ophiuchos und der *Χύσις ὕδατος* des Wassermannes in unserm Excerpt offenbar aus Flüchtigkeit übergangen sind. Die Zahl der Sterne, die sich für die 42 Bilder aus unserm Katalog ergiebt, ist 640. In den gleichen Sternbildern (also Wassermann ohne Wasser und Ophiuchos ohne Schlange) führt PTOLEMAIOS 772 Sterne auf. Die übrigen 6 Sternbilder — Schlange des Schlangenhalters, kleines Pferd, Flufs, Hase, Argo, südliche Krone — und dazu das Wasser des Wassermannes haben bei PTOLEMAIOS zusammen 146 Sterne. Die Sterne der südlichen Krone hat HIPPARCH zweifellos ebenfalls verzeichnet (schon ARAT erwähnt sie v. 399ff.), nur nicht unter

1) II 30, ed. HALMA: *Καὶ ταῖς διαμορφώσεσι δ' αὐταῖς ταῖς καθ' ἕκαστον τῶν ἀστέρων οὐ πάντως συγκεχρήμεθα ταῖς αὐταῖς, αἷς καὶ οἱ πρὸ ἡμῶν, καθάπερ οὐδ' ἐκεῖνοι ταῖς ἔτι πρὸ αὐτῶν, ἀλλ' ἑτέραις πολλαχῇ κατὰ τὸ οἰκειότερον καὶ μᾶλλον ἀκόλουθον τῷ εὐρύθμῳ τῶν διατυπώσεων· οἷον ὅταν οὓς ὁ Ἵππαρχος ἐπὶ τῶν ὤμων τῆς Παρθένου τίθησιν, ἡμεῖς ἐπὶ τῶν πλευρῶν αὐτῆς κατονομάζωμεν, διὰ τὸ μεῖζον αὐτῶν φαίνεσθαι τὸ πρὸς τοὺς ἐν τῇ κεφαλῇ διάστημα τοῦ πρὸς τοὺς ἐν τοῖς ἀκροχείροις, τὸ δὲ τοιοῦτον ταῖς μὲν πλευραῖς ἐφαρμόζειν, τῶν δὲ ὤμων παντάπασιν ἀλλότριον εἶναι.*

diesem Namen; bei dem kleinen Pferd, das übrigens bei Ptolemaios nur 4 Sterne aufweist, wollen wir das Gleiche annehmen. Sind nun bei diesen sieben Sternbildern die Sternzahlen des Hipparchischen und Ptolemaischen Katalogs im gleichen Verhältnis gewesen wie bei den übrigen zweiundvierzig, was der Wahrscheinlichkeit entspricht, so hatte der Hipparchische Katalog statt jener 146 Sterne des Ptolemaios 121; in Summa also 640 + 121 = 761. Dabei sind jedoch die ἀμόρφωτοι des Ptolemaios (die aufserhalb der Sternbilder stehenden Sterne) völlig aufser Acht gelassen, unter denen sich z. B. ein Stern erster Gröfse wie der Arktur befindet. Es ist, wie ich schon oben hervorhob, mehr als wahrscheinlich, dafs auch Hipparch eine gröfsere oder geringere Zahl von ἀμόρφωτοι aufführte, da schon Arat von ihnen spricht. Zweifelhaft kann nur sein, ob er sie in der Art des Ptolemaios bei der Summierung von den Bildern absonderte oder ob er sie zu den zunächstliegenden Bildern zog: mit andern Worten, ob z. B. bei der Sternsumme des Bootes in unserm Katalog der Arktur mitgezählt ist oder nicht. Ist das letztere der Fall — und es scheint mir, dafs man es eher annehmen darf als das Gegenteil — so mufs zu der oben ermittelten Summe von 761 Sternen noch eine Anzahl ἀμόρφωτοι hinzugerechnet werden; da es bei Ptolemaios zusammen 108 sind, so würden wir für Hipparchs Katalog auf etwa 90 kommen. Die Gesamtsumme der von Hipparch verzeichneten Fixsterne würde danach 761 + 90 = 851 betragen haben.

Es bedarf kaum des Hinweises, dafs ein *absolut* genaues Ergebnis von der obigen Berechnung nicht erwartet werden kann. Nach *unten* hin kann die Gesamtsumme sich entweder um 761 oder um 851 bewegen. Nach *oben* ist dagegen durch die mitgeteilten Erwägungen insoweit ein recht bestimmtes Resultat gewonnen, als die Gesamtsumme der von Hipparch verzeichneten Sterne nach unserm Katalog nicht mehr als 851 + 20 oder 30 im *höchsten* Fall betragen haben kann. Denn es ist ganz unwahrscheinlich, dafs bei den sieben Sternbildern, für die wir keine Zahlen haben, das Verhältnis zu Ptolemaios wesentlich anders läge als bei den nicht weniger als zweiundvierzig, deren Sternzahlen sicher überliefert sind. Nehmen wir die Zahlen der Katasterismen, die zu drei Vierteilen nach dem Hipparchischen Katalog modernisiert sind und in den übrigen Fällen um höchstens 5 Sterne von ihm differieren, so finden wir für Schlange, Flufs, Hase, Argo, Wasser des Wassermanns zusammen 101 Sterne gegen 129 des Ptolemaios. Das oben ermittelte Verhältnis zwischen den Sternzahlen des Hipparch und Ptolemaios wiederholt sich also auch hier ziemlich genau.

Das kurze Ergebnis dieser Berechnung läfst sich also dahin wiederholen, dafs der Sternkatalog, auf den unser Excerpt zurückgeht, im

schlimmsten Fall nur etwa 761, im günstigsten nur etwas mehr oder weniger als 851 Sterne beschrieben hat. Nun giebt uns aber ein Anonymus (zuletzt gedruckt bei Maass *Comment. in Arat. rel.* p. 99—133) eine ganz ungleich höhere Sternzahl für Hipparch. Die Stelle (p. 128 M.) lautet: *Πόσοι οἱ πάντες ἀστέρες· Τοὺς πάντας ἀστέρας εἶναι Ἵππαρχός φησιν ᾳπ', ὅσοι οὖν πληροῦσι τὰ ἐν τοῖς φαινομένοις δρώμενα.* Darnach hat Hipparch also die Zahl der Fixsterne auf 1080 angegeben; und zwar, wie der Znsatz *ὅσοι κτλ.* beweist, nur die *innerhalb* der Sternbilder stehenden; er hat also in den Bildern über 300 Sterne mehr gezählt als unser Verzeichnis. Sind wir nach dieser Notiz dazu genötigt, den durch äufsere nnd innere Gründe gestützten Hipparchischen Ursprung unseres Excerptes preiszugeben, oder müssen wir den Fehler vielmehr in der vereinzelten Angabe des Anonymns suchen? Dafs die von ihm mitgeteilte Zahl auffallend hoch ist, läfst sich nicht leugnen; sie wird es umsomehr, wenn man bedenkt, dafs Ptolemaios innerhalb der Sternbilder nicht mehr als 918 Sterne aufführt. Er müfste also von den Sternen, für die im Hipparchischen Verzeichnis Ort nnd Gröfse[1]) angegeben war, nicht weniger als 160, also über ein Siebentel, einfach weggelassen haben. Diese Folgerung ist so unglaubwürdig, dafs nnr zwei Wege übrig bleiben. Entweder ist die Zahl bei dem Anonymus verdorben: das ist Rehms Meinung (a. a. O. S. 270, 1). Oder sie bezeichnet nicht die von Hipparch in seinem Katalog beschriebenen Sterne, sondern ist der Versnch einer Schätzung *aller* in den Bildern sichtbaren Sterne, also auch der in dem Verzeichnis nicht ausdrücklich beschriebenen. Es mufs dergleichen Schätzungsversuche in der That gegeben haben: denn sonst läfst sich die Zahl von 1600 Sternen, die nach Plinius II 110 einige (quidam) angegeben haben sollen, überhaupt nicht begreifen.[2])

Halten wir also trotz der Notiz des Anonymus an der Zurückführung unseres Excerptes auf Hipparch und damit an der oben berechneten Zahl von nicht viel mehr als 850 Sternen für seinen Katalog fest, so ergiebt

1) Plin. N.H. II 95: Idem Hipparchus numquam satis laudatus ... ausus rem etiam deo improbam, adnumerare posteris stellas ac sidera ad nomen expungere organis excogitatis, per quae singularum loca atque magnitudines signaret.

2) Dafs es niemals einen antiken Sternkatalog gegeben hat, der 1600 Sterne beschrieben hat, ist auch die Meinung von Tannery (*Recherches sur l'hist. de l'astron. ancienne* p. 275f.). Sein Erklärungsversuch des mille sexcentas stellas — Plinius soll ursprünglich nur sexcentas im Sinne von 'unzählige' geschrieben haben, wozu dann die Korrektur mille von einem Späteren zugefügt wurde — kommt mir nicht eben wahrscheinlich vor. Zu beachten ist auch, dafs Bayer, nach Abzug der Sternbilder um den Südpol, gerade etwa 1600 Sterne verzeichnet. — Ebenfalls nur eine Schätzung und zwar eine sehr oberflächliche ist die Behauptung eines Anonymus (Maass *Comment.* p. 318), Arat habe 1000 Sterne gekannt.

sich daraus eine sehr bedeutsame Konsequenz. Es gilt seit Delambre[1]) und namentlich seit Tannery[2]) als eine fast unbestrittene Thatsache, dafs das ganze Sternverzeichnis des Ptolemaios lediglich eine Erneuerung des Hipparchischen darstellt und zwar in der Weise, dafs Ptolemaios zu den Längenangaben des Hipparch jedesmal einfach 2° 40′ hinzugerechnet habe, seiner irrigen Auffassung der Präcession entsprechend. Allein wenn Hipparch nur 850 Sterne beschrieben hatte, so war ein derartiges Verfahren für Ptolemaios bei nicht weniger als 175 Sternen unmöglich.

Vergangene Jahrhunderte haben die Verdienste des Ptolemaios überschätzt; gegenwärtig urteilt man über ihn vielleicht in manchen Punkten etwa allzu geringschätzig. Es wäre erfreulich, wenn der alte Vorwurf gegen ihn, er habe sich gegen die Wahrheit einer gröfseren Zahl von Beobachtungen gerühmt[3]), zu widerlegen wäre. Nun scheint es nach dem Obigen unzweifelhaft, dafs sein Sternkatalog wesentlich umfangreicher war als der des Hipparch. Und entgegen einer alten Tradition, die Herr Björnbo im folgenden Artikel sorgfältig geprüft und bis zu ihren Wurzeln zurück verfolgt hat, mufs man zugestehen, dafs wir eine positive Nachricht über eine Neubearbeitung und Vermehrung des *gesamten* Hipparchischen Katalogs durch einen Vorgänger des Ptolemaios, sei es Menelaos oder Agrippa, durchaus nicht besitzen. Allem Anschein nach wird man also dem Ptolemaios das Verdienst lassen müssen, nach seinem grofsen Vorgänger ein wesentlich reicheres Bild des griechischen Sternhimmels geschaffen zu haben. Entscheidend für das Urteil über Ptolemaios ist aber freilich die Frage, wieviel Vertrauen diese neuen Beobachtungen verdienen und wieviel Sorgfalt und redlichen Willen wir ihrem Urheber zutrauen dürfen. Herr Björnbo führt in seinem Aufsatz, zu dem ich mich freue die Anregung gegeben zu haben, aus Al Battani ein ganz neues Element zur Beurteilung dieser Frage ein, und ich fürchte, dafs seine für Ptolemaios sehr ungünstigen Schlufsfolgerungen nicht leicht zu widerlegen sein werden. Durch die dürftigen und doch so bedeutungsvollen Reste des Hipparchischen Sternkatalogs ist diese Frage nicht zu lösen; ich mufs mich begnügen, einen reineren Text des Hipparch-Excerptes mitgeteilt und auf die Probleme hingewiesen zu haben, die sich an ihn knüpfen.

1) *Histoire de l'astron. ancienne* I, 183.

2) A. a. O. S. 270. Vgl. Wolf, *Gesch. d. Astron.* p. 194; Hultsch in Wissowas *Realencyclopädie* II, 1850.

3) *Synt.* VII 2, p. 12 ed. Halma: *Παρακεχώρηκεν ἄρα ὁ ἐπὶ τῆς καρδίας τοῦ Λέοντος εἰς τὰ ἑπόμενα τοῦ διὰ μέσων τῶν ζῳδίων μοίρας β′ β″ γ″, τῶν ἀπὸ τῆς τοῦ Ἱππάρχου τηρήσεως ἐτῶν μέχρι τῆς ἀρχῆς Ἀντωνίνου, καθ' ἣν μάλιστα καὶ ἡμεῖς τὰς πλείστας τῶν ἀπλανῶν παρόδους τετηρήκαμεν, ε′ που καὶ ξ′ καὶ σ′ συναγομένων κτλ.*

Hat Menelaos aus Alexandria einen Fixsternkatalog verfafst?

Von AXEL ANTHON BJÖRNBO in Kjöbenhavn.

DELAMBRE erwähnt mehrmals[1]) eine Nachricht, die er bei einem gewissen RICCIUS gefunden hat. Nach diesem Bericht soll ein gewisser „Millaeus" zur Zeit des TRAIAN einen Fixsternkatalog verfafst haben, der dem PTOLEMAIOS durchweg als Grundlage diente. DELAMBRE wagt diesen „Millaeus" nicht mit dem in PTOLEMAIOS' *Syntaxis*[2]) erwähnten MENELAOS zu identifizieren, obwohl ihm diese Gleichsetzung selbst natürlich scheint, da jener MENELAOS, von dem in der *Syntaxis* zwei Fixsternbeobachtungen aufgenommen sind, diese ebenfalls unter TRAIAN gemacht hat. Gleichwohl schiebt DELAMBRE schliefslich die Frage beiseite, mit der Bemerkung, dafs dieses verlorene Fixsternverzeichnis kaum etwas anderes als eine Abschrift von dem des HIPPARCH gewesen sei.

Nun sind wir jetzt vollständig sicher, dafs MENELAOS und „Millaeus" derselbe ist[3]), indem letzterer Name von GERHARD VON CREMONA eingebürgert wurde, und zwar durch eine fehlerhafte Interpretation der diakritischen Punkte in den ihm vorliegenden arabischen Handschriften. Dadurch wurde der Name „Milleus" oder „Mileus" bis zur Zeit des REGIOMONTAN der im Occident einzig bekannte.[4])

Ein anderer Umstand erhöht jetzt unser Interesse an der Frage, ob MENELAOS einen Fixsternkatalog verfafst hat. Wie sich aus dem vorhergehenden Aufsatz von Herrn F. BOLL ergiebt, scheint nämlich HIPPARCHS Fixsternverzeichnis nicht, wie man früher annehmen mufste, 1080 Sternbestimmungen, sondern nur etwa 850 enthalten zu haben. Damit werden

---

1) DELAMBRE, *Histoire de l'astronomie ancienne* I, p. XV u. p. 186; II, p. 258, 264.

2) PTOLEMAIOS, *Syntaxis* ed. HALMA II, p. 25, 27.

3) Vgl. z. B. STEINSCHNEIDER, Zeitschr. für Mathem. **10**, 1865, p. 456ff.

4) In cod. S. Marc. Venet. Cl. XI. 63, der aufser der: „epitome Almagestum" von REGIOMONTAN auch MENELAOS' Sphärik enthält, ist die Überschrift »MENELAI liber primus«. In einem Brief an BIANCHINI vom Jahre 1464 erwähnt REGIOMONTAN MENELAOS' Sphärik, fügt aber hinzu: „alii vocant Mileum . . . ., sed MENELAUS vere dicitur." Vgl. C. MURR: *Memorabilia bibliothecarum Norimbergensium* I, p. 116--118.

Delambres Schlussfolgerungen in Bezug auf Ptolemaios' Katalog[1]) in Frage gestellt, und desgleichen Tannerys[2]) Darstellung, die hauptsächlich Delambre folgt, doch mit der Ausnahme, daſs er den Bericht über „Millaeus" übersehen oder vernachlässigt hat.

Darf es somit als wahrscheinlich gelten, das Ptolemaios' Verzeichnis c. 170 Sternbestimmungen mehr als das des Hipparch enthielt, so gilt es nun nachzuweisen, ob der Ruhm für diese Vermehrung der Beobachtungen dem Ptolemaios oder vielmehr dem Menelaos gehört.

Das Werk, aus dem Delambre seine Aufschlüsse hat, ist Augustinus Ricius (oder Ritius): *De motu octaue sphere.*[3]) Aus dem Inhalt schlieſse ich, daſs es 1517 verfaſst wurde. Nach Neubauer[4]) soll es „Paris 1521" gedruckt sein. In dem Exemplar der Münchener Staatsbibliothek steht keine Jahreszahl, dagegen wird Casalis als Ausgabestelle bezeichnet.

In diesem Werk steht fol. 29v: »Unde aduertendum est primo, Milleum geometram Rome, ante Ptolemeum 41 annorum spatio, primo scilicet imperij Trajani Cesaris anno, atque ab incarnatione 92[5]) omnium stellarum fixarum loca secundum signa immobilia summa cum diligentia descripsisse, cuius descriptioni summopere Ptolemeus in locandis stellis fixis confisus est, tantum singulis stellarum loculis in longitudine 25 m. adiciens, propriam in hoc secutus oppinionem, moueri scilicet stellas centum annis per unam partem, unde 41 annis 25 minuta motas fuisse credidit. Hec autem vir astronomie admodum peritus Albuhassin in eius *de locis stellarum fixarum* libro testatus est«.

Deutlicher kann man nicht sprechen. Die Frage ist aber, in wie weit man dem Ricius vertrauen kann. Obwohl sein Büchlein im ganzen vertrauenerweckend, ja fast modern wissenschaftlich geschrieben ist[6]), werden wir doch damit die Frage nicht als erledigt betrachten können. Wir haben nämlich mit der Möglichkeit zu rechnen, daſs dem ganzen Bericht eine aufgebauschte Interpretation der oben erwähnten Stellen in

---

1) Vgl. Delambre, l. c. II p. 284, 250—252.

2) P. Tannery, *Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne*, Chap. XV.

3) Genau lautet der Titel: Augustini Ritij *de motu octaue sphere: opus mathematica atque philosophia plenum* . . . . . Nuper in ciuitate Casalis sancti Euasij sub diuo Gulielmo marchione Montisferrati editum.

4) Neubauer, Archives des missions scientifiques 1_3, p. 565; vgl. auch Riccioli, *Almagestum novum* I, Chronic. Pars II, p. XXXI, wo 1513 als der Zeitpunkt der Edition genannt wird.

5) Soll 98 sein.

6) Ricius' Werk, dessen Hauptzweck die geschichtliche Darstellung des Präcessionsproblems („motus octauae sphaerae") ist, ist schon an sich wegen der vielen darin enthaltenen geschichtlichen Erläuterungen sehr lesenswert.

Ptolemaios' *Syntaxis* (VII cap. 3) zu Grunde liegt[1]), und müssen deswegen versuchen Ricius' Bericht rückwärts zu verfolgen.

Den obigen Passus ergänzt Ricius mit folgenden Worten: fol. 30r: »Eodem modo latas esse stellas cernere licet a Milleo ad Alphonsum, in qua re aduertendum est, regem Alphonsum primo fuisse oppinatum, stellas motu duplici scilicet titubationis, et motu augium[2]) communium none sphere agitari, sicuti et nunc communiter creditur, canones tabularum Alphonsi id causantes; attamen quattuor annis postea quam tabulas planetarum composuerit, anno scilicet ab incarnatione 1256, quum, translatum ex arabico in hispalensium idioma, librum sapientissimi viri Albuhassin quidam Rabi Juda nomine, Judeus, regi obtulerit, quem librum *de stellarum fixarum motu atqui locis Albuhassin* composuerat, et in quo Alphonsus probatam Albateni (Albategnii) sententiam, locaque stellarum optime et fideliter signata reperit. Tunc reuocata priori sententia, ad hoc accedentibus forte rationibus, quales a nobis adductas vidisti, Albateni sententiam complexus est«. ...... »Hec autem omnia refert Abraham Zacuth in sua *magna compositione*«.

Nach jahrelangem vergeblichen Suchen ist es Steinschneider[3]) gelungen zu konstatieren, dafs die von Ricius mitgeteilten eben angeführten Nachrichten, die ihm auffallend waren, auch wirklich in Abraham Zacuths *magna compositio* stehen. Er fand sie in cod. Monac. hebr. 109, der einen der zwei bis jetzt bekannten Handschriften dieses Werkes.[4]) Da indessen Ricius in Salamanca bei Abraham Zacuth als dessen Schüler und Gehülfe war[5]), so ist uns damit nur soweit gedient, dafs wir wissen, dafs der Bericht nicht von Ricius selbst zusammengefabelt ist.

Auch hilft es uns wenig, dafs wir diese Geschichten, namentlich die vom Einflufs des Werkes des Albuhassin auf die Alfonsinischen Tafeln immer wieder in der Litteratur des 16. und 17. Jahrhunderts treffen, zum Beispiel bei Erasmus Reinhold[6]), Copernicus[7]),

1) Auch Tannery schliefst ja aus der *Syntaxis*, dafs Menelaos und Agrippa gröfsere Arbeiten über die Fixsterne verfafst haben.

2) So bei Ricius. Der Ausdruck ist mir unverständlich.

3) Vgl. Zeitsch. der deutschen morgenl. Gesellsch. 18, 1864, p. 178.

4) Die andere ist in Lyon, cod. 11; vgl. Neubauer, l. c. — Die lateinischen Übersetzungen, die gedruckt vorliegen (z. B. *Almanach perpetuum* Venedig 1515) enthalten nicht die von Ricius gegebenen Notizen.

5) Vgl. Zeitschr. der deutschen morgenl. Gesellsch. 18, 1864, p. 178 und Riccioli, l. c. I, Chron. p. XXVIII. — Vgl. auch Seite 200, Note 1.

6) Er. Reinhold, *Theorica Peurbachiana octavae sphaerae*, p. 235, 244.

7) Bei Copernicus hat Delambre eine Stelle gefunden, wo jener dem Menelaos ein grofses Fixsternverzeichnis zuschreibt (vgl. Delambre, l. c. I, p. 186). Bezieht Delambre sich vielleicht auf eine der Stellen bei Prowe, *Copernicus* (Thorn 1879) II, p. 152, 181 oder *De reuolutionibus* II, cap. 14; III, cap. 3?

Tycho Brahe[1]) und Riccioli[2]); denn diese Schriftsteller beziehen sich unzweifelhaft alle auf Ricius und nicht direkt auf das Werk von Albu-hassin.

Um alle die in Frage kommenden Urkunden gleich auf eine Stelle zu sammeln, lasse ich eine Übersetzung aus Abraham Zacuths Werk, die Dr. H. Ehrentreu in München mir gütigst zur Verfügung gestellt hat, folgen:

Cod. Mon. hebr. 109. fol. 22: ..... „Wir finden auch in dem Werke über die Fixsterne, welches er (d. h. König Alphons), gemäfs seiner Zeit, 4 Jahre nach den Tafeln herausgegeben hat, dafs er zurückgekommen ist (d. h. von seiner oben erwähnten irrigen Meinung); denn er sagt, dafs die Achte (Sphaera) zweifellos immer vorwärts schreitet, wie es Ptolomaeus geschrieben hat. Dieses Werk das ist dasselbe Werk, welches Rabbi Jehuda Sohn Mose der Kohen (Ahronide) dem König übersetzt hat. Dieses Werk hat der Weise (oder Gelehrte), welcher genannt wird Abul Hosein, verfafst. Ebenso hat der genannte Rabbi Jehuda Sohn Ascher (soll wohl „Mose“ heifsen) das Werk *Ha-mischpatim* (die Rechtsvorschriften d. h. sicher die Astrologie) von Ali Sohn Rog'eil[3]) (Abenragel) aus Maghreb und ferner auch das Werk *Haneschika b'zurath ha-mazaloth* (?) für den obgenannten König übersetzt....... Demnach mufst Du wissen, dafs die 1022 Sterne, die ich von dieser Zeit (d. h. Jahr 1458 oder 1464) herausgebe — dafs ich zu dem Ort der Sterne aus dem *Almagest*, den Ptolomaeus im ersten Jahre des Antoninus I, d. i. das Jahr 133 der Menschwerdung d. i. das Jahr 886 des Nebukadnezar, 2 Grade 30 Minuten[4]) hinzufüge, für je 66 Jahre einen Grad. Obgleich zwischen ihm und mir 1345 sind und es würde doch nicht so viel herauskommen, wenn Du auf je 66 Jahre einen Grad giebst, so sollst Du Dich darüber nicht wundern, denn ich zähle 41 Jahre vor Ptolomaeus, denn damals ordnete Menelao, der Weise, alle Sterne, die Ptolomaeus in seinem Werke aufgeschrieben hat, wie Albu Hosein schreibt, und

---

1) Tycho Brahe, *Historiae coelestis liber* (1586), προλεγομένος XXXIX.

2) Riccioli, l. c. VI, p. 444—445; I, p. XIX.

3) Rabbi Jehuda hat also sowohl Al-Sufis Werk über die Konstellationen (vgl. unten) wie Abenragels *de judiciis* ins Kastilianische übersetzt. Ob eine lateinische Übersetzung von Al-Sufis Werk existiert, lasse ich dahinstehen. Doch mache ich in dieser Beziehung auf Cod. Parisin. Arsenalis 1036, fol. 1—70: „Liber de locis stellarum fixarum ab Ebennesophy philosopho annis Arabum 272“ aufmerksam, obwohl die Zeitangabe 894 n. Chr. nicht mit Al-Sufi stimmt.

4) Es mufs 20° 30′ oder 22° sein. Überhaupt stimmen die hier zitierten Zahlen bei Abraham Zacuth nicht überein, ohne dafs es leicht zu sehen ist, wie sie zu korrigieren sind. — Wie Hr. Ehrentreu bemerkt, ist „Nebukadnezar“ natürlich mit „Nabonassar“ zu ersetzen.

Ptolomaeus fügte 25 Minuten hinzu, wegen der 41 Jahre, nach seiner Annahme, und in 100 Jahren einen Grad. Aber die Wahrheit ist nicht so, sondern in 66 Jahren. So wollen wir uns auf den Mann stützen, der zuerst diese Örter geordnet hat, denn das Zeugnis spricht für ihn".[1])

Wer ist nun aber dieser Albuhassin? Bei mehreren Forschern bekommt man hierauf ganz unrichtige Aufschlüsse. Leclerc[2]) z. B. identifiziert ihn mit Alhazen ibn Heitham. R. Wolf[3]) nennt einen Albohazen, den er mit Abenragel (Abul Hasan Ali ibn abi Rigal) identifiziert, und schreibt ihm den *Liber de motu et locis stellarum* (um 1250 verfafst) zu. Dieses Mifsverständnis kommt daher, dafs Abenragels *De judiciis*, ganz wie das Werk von Albuhassin, im Jahre 1256 von Rabbi Juda (d. h. Jehuda ben Mosé Cohen) ins Kastilianische übersetzt wurde.[4]) Übrigens lebte Abenragel im XI. Jahrh., und der Name Albohazen ist nur die kastilianische Form für Abul-Hasan, deren es sehr viele giebt, und der Albuhassin bei Ricius, der sicher Abul-Hassan hiefs, ist von den Spaniern (wie jeder Abul-Hassan) Albohazen oder Abolfazen genannt worden, und ist derselbe wie der in den *Libros del saber de Astronomia del Rey d'Alfonso X de Castilla*[5]) zitierte Abolfazen: Libro de las estrellas.

Erst bei Steinschneider, der sich hier wieder als die beste Quelle, was arabische Schriftsteller betrifft, bewährt, finden wir das Richtige.[6]) Er identifiziert nämlich den Albuhassin bei Ricius mit Abul Husein (oder Hassan) Abderrahman Al-Sufi (903—986 n. Chr.) von Reï in Persien, dessen Hauptwerk eben eine Uranographie[7]) ist. In der Vorrede dieses Werkes finde ich denn auch die Stelle, auf welche sich Ricius bezieht, und somit ist Ricius' und Abraham Zacuths Zuverlässigkeit festgestellt und Steinschneiders Identifikation von Al-Sufis

1) Dafs Ricius sich auf eben diese Stelle in Abr. Zacuth stützt, zeigen die obigen Zitate aus seinem Werke, sowie folgendes (Ricius fol. 6r): »Hanc etiam utpote veriorem sententiam (scilicet Albategni) Habraham Zacuth, astronomie nostra tempestate peritissimus, in sua magna editione affirmat, nobisque, eum legentem in Africa apud Carthaginem audientibus, eandem tenendam tuendamque esse multis rationibus suasit«.

2) Leclerc, *Histoire de la médecine arabe* II, p. 443.

3) R. Wolf, *Geschichte der Astronomie*, p. 71, 78.

4) Wüstenfeld, *Die Übersetz. arab. Werke in das Lateinische* (Abh. der kgl. Ges. der Wiss. zu Göttingen **22**, 1877, p. 89—90) und Suter, Abh. zur Gesch. der Mathem. **10**, 1900, p. 100.

5) Madrid, 1863—1867. I, p. 30 und Proleg. XCII.

6) Zeitschr. der deutschen morgenl. Gesellsch. **24**, 1870, p. 349; **25**, 1871, p. 419 und **30**, 1876, p. 147; ferner *Hebräische Übers.* II, p. 616—617.

7) Der arabische Titel scheint: „Abhandlung über die Fixsterne mit Figuren" zu heifsen.

Uranographie und ALBUHASSINS *De motu et locis stellarum fixarum* bestätigt.[1]) Die Vorrede von AL-SUFI ist von CAUSSIN[2]) mit französischer Übersetzung publiziert. CAUSSIN wandte dazu cod. Par. 1113 an, und hat aufserdem cod. Par. 1110 u. 1111 verglichen. Später ist eine Ausgabe des ganzen Werkes mit Übersetzung von SCHJELLERUP[3]) erschienen.

Ich gebe die Übersetzung der in Frage kommenden Stelle aus der Vorrede des AL-SUFI nach SCHJELLERUP (p. 42 ff.); sie stimmt in allen wesentlichen Punkten mit der von CAUSSIN (p. 255 ff.) überein:

„Quant aux lieux des étoiles par rapport aux signes du zodiaque, j'ai trouvé que PTOLÉMÉE s'est appuyé sur les observations de MÉNÉLAÜS, faites l'an 845 de Nabonassar, et qu'il a marqué dans son livre les positions des étoiles fixes pour la première année d'Antonin, c'est-à-dire l'an 886 de Nabonassar. L'intervalle entre l'observation de MÉNÉLAÜS et l'époque de PTOLÉMÉE est donc de 41 ans. PTOLÉMÉE dit que MÉNÉLAÜS trouva la distance d'*al-simâk al-azal* (Spica) au commencement de l'écrevisse de 86° 15′, et la distance de l'étoile la plus boréale des trois du front du scorpion (β Scorpionis) au point équinoxial d'automne de 35° 55′; d'où il suit qu'*al-simâk al-azal* devait être alors dans 26° 15′ de la vierge, et l'étoile la plus boréale des trois au front du scorpion dans 5° 55′ du scorpion. PTOLÉMÉE croyait que le mouvement était d'un degré en 100 ans. Ajoutant donc à chacune des deux étoiles 25′, ce qui résulte du mouvement dans l'intervalle du temps entre lui et MÉNÉLAÜS, c'est-à-dire 41 ans, il a fixé *al-simâk al-azal* dans 26° 40′ de la vierge, et l'étoile boréale du front du scorpion dans 6° 20′ du scorpion; *ensuite il a ajouté cette même quantité (25′) à toutes les étoiles, et c'est ainsi qu'il a dressé les tables qui sont dans son livre intitulé al-madjistî.*

---

1) Nach ABULFARAG ist der Titel: „Buch der Konstellationen mit Figuren". Nach CAUSSIN (s. unten) erwähnt jener nämlich AL-SUFI mit folgenden Worten: „Il était un savant du premier ordre, un esprit supérieur, et jouissait de la plus haute réputation. Il a laissé plusieurs ouvrages dont les principaux sont le livre des constellations avec figures, et le livre, intitulé el-Ardjuzé." Letzteres Werk scheint eine Art populären versifizierten Auszugs des Werkes über die Konstellationen zu sein, und liegt wohl in cod Monac. arab. 870 vor. Vgl. E. NARDUCCI, *Intorno ad una traduzione italiana fatta nell' anno 1341 di una compilazione astron. d' ALFONSO X.* Giorn. arcadico (Roma) **42**, 1865, p. 81—112.

2) *Les constellations d'ABOULHOSSAIN ABDERRAHMAN ES-SOUFI ER-RAZI par* M. CAUSSIN, (Notices et extraits des manuscrits de la bibl. nation. **12**, Paris 1831, p. 236—276).

3) *Description des étoiles fixes composée au milieu du 10e siècle de notre ère par l'astronome persan ABD-AL-RAHMAN AL-SÛFI. Traduction littérale de deux manuscrits arabes des bibliothèques de Copenhague et de St. Pétersbourg avec des notes par* H. C. F. C. SCHJELLERUP (*St.-Pétersbourg 1874*).

Les auteurs d'*al-mumtahan*[1]) observèrent ensuite et trouvèrent que le mouvement des étoiles, depuis le temps de MÉNÉLAÜS jusqu'à eux, avait été d'un degré en 66 ans.

Entre l'époque pour laquelle nous avons fixé les positions des étoiles dans ce livre, c'est-à-dire l'an 1276 d'Alexandre (963 de notre ère, 1712 de Nabonassar), et l'observation de MÉNÉLAÜS, il s'est écoulé 866 ans. Le mouvement des étoiles dans cet intervalle, en le supposant d'un degré en 66 ans, a dû être de 13° 7′ environ. Si nous en retranchons 25′, l'addition faite par PTOLÉMÉE à chaque étoile, il nous restera ce qu'il faut ajouter aux lieux assignés par PTOLÉMÉE dans non livre, c'est-à-dire, 12° 42′. Le lieu d'*al-simâk* sera donc, pour le commencement de l'an 1276 d'Alexandre, dans 9° 22′ de la balance, et la plus boréale des trois du front du scorpion se trouvera dans 19° 2′ du scorpion: et telle sera l'addition à faire à toutes les autres étoiles."

Obwohl AL-SUFI hier mit deutlichen Worten sagt, dafs PTOLEMAIOS sein Fixsternverzeichnis durch einfaches Addieren von 25′ zu jeder Längenbestimmung in dem Verzeichnisse des MENELAOS hergestellt hat, sieht AL-SUFIS Bericht doch sehr verdächtig aus; denn erstens kennt er, wie aus der Vorrede deutlich hervorgeht, von griechischen Quellen überhaupt nur PTOLEMAIOS' *Syntaxis*, von der er, wie er selbst sagt, mehrere Exemplare[2]) gesehen hat, und zweitens nimmt er die von AL-BATTANI (oder vielleicht schon von dessen arabischen Vorgängern) gefundene Präcession von einem Grad in 66 Jahren als richtig an, d. h. er verwirft die von PTOLEMAIOS gefundene von einem Grad in 100 Jahren. Da er nun mit gutem Grund hat annehmen können, und zwar lediglich aus PTOLEMAIOS' 7. Buch, dafs letzterer seine Sternbestimmungen gröfstenteils durch Benützung älterer Bestimmungen hergestellt hat, natürlich immer mit Addition der falschen Präcession, so war er ganz eigentlich gezwungen, einen der von PTOLEMAIOS erwähnten früheren Beobachter als den ersten und richtigen anzusehen, um auf diese Weise durch Subtraktion der falschen Präcession zwischen diesem ursprünglichen Beobachter und PTOLEMAIOS und Addition der richtigen Präcession zwischen jenem und ihm selbst die für seine eigene Zeit geltenden Längen der Sterne zu bekommen. Hatte er sich aber für einen bestimmten Mann als den ursprünglichen Beobachter entschieden, so mufste er auch behaupten, dafs dieser *alles* gemacht habe; das entgegengesetzte hätte ja geheifsen, sein eigenes Verfahren in Mifskredit bringen. In der That haben ja die modernen Forscher

1) D. h. die verifizierte Tafel (im Jahre 820 auf Befehl des AL-MAMUN zu Bagdad hergestellt). Vgl. LECLERC, l. c. I, p. 317.

2) Vgl. unten S. 206.

dasselbe gethan, in diesem Falle speziell, weil es so nahe liegt. Nur drücken sie sich ehrlicher aus, weil sie ein geschichtliches Problem vor sich haben, und über die richtige Lage der Sterne nicht im Zweifel sind. Für AL-SUFI, der einen neuen richtigen Sternkatalog mit Hülfe von dem des PTOLEMAIOS herstellen wollte, lag die Sache ja ganz anders.

AL-SUFI entschied sich für MENELAOS, die modernen Forscher dagegen für HIPPARCH, weil sie zu wissen meinten, daſs dieser einen Fixsternkatalog mit mehr Bestimmungen als der des PTOLEMAIOS verfaſste, und wohl auch, weil er ihnen als der gröſste Astronom des Altertums bekannt war.

AL-SUFIS Wahl läſst sich aber schon erklären. Für die Araber war vielmehr MENELAOS der groſse Vorgänger des PTOLEMAIOS; von seiner Hand besaſsen sie mehrere Werke, und auſserdem muſsten die 2 Beobachtungen, die PTOLEMAIOS dem MENELAOS zuschreibt, viel sicherer erscheinen als die 2 von HIPPARCH, von denen die eine (Spica) von PTOLEMAIOS selbst als eine nur annäherungsweise richtige bezeichnet wird. AGRIPPA von Bithynien konnte nicht der Mann sein, denn ihn kannten die Araber sonst gar nicht, und von ihm wird nur eine Beobachtung erwähnt; und was TIMOCHARIS betrifft, so ist der Zeitpunkt seiner Beobachtungen nicht immer festgestellt, und die Beobachtungen selbst von PTOLEMAIOS als nicht allzu sicher bezeichnet. Also war MENELAOS der rechte Mann.

Wie wir unten sehen werden, scheint es, daſs AL-SUFI noch bessere Gründe hatte, eben MENELAOS zu wählen, und zwar zunächst den, daſs AL-SUFIS Vorgänger den Beobachtungen des MENELAOS einen ganz besonderen Wert zuschrieben. Wir müssen deswegen die Frage noch weiter rückwärts verfolgen, und können AL-SUFI verlassen, indem wir zum Schluſs konstatieren, daſs sein Bericht, der später in der Renaissancezeit, ja bis auf DELAMBRE herumspukte, so lange nicht andere Urkunden vorliegen, so aufgefaſst werden muſs, daſs er wahrscheinlich (mehr können wir vorläufig nicht sagen, weil AL-SUFI schlieſslich bestimmte Quellen, die er nur nicht anführt, gehabt haben *kann*) auf einer kühnen aber notwendigen Konjektur beruht. Daſs MENELAOS dagegen mehr als die zwei von PTOLEMAIOS erwähnten Beobachtungen gemacht hat, bleibt natürlich auch für uns an sich wahrscheinlich; was aber das groſse Verzeichnis betrifft, da gilt ein „entweder — oder"; und wie wir die Sache auffassen, steht die ganze Frage über PTOLEMAIOS' Vorgänger trotz der bestimmten Behauptung des AL-SUFI eigentlich ganz wie früher, d. h. so wie sie oben von Herrn BOLL präzisiert worden ist.

Damit ist aber die Geschichte merkwürdigerweise nicht aus; denn es scheint, daſs AL-BATTANI, dessen Präcessionswert, wie oben bemerkt, AL-SUFI folgt, wirklich noch andere Berichte über MENELAOS' astronomische

Thätigkeit vor sich hatte, als die, die er in Ptolemaios' *Syntaxis* lesen konnte.

Al-Battanis Astronomie, die kürzlich arabisch ediert worden ist[1]), lag früher nur in der sehr schlechten lateinischen Übersetzung von Plato von Tivoli vor; so ist die Stelle, die für uns Interesse hat, namentlich was die Zahlen betrifft, jedenfalls in den zwei alten Drucken[2]) ganz verdorben und unverwendbar. Herr Oberbibliothekar Aumer in München hat aber die grofse Liebenswürdigkeit gehabt, mir die notwendigen Korrekturen nach der arabischen Ausgabe mitzuteilen. Ehe ich die Stelle anführe, bemerke ich noch, dafs Al-Battanis Fixsternbeobachtungen sich auf das Jahr 878 n. Chr. beziehen, so dafs sie 85 Jahre älter sind als die des Al-Sufi.

Nach der Übersetzung von Plato von Tivoli, und mit den Korrekturen, die sich aus dem Urtext ergeben, lautet Al-Battanis Bericht über seine Präcessionsbestimmung so:

».... ipsarum (stellarum fixarum) autem loca secundum longum et latum in Ptolomaei libro anno primo Regis Antonini, qui est annus 886 a Rege Nabuchodnosor inuenimus; in una illarum obseruationum, per quas Ptolomaeus operatus est, fuit obseruatio Menelai, qua usus est anno 845 à Nabuchodnosor Rege; dixitque stellam septentrionalem, quae inter duos Scorpionis oculos positur (d. h. β Scorpionis), velut per Lunam cum sphaera circulorum experimentatus est, illo anno in $5^0\ 55'$ Scorpii existere; ac secundum quod ipse in libro suo scripserat, cor Leonis (d. h. Regulus) illo eodem anno in 2 gradibus et sexta (d. h. $2^1/_6{}^0$) Leonis esse, Leumia (d. h. Sirius) vero in 17 gradu Geminorum esse debuerat. Nos etiam has et alias stellas persaepe continuis annis obseruauimus, unaque nostrarum obseruationum, in qua plurimum confidimus, facta est anno 1191 ad Hilcarnain (eigtl. Sulcarnain d. h. nach Alexander). Lunam quoque et stellarum transitus per caeli medium obseruantes, earum ab aequidiei circulo longitudinem signorumque partes, cum quibus caelum eis mediatur, per eos transitus adinuenimus, ad quas circuli signorum partes in longum et latum loca peruenerint, per hoc deprehendimus; stellamque septentrionalem, quae inter duos Scorpionis oculos circumuoluitur in 17 gradu et 45 minutorum Scorpionis, Leumia in 28 gradu et 50 minutorum Geminorum, cor autem Leonis in 14 gradu

1) Al-Battani *sive Albatenii opus astronomicum ad fidem codicis Escurialensis arabice editum, latine versum a* C. A. Nallino: Pars 3, textum arabicum continens. (Pubblicazioni del reale osservatorio di Brera in Milano 40, 1899).

2) Albategnius ben Giaber, *De motu stellarum* (Norimb. 1537). — Albategnius, *De numeris stellarum et motibus* (Bononiae 1645).

Leonis inuenimus. Fuit autem huius obseruationis annus 1627 regni Nabuchodnosor. Cumque hos 11 gradus et 50 minuta, quae habentur inter primum locum et eum locum, in quo nos ipsas inuenimus, per 782 annos, qui sunt inter duas obseruationes, diuidentur, earumque motus in omnibus 66 annis solaribus unius esse gradus inuenimus; et sic eos in tabulis motuum stellarum fixarum, qui per collectos et expansos annos atque menses abstracti sunt, descripsimus. Similiter etiam nos 11 gradus & dimidium ac tertiam locis, in quibus eos in PTOLOMAEI libro scriptos inuenimus, addidimus, earumque loca anno 1191 ad Hilcarnain scripsimus.«

Aus diesem Passus sehen wir, das AL-BATTANI mehr Vertrauen zu MENELAOS' Beobachtungen als zu denen des PTOLEMAIOS hatte, indem er ja die ersteren zur Präcessionsberechnung anwendet. Ferner scheint es, dafs AL-BATTANI die erste Sternbestimmung, die er dem MENELAOS zuschreibt, nur bei PTOLEMAIOS gefunden hat (wir finden sie auch in der *Syntaxis*), die zwei folgenden aber in einem Buch von MENELAOS selbst. Die Stelle ist jedoch zweideutig und wir müssen deswegen auseinandersetzen, ob AL-BATTANI vielleicht auch die zwei letzteren dem MENELAOS zugeschriebenen Bestimmungen in der *Syntaxis* lesen konnte. Zu diesem Zweck sammeln wir alle die Längenbestimmungen, die PTOLEMAIOS aus älteren Werken zitiert, und stellen sie zum Vergleich neben die Beobachtungen und Zitate aus AL-BATTANIS Werk in einer Tafel, in welcher die Längenbestimmungen, die PTOLEMAIOS aus den Werken seiner Vorgänger entnimmt, sowie die zugeordneten Längen aus dem Verzeichnis in der *Syntaxis* aufgeführt sind. Zum Vergleich haben wir die Längenbestimmungen, die sich aus dem obigen Passus des Werkes des AL-BATTANI ergeben, beigefügt, und zwar **unterstrichen**. Überall sind die wirklichen Sternörter in ( ) hinzugefügt[1]) und so auch die positiven bezw. negativen Differenzen, die uns also den Fehler jeder einzelnen Bestimmung angeben.

Mit der von PTOLEMAIOS angenommenen Präcession stimmen, mit Ausnahme der zwei Spicabeobachtungen von TIMOCHARIS (gegenzeitig) *alle* die von PTOLEMAIOS erwähnten Bestimmungen überein. *Dies ist aber nicht der Fall mit den zwei Bestimmungen (Regulus und Sirius), die AL-*

1) Für Sirius, Regulus und Spica habe ich die wirklichen Längen gefunden mit Hülfe von O. DANCKWORTT, *Sterntafeln, enthaltend die Positionen von 46 Fundamentalsternen von ÷ 2000 bis + 1800, nach LEVERRIER mit Berücksichtigung auf ihre Eigenbewegung* (Vierteljahrsschrift der Astron. Ges. **16**, 1881, p. 9 ff.). — Für η Tauri und β Scorpii, deren Eigenbewegungen sehr klein sind, habe ich den Sternkatalog von BRADLEY benützt, und zwar ohne Rücksicht auf die Eigenbewegung. — Bei der Berechnung habe ich überall die wirkliche Neigung der Ekliptik angewandt. Bei Anwendung von dem Ptolemaischen Neigungswert wäre nur die Länge des Sirius merkbar verändert worden, und zwar um 2′ verkleinert.

Längen-

Beobachter	Timocharis				Hipparch	
Jahr Nabonassar	454		465		619	
η Tauri			29°30′ (28°9′)	+81′		
Sirius						
Regulus					119°50′ (120°21′)	÷31
Spica	c. 172°0′ / 172°20′ (171°57′)	+3′ / +23′	c. 172°0′ / 172°30′ (172°6′)	÷6′ / +24′	c. 174°0′ (174°15′)	÷15
β Scorpii	212°0′ (211°12′)	+48′				

Battani dem Menelaos zuschreibt, die sich aber in Ptolemaios' Syntaxis nicht finden; denn mit der Ptolemaischen Präcession mufs die den 41 Jahren zwischen Menelaos und Ptolemaios entsprechende Längendifferenz 24′ 36″ (rund 25′) betragen. Das stimmt bei Spica und β Scorpionis, aber keineswegs bei Sirius und Regulus. Folglich sind Menelaos' Bestimmungen dieser 2 Sterne jedenfalls nicht aus einem Werk von Ptolemaios entnommen. Auch ist die Möglichkeit ausgeschlossen, dafs Al-Battani diese zwei Bestimmungen durch Zurückführung der Längen in Ptolemaios' Verzeichnis auf das Jahr 845 erhalten hat; denn jedenfalls würde er dann nicht in dem einen Falle 20′, im anderen 40′ subtrahiert haben. Auch die Möglichkeit, dafs dieser Widerspruch durch Varianten im Text der *Syntaxis* hervorgerufen sei, scheint ausgeschlossen zu sein, erstens weil weder bei Halma noch bei Heiberg solche vorliegen, zweitens wegen folgendem Passus bei Al-Sufi[1]): »J'ai vu beaucoup d'exemplaires de l'Almageste, et j'ai trouvé qu'ils différaient dans la position d'un grand nombre d'étoiles. J'ai cherché ces mêmes étoiles dans le livre d'Albatenius, et parmi celles, qu'il prétend avoir observées, j'ai trouvé qu'il avait supprimé toutes les étoiles sur lesquelles il y a, dans les exemplaires de l'Almageste, la moindre différence«; und endlich ist auch die Möglichkeit, dafs Varianten im Text des Al-Battani die Differenz verschuldet haben, ausgeschlossen, denn die zwei Reihen von Bestimmungen, die Al-Battani dem Menelaos und sich selbst beilegt, haben überall die von Al-Battani angegebene Längendifferenz von 11° 50′. Es bleibt somit, wie mir scheint, nichts anderes übrig als die Annahme, dafs Al-Battani in der That eine uns ganz unbekannte Quelle mit Nachrichten über Sternbestimmungen

1) Caussin, l. c. p. 241. — Schjellerup, l. c. p. 30.

tafel.

Agrippa		Menelaos		Ptolemaios		Al-Battani	
840		845		886		1627	
33°15′ (33°24′)	÷ 9′			33°40′ (34°3′)	÷ 23′		
		77°0′ (77°58′)	÷ 58′	77°40′ (78°32′)	÷ 52′	88°50′ (88°39′)	+ 11′
		122°10′ (123°30′)	÷ 80′	122°30′ (124°5′)	÷ 95′	134°0′ (134°16′)	÷ 16′
		176°15′ (177°25′)	÷ 70′	176°40′ (177°59′)	÷ 79′		
		215°55′ (216°40′)	÷ 45′	216°20′ (217°14′)	÷ 54′	227°45′ (227°31′)	+ 14′

von Menelaos vor sich gehabt, oder aber, dafs er die Längenbestimmungen von Regulus und Sirius, die er dem Menelaos beilegt, fälschlich untergeschoben hat. An die letzte Möglichkeit glaube ich aber deswegen nicht, weil Al-Sufi, der Al-Battani scharf kritisiert, und die anderen älteren Astronomen, Al-Battanis Zeitgenossen und Mitarbeiter, sicher die Fälschung entdeckt und dann kaum gegen die Autorität eines Ptolemaios die neue Präcession als richtig angenommen hätten. Endlich würde er, wenn er in grofsem Umfang gepfuscht hätte, wohl auch eine Spicaobservation von ihm selbst den drei anderen hinzugefügt haben, nnd lieber seine eigenen Observationen, die man nicht kontrollieren konnte, gefälscht haben. Wir bemerken nebenbei, dafs Al-Battani seine eigenen Observationen, die übrigens sehr gut sind, offenbar klug abgerundet, oder wenigstens aus einer gröfseren Reihe von Observationen als für seinen Zweck besonders geeignet ausgewählt hat, um die konstante Längendifferenz von 11° 50′ hervorzubringen, ferner dafs die immer noch fehlerhafte Präcession von Al-Battani durch die fehlerhaften Bestimmungen des Menelaos (vgl. die Tafel) hervorgebracht sind, während eine Präcessionsbestimmung nach den Regulusbeobachtungen von Hipparch und Al-Battani den ungefähr richtigen Wert von 1° in $71^{13}/_{85}$ Jahren gegeben hätte.

Da ich wegen der vorhergehenden Auseinandersetzung bis auf weiteres annehmen mufs, dafs Al-Battani in der That entweder ein astronomisches Werk von Menelaos, oder wenigstens Nachrichten, die wir nicht kennen, über ein solches besafs, habe ich gesucht, ob nicht andere Spuren solcher Urkunden zu finden seien. Es ist mir bis jetzt nur gelungen, eine sehr wenig sagende Nachricht in Haji-Khalfa[1]) zu finden. In einer Reihe

1) Haji-Khalfa, ed. Flügel III, 471.

von Büchern(?), Aufschriften o. dgl., die alle »observationes astronomicae« enthalten, steht als letzte Nummer: »Rasd-Málâuus observationes astronomicae a Menelao Romae anno 854, 515 annos ante aeram islamiticam factae«. Bezieht dieser Bericht sich einfach auf die in der *Syntaxis* zitierten Beobachtungen vom Jahre 845?

Nun ist die Frage: welcher Art waren die Nachrichten, die Al-Battani von Menelaos' Beobachtungen besafs, und welchen Umfang hatte Menelaos' Werk?

Zuerst steht es, wenn Al-Battanis Bericht richtig ist, fest, dafs Al-Sufis Behauptung, Ptolemaios habe einfach 25′ zu den Längen in Menelaos' Katalog addiert, auf Konjektur beruht, was wir schon annahmen, ferner dafs *Al-Battani kein eigentliches Fixsternverzeichnis des Menelaos in ähnlichem Umfang wie das des Ptolemaios besafs;* dann würde er, der zu Menelaos' Beobachtungen so grofses Vertrauen hatte, diese Thatsache nicht verschwiegen und namentlich nicht Ptolemaios' Katalog zur Herstellung seines eigenen verwendet haben. Jedoch ist die Anzahl von Menelaos' Bestimmungen wahrscheinlich eine beträchtliche gewesen. Die 4 Bestimmungen sammeln sich nämlich weder um die Ekliptik (denn Sirius ist mit einbezogen), noch beziehen sie sich allein auf die gröfsten Sterne (denn β Scorpionis ist nach Ptolemaios von dritter Gröfse), ferner haben Ptolemaios und Al-Battani offenbar aus den ihnen zur Verfügung stehenden Bestimmungen des Menelaos nur die einzelnen, für die sie eben Gebrauch hatten, herausgegriffen. Möglich ist es auch, dafs Menelaos' Bestimmungen des Regulus und Sirius sich ursprünglich auf ein anderes Jahr als die in der *Syntaxis* zitierten bezogen; es würde dies wenigstens mit Al-Battanis Worten »debuerat esse«[1]), so wie auch mit der Thatsache, dafs Al-Battani die Beobachtungen des Menelaos aus zwei verschiedenen Quellen genommen, übereinstimmen. Finden wir vielleicht hier die Erklärung des Jahres 854 in Haji-Khalfa? (vgl. oben).

Es sind dies Fragen, zu deren Beantwortung ich vorläufig die genügenden Urkunden vermisse, so namentlich Al-Battanis Fixsternverzeichnis.

Es liegt noch ein dunkler Punkt vor, und zwar folgender: wie hat Al-Battani seinen Katalog hergestellt? In Al-Battanis Text kommt nämlich ein Fehler vor. Er sagt (vgl. oben), dafs er sein Verzeichnis durch Addition von $11^0\ ^1/_2\ ^1/_3$ (d. h. $11^0\ 50'$) zu den Ptolemaischen Längen hergestellt hat. $11^0\ 50'$ war aber die Längendifferenz zwischen Menelaos

1) In diesem Falle hat Al-Battani vielleicht die Beobachtungen des Menelaos um einige Minuten korrigiert, was jedoch unsere obigen Schlufsfolgerungen nicht beeinträchtigt

und AL-BATTANI, während die zwischen PTOLEMAIOS und AL-BATTANI nach der Berechnung des letzteren nur c. 11° 10′ betragen kann. Es stimmt dies auch mit der Angabe von AL-SUFI[1]): „Il (AL-BATTANI) dit aussi avoir trouvé que l'addition à faire à la longitude de chaque étoile, pour l'intervalle entre PTOLEMÉE et le temps, où lui-même observait, était de 11° 10′." Dafs AL-BATTANI diesen Wert gebraucht hat, mufs ich jedoch vorläufig in Abrede stellen. Es wäre doch viel natürlicher gewesen, wie AL-SUFI die Längen in der *Syntaxis* zum Beobachtungsjahr des MENELAOS zu reduzieren, d. h. c. 25′ abzuziehen, und dann die 11° 50′ hinzuzufügen, da AL-BATTANI ja doch zu den Längen in der *Syntaxis* kein Vertrauen haben konnte. Zur endgiltigen Entscheidung dieser Frage fehlen mir wieder die notwendigen Urkunden.

Noch eine Frage kann ich nicht umhin zum Schlufs aufzuwerfen, nämlich was wir aus dem Bericht des AL-BATTANI in Bezug auf PTOLEMAIOS' Fixsternbeobachtungen und Fixsternkatalog folgern können.

Schon lange hat man ja gegen PTOLEMAIOS' Verfahren Verdacht gehegt, namentlich weil es ihm gelungen ist, so viele genau übereinstimmende Beweise für die falsche Präcessionsberechnung zu sammeln. Die bisher üblichen Erklärungen dieser verdächtigen Thatsache bedürfen aber einer Korrektur, schon deswegen, weil es Herrn BOLL gelungen ist, nachzuweisen, dafs HIPPARCHS Fixsternverzeichnis weniger Sternbestimmungen enthielt als das des PTOLEMAIOS, so dafs letzteres nicht eine lediglich korrigierte Abschrift des ersteren sein kann.

Auch werfen, wie ich glaube, die zwei bei AL-BATTANI gefundenen Bestimmungen des MENELAOS (Sirius und Regulus) ein scharfes Licht auf PTOLEMAIOS' Thätigkeit, und zwar in der Richtung, dafs TANNERYS[2]) Auseinandersetzung an mehreren Punkten bestätigt wird, und nur an einzelnen einer Abänderung bedarf.

Zuerst wird man, wenn man die obige Tafel genauer untersucht, kaum leugnen können, dafs es wahrscheinlich, wie TANNERY andeutet, MENELAOS ist, der insofern die falsche Präcessionsbestimmung verschuldet hat, als er der erste war, dessen Bestimmungen ziemlich grofse Abweichungen von der Wirklichkeit, und zwar in einer bestimmten Richtung aufwiesen. Es scheint, dafs er in seine Berechnungsmethode falsche Elemente eingeführt hat, so dafs alle seine Längenbestimmungen beträchtlich zu klein wurden. Die Fehler schwanken, wie die Tafel zeigt, zwischen ÷ 45′ und ÷ 80′. Obwohl die Sache einer genaueren Erörterung bedarf, so wird man doch wohl schon jetzt feststellen können, dafs TANNERY mit der An-

1) CAUSSIN, l. c. p. 242. — SCHJELLERUP, l. c. p. 30.
2) P. TANNERY, *L'astronomie ancienne* p. 264—270.

nahme Recht hat, dafs Menelaos (aber nicht Agrippa, wenn aus dem einzigen Beispiel unserer Tafel ein Schlufs erlaubt ist) durch die Anwendung der Sonne, oder was auf dasselbe herauskommt, des Mondes, zur Längenbestimmung der Fixsterne den Fehler verschuldet hat, weil er die Länge des tropischen Jahres nicht genügend beachtet hat.

Den grofsen Ptolemaios dagegen trifft ein ernsterer Tadel. Ein Blick auf die obige Tafel zeigt, dafs die Fehler, die bei den Vorgängern vorkommen, sich immer wieder bei Ptolemaios finden, nur wegen der Annahme einer falschen Präcession mehr oder weniger vermehrt, je nach dem Zeitabstand zwischen ihm selbst und dem betreffenden Vorgänger. Kommt nun hierzu der für Ptolemaios' Zuverlässigkeit sehr bedenkliche Umstand, dafs er bei dem Hauptbeispiel seiner Präcessionsberechnung (Regulus) eine zwischen den zwei dabei angewandten Beobachtungen vorgenommene, aber mit diesen nicht übereinstimmende unterdrückt hat, so wird mit Grund der Verdacht rege, dafs sein Fixsternkatalog eine unkritische Kompilation der Arbeiten mehrerer Vorgänger, und die Präcessionsberechnung ein Resultat von geschickter Pfuscherei ist.

Ich denke mir den Vorgang ungefähr so: zuerst hat Ptolemaios zwischen verschiedenen Vermutungen, die Hipparch in Bezug auf die Gröfse der Präcession ausgesprochen hat (vgl. Tannery S. 266—267), geschwankt, ist dann durch Betrachtung der sicher ehrlichen obwohl keineswegs guten Bestimmungen des Menelaos bei dem unteren von Hipparch bezeichneten Grenzwert (36″ in einem Jahr, oder 1° in 100 Jahren) geblieben, hat in der Regulusbeobachtung den Fehler des Menelaos treu nachgeahmt, und nachdem er auf diese Weise sich seine vorgefafste Annahme zurechtgelegt hat, ist es ihm gelungen durch sorgfältige Auswahl aller Beispiele, die mit einigen Kunstgriffen sich als Beweise gebrauchen liefsen, und durch sorgfältige Unterdrückung aller Bestimmungen, die andere Resultate ergaben, die falsche Präcessionsbestimmung für eine Reihe von Jahrhunderten zu stabilieren.

Die Spicaobservationen von Timocharis, die er mit der des Menelaos vergleicht, hat er wahrscheinlich geschickt korrigiert (vgl. Tannery S. 266); die annähernde Angabe der Spicalänge von Hipparch hat er wahrscheinlich nicht durch die genaue aus Hipparchs Tafel ersetzt, weil es ihm so pafste.[1] Die Länge endlich, die Ptolemaios der Spica in seinem Verzeichnisse beilegt, ist dann nach Menelaos' Observation ohne genauere Prüfung angesetzt.

Was den Regulus betrifft, so hat Ptolemaios die Observation des

1) Bemerkenswert ist dabei, dafs die Präcession, die sich aus den annähernden Bestimmungen von Timocharis (172°) und Hipparch (174°) ergiebt, ziemlich zutreffend ist. Vgl. Tannery, l. c. p. 265—266.

Menelaos unterdrückt, weil sie, mit der Länge ans Hipparchs Katalog verglichen, eine Präcession von nur c. 97 Jahren giebt. Zur rechten Zeit stellt sich dagegen seine eigene Regulusbeobachtnng ein, die ganz mit der angenommenen Präcession stimmt.[1])

Bei β Scorpionis ist Ptolemaios' Verfahren wahrscheinlich umgekehrt. Hier wird Menelaos' Längenbestimmung gebrancht und mit einer passenden Observation von Timocharis verglichen, wahrscheinlich nicht genau passende Länge von Hipparchs Katalog dagegen unterdrückt.

Bei η Tauri ist dasselbe der Fall, nur dafs diesmal eine Observation von Agrippa znm Vergleich mit einer von Timocharis pafst. Die Länge nach Hipparch (vielleicht auch die nach Menelaos) wird unterdrückt, nnd die Länge in Ptolemaios' Katalog nach Agrippas Bestimmung genommen.

Beim Sirius können wir Ptolemaios' Verfahren nicht verfolgen. Wir sehen nur, dafs er die Längenbestimmung von Menelaos nicht angewandt hat. In diesem Fall hat er wahrscheinlich zu Hipparchs Länge die notwendigen 2° 40′ hinzugefügt. Überhanpt mufs dies sein Verfahren in den meisten Fällen gewesen sein (vgl. Ptolemaios, ed. Halma II p. 13); in wie vielen nnd welchen Fällen Abweichnngen vorkommen, können wir freilich nicht kontrollieren.

Es ist nötig zum Schlufs zu wiederholen, dafs alle diese Mutmassungen bis jetzt ausschliefslich auf dem Bericht des Al-Battani beruhen und von der Glanbwürdigkeit abhängen, die man jenem beimifst, dafs sie aber gerechtfertigt werden von der Thatsache, dafs in Ptolemaios' 7. Buch vieles nicht in Ordnung sein kann.

Haben wir aber vorläufig keinen Grund dem Al-Battani die Erfindung von angeblichen Bestimmungen des Menelaos zuzutrauen, so läfst sich noch ein anderer Schlnfs ziehen, und zwar der, dafs Ptolemaios' Fixsternkatalog als eine Kompilation der Arbeiten mehrerer zu verschiedenen Zeiten lebenden Vorgänger, deren Längenbestimmungen wegen der falschen Präcessionsannahme um verschiedene und auf verschiedene Weise fehlerhafte Differenzen vermehrt werden, nnd aufserdem eine Kompilation, die um einen gröfseren oder kleineren Zusatz eigener Bestimmungen vermehrt worden ist, nie ein einheitlicher Sternkatalog werden konnte, so dafs er thatsächlich für *keine* bestimmte Zeit giltig ist.

Deswegen stand Ptolemaios' Katalog ohne Zweifel weit hinter dem des Hipparch zurück, wenn er auch c. 200 Sterne mehr als letzterer enthielt; und der Ruhm eine Anzahl kleinerer Sterne in den schon fertigen

1) Diese Beobachtung ist die einzige seiner eigenen Längenbeobachtungen, die Ptolemaios überhaupt erklärt.

Apparat hineingefügt zu haben, tilgt nicht die Schuld, die Arbeiten der Vorgänger unkritisch in einander verwickelt zu haben.

Dadurch entstand eine nie kontrollierbare Verwirrung (mit der die Araber, wie wir sahen, zu kämpfen hatten), die um so schlimmer ist, weil die sichere Manier des Kompilators die früheren ehrlichen und für uns darum unschätzbaren Arbeiten unterdrücken half.

Die Logistik des Johannes Buteo.

Von G. Wertheim in Frankfurt a. M.

Der französische Mathematiker Johannes Buteo (1492—1572) ist bis jetzt nur wegen seiner geometrischen Leistungen[1]) gewürdigt worden, während seine Arithmetik[2]) kaum Beachtung gefunden hat. G. Eneström freilich erwähnt ihrer in einer Bemerkung zur Note des Herrn Paul Tannery *L'extraction des racines carrées d'après Nicolas Chuquet*[3]), und hebt hervor, dafs sie eine Darstellung der Wurzelausziehungsmethode von Chuquet enthalte. Moritz Cantor kennt Buteos Arithmetik nur von Hörensagen. Er schreibt Bd. II, S. 561 seiner *Vorlesungen*: „In der Logistik sollen sämtliche mit vier Würfeln überhaupt möglichen Würfe aufgezählt und Schlüssel mit Buchstabenversetzungen beschrieben sein, Aufgaben von der Art derer, mit welchen Cardano und Tartaglia sich beschäftigten." Die Logistik ist aber nach meinem Dafürhalten das originellste und interessanteste des drei Werke Buteos, welche gedruckt[4]) worden sind, und deshalb sei es mir gestattet, nachstehend einige nähere Mitteilungen über ihren Inhalt zu machen.

Das *erste* der fünf Bücher, in die das Werk zerfällt, giebt in der Einleitung nach einer Erörterung über die Wichtigkeit des Rechnens den Ursprung des Wortes „calculator". Es folgen dann Bemerkungen über das Fingerrechnen und über die bedeutendsten logistischen Schriftsteller des Altertums: als solche sieht Buteo Archimedes wegen seiner Sandrechnung und den von Eutokius in seinem Kommentar zur Kreisrechnung des Archimedes genannten Magnus[5]) an. Er fügt hinzu, dafs die Schriften über die Rechenkunst untergegangen seien, und dafs diese Kunst

1) Seine geometrischen Werke sind: *Opera geometrica* (Lugduni 1554) und *De quadratura circuli libri duo* (Lugduni 1559).

2) *Logistica quae & Arithmetica vulgo dicitur in libros quinque digesta* (Lugduni 1559. Mein Exemplar des Werkes trägt die Jahreszahl 1560).

3) Biblioth. Mathem. 1887, p. 18—19.

4) Buteo hat auch einige Werke im Manuskript hinterlassen, u. a. eine Übersetzung von 12 Büchern Euklids.

5) Vgl. Archimedes, *Opera* ed. Heiberg III, 302.

selbst vielleicht von demselben Schicksale ereilt wäre, wenn nicht der Fleifs des arabischen Volkes sie uns erhalten hätte. Weiter giebt er den Unterschied zwischen Logistik und Arithmetik und geht dann zum Rechnen selbst über.

Er lehrt die Darstellung der Zahlen durch die neun Ziffern $1, 2, \ldots, 9$ und die Null, die er nach ihrer Form *Omikron* nennt, und die vier Grundrechnungsarten. Die Subtraktion wird nach zwei Methoden gelehrt. Nach der ersten Methode wird der Minuend um den Subtrahend vermindert, nach der zweiten der Subtrahend so vergrössert, dafs der Minuend sich ergiebt; bei diesem letzteren Verfahren wird immer durch den Wert 10 hindurchgegangen. Die zweite Methode, sagt Buteo, scheine auf den ersten Blick weniger klar als die erste, sei aber leichter in der Ausführung. Bei der Multiplikation und Division lehrt er die Neunerprobe; die Siebenerprobe wird als weniger einfach nur kurz erwähnt. Den Schlufs des ersten Buches bildet die Summierung einiger Reihen. Von den arithmetischen Reihen behandelt er nur die Reihe der natürlichen Zahlen, die der ungeraden uud die der geraden Zahlen. Bei den geometrischen Reihen beschränkt er sich auf die mit dem Quotienten 2; die übrigen zu behandeln, sei überflüssig, denn sie kämen selten vor, und wenn das einmal geschehe, solle man die Summe durch gewöhnliche Addition bestimmen.

Im *zweiten* Buch wird nach Erledigung der Bruchrechnung (S. 47—67) zunächst die Ausziehung der Quadratwurzeln nach dem auf dem binomischen Satz beruhenden Verfahren gelehrt, auch darauf aufmerksam gemacht, dafs eine Zahl keine Quadratzahl sein kann, wenn ihre letzte Ziffer 2, 3, 7 oder 8 ist, oder wenn die letzte Ziffer 5 und zugleich die vorletzte von 2 verschieden ist. Nach einigen Bemerkungen über die Quadratwurzeln von Brüchen wendet sich dann Buteo zu der angenäherten Berechnung irrationaler Quadratwurzeln, für die er zwei Methoden darlegt: Erstens schlägt er das bekannte Verfahren vor, welches wir durch die Formel

$$\sqrt{a^2 + r} \sim a + \frac{r}{2a}$$

und weiter durch

$$\sqrt{a^2 + r} \sim a + \frac{r}{2a} - \frac{\left(\frac{r}{2a}\right)^2}{2\left(a + \frac{r}{2a}\right)}$$

ausdrücken. Zweitens wendet er die von Nicolas Chuquet erfundene Methode[1]) an, die er nicht aus Chuquet selbst, sondern aus dem

1) *Triparty en la science des nombres*; Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **13**, 1880, p. 697.

Werke von dessen Abschreiber ESTIENNE DE LA ROCHE[1]) kennen gelernt hat.

Was die Ausziehung der Kubikwurzeln (S. 79) betrifft, so bestimmt BUTEO nach Einteilung der vorgelegten Zahl in Klassen von je drei Ziffern (durch die Abteilungspunkte) nur die erste Ziffer der Wurzel. Das Weitere, erklärt er, sei so mühselig, daſs man besser thue, die Zahl in einer möglichst weit ausgedehnten Tabelle der Kubikzahlen nachzuschlagen. Er giebt dann die Kuben der Zahlen von 2 bis 40 und wendet diese Tabelle auf zwei Beispiele an.

Die angenäherte Berechnung irrationaler Kubikwurzeln lehrt er durch ein Verfahren, das sich durch wiederholte Anwendung der Formel

$$\sqrt[3]{a^3 + r} \sim a + \frac{r}{3a^2 + 3a}$$

ausdrücken läſst, wo a aus der Tabelle entnommen werden soll.

Weiter handelt das Buch von den Verhältnissen und deren Vereinigungen (S. 85—109). An die letzte Aufgabe dieses Abschnittes: Zu drei gegebenen Zahlen die vierte Proportionale zu finden — schlieſst sich naturgemäſs die Lehre vom falschen Ansatz (S. 109—116), und zwar wird sowohl der einfache (Regula positionis), als auch der doppelte (regula positionis duplae) behandelt. Der letztere wird dadurch auf den ersteren zurückgeführt, daſs nicht die beiden Fehler selbst mit den angenommenen beiden Zahlen in Verbindung gebracht werden, sondern daſs eine Proportion hergestellt wird, in der die Differenz der Zahlen, diejenige der Fehler und einer der Fehler die bekannten Glieder sind; das vierte Glied giebt dann an, um wieviel die dem Fehler entsprechende Zahl vermehrt oder vermindert werden muſs, damit der wahre Wert der gesuchten Zahl sich ergebe. Es ist das bekanntlich die erste der beiden Methoden, welche LEONARDO PISANO[2]) für den doppelten falschen Ansatz gelehrt hat.

Das *dritte* Buch (S. 117—196) behandelt die *Algebra*, oder, wie BUTEO sagt, die *Quadratur*; denn die Bestimmung der Unbekannten ist ihm nichts als die Bestimmung einer Seite eines Quadrats, eines Rechtecks, eines Würfels. Die Ausdrücke *res*, *census* etc. hält er für irreführend. Er bedient sich dafür der Ausdrücke Linie, Quadrat, Würfel und bezeichnet diese beziehungsweise mit ϱ, ◇, ⧈. Vor diese Zeichen werden

1) *Larismethique nouvellement composée par maitre* ESTIENNE DE LA ROCHE etc. (Lyon 1520), fol. 32. BUTEO nennt STEPHANUS À RUPE Lugdunensis an verschiedenen Stellen, ebenso den LUCAS ITALUS (PACIUOLO), dessen *Summa* er sehr schätzt, obgleich er öfter gegen ihn polemisiert, freilich ohne jemals gehässig zu werden, wie er es gegen HIERONIMUS CARDANUS und MICHEL STIFEL ist, denen er u. a. die wenig bescheidenen Titel ihrer Werke (*Opus perfectum* und *Arithmetica integra*) vorwirft.

2) *Liber Abbaci*, ed. BONCOMPAGNI, S. 318.

die etwaigen Koeffizienten gesetzt. Aufserdem werden noch die Buchstaben *P* (plus) und *M* (minus) benutzt, sowohl als Operations- wie als Vorzeichen. Er übt S. 123—137 den Gebrauch dieser verschiedenen Zeichen ein. Er multipliziert z. B. 3 ϱ *M* 5 ◇ mit 2 ϱ *P* 4 und erhält *M* 14 ◇ *M* 10 ⧈ *P* 12 ϱ; er dividiert *M* 24 ⧈ durch *P* 4 ϱ und erhält *M* 6 ◇.

Nach diesen Vorbemerkungen wendet er sich zu den vier Kanones, einem einfachen und drei zusammengesetzten, die er der Reihe nach an Aufgaben erläutert. Was zunächst den einfachen betrifft, der sich auf die Gleichungen ersten Grades und auf die binomischen Gleichungen höherer Grade bezieht, so führt Buteo beide Arten auf die Formen zurück, welche wir durch $ax = b$, $x^n = a$ ausdrücken würden. Die zu dieser Zurückführung benutzte Transposition von Gliedern nennt er *„aequatio“*, die Wegschaffung von Nennern *„aequatio secunda“*.[1]) Die Seiten der Gleichung sind ihm beziehungsweise das *Continens* und das *Contentum*, welche Ausdrücke von dem Rechteck hergenommen sind, dessen Inhalt (*Contentum*) und eine Seite er bei den Gleichungen ersten Grades als gegeben ansieht, während die andere Seite ϱ gesucht wird. Zwischen das *Continens* und das *Contentum* setzt er, so lange die Gleichung noch nicht auf die einfachste Form gebracht, das *Contentum* also noch nicht rein erhalten ist, das Zeichen [, den Anfang eines Rechtecks; später wird das *Contentum* in das Zeichen [ ] eingeschlossen. Buteo schreibt also[2]) 3 ϱ *M* 7 [8 und folgert 3 ϱ [15], 1 ϱ [5], ebenso ¼ ◇ [100, folglich 1 ◇ [400], 1 ϱ [20]. Nach dem ersten Kanon werden 38 Textaufgaben mit vollständiger Lösung gegeben, von denen 2 hier folgen mögen, um Buteos Verfahren zu veranschaulichen:

Aufgabe 12 (S. 152). Die Zahl 40 in drei Teile zu teilen, von denen der erste um 4 gröfser als das Doppelte des zweiten und der zweite um 2 kleiner als das Doppelte des dritten sei.

1) An einigen wenigen Stellen seines Werkes fällt Buteo aus der Rolle und wendet das Wort „aequatio“ in unserem Sinne (Gleichung) an.

2) Welche Wichtigkeit Buteo seiner Auffassung der Sache beilegt, geht am besten aus folgender Stelle (S. 140) hervor:

Haec autem cognitio sane quam plurimum ad intelligentiam rerum habet momenti. Quod tamen scriptorum nullus, quem adhuc viderim, declaravit. Sed quod ego secundum rei veritatem dixi, continens 8 et contentum 24, omnes uno ore dicerent, 8 res esse equales numero 24. Quo nihil unquam falsum magis aut absurdum dici possit, nec quod legentium mentem a vero sensu magis avertat. Hoc expertus testor verissime. Nam cum omni praeceptorum copia destitutus et in Geometricis et in Logisticis me semper ipso docuerim, nihil unquam in hisce literis scrutatus inveni, quod intelligentiam meam neque tam misere, neque tam diu torqueret, quam iste fecit abusus loquendi. Non igitur ignarus mali (ut cum poeta dicam miseris succurrere disco.

Wird der dritte Teil gleich 1ϱ gesetzt, so ist der zweite $2\varrho\ M2$ und der erste $4\varrho\ M4\ P4$, folglich $7\varrho\ M6\ P4$ [40. Daraus folgt $7\varrho\ M2$ [40, 7ϱ [42], 1ϱ [6]. Die Teile sind also 6, 10, 24.

Aufgabe 36 (S. 169). Eine Zahl von der Beschaffenheit zu finden, daſs wenn man sie mit ihrer Hälfte und das Produkt mit dem Viertel der Zahl multipliziert und zu dem letzten Produkt 2 addiert, die Summe 218 sei.

Wird die Zahl gleich 1ϱ gesetzt, so ergiebt sich

$$\tfrac{1}{8}\square\ P2\ [218,$$

und daraus folgt

$$\tfrac{1}{8}\square\ [216,$$
$$1\square\ [1728],$$
$$1\varrho\ [12].$$

Die gesuchte Zahl ist also 12.

Das dritte Buch enthält weiter die drei zusammengesetzten Fälle, d. i. die gemischt quadratischen Gleichungen, die aus drei Gliedern bestehen, dem Quadrat, der Linie und der bekannten Zahl. Das *Contentum* ist im ersten Falle die Zahl, im zweiten das Quadrat, im dritten die Linie:

Primus habet numerum, quadrato fine secundus
Clauditur, extremum concludit linea nobis.

Es sind also die Gleichungen, die in unserer Schreibweise lauten:

$$1)\ x^2 + ax = b;\quad 2)\ x^2 = ax + b;\quad 3)\ x^2 + b = ax.$$

Jeder dieser Fälle wird an einem Beispiel erläutert, auch beim dritten Fall auf das Vorhandensein zweier Wurzeln hingewiesen. Um das Verfahren für jeden Fall dem Gedächtnis einzuprägen, giebt Buteo Hexameter, die von denjenigen Paciuolos verschieden sind.

Den Schluſs des dritten Buches bilden Aufgaben, die durch Gleichungen mit mehreren Unbekannten, welche Buteo durch A, B, C, D bezeichnet, gelöst werden (*Regula quantitatis*, S. 189—196). Er setzt dabei stillschweigend voraus, daſs ganze Zahlen gesucht werden. Auch hier werde sein Verfahren durch ein Beispiel erläutert:

Aufgabe (S. 192). Drei Zahlen zu finden, von denen die erste mit der Hälfte, die zweite mit dem Drittel, die dritte mit dem Viertel der Summe der übrigen eine gegebene Zahl, etwa 17 ergebe.

Werden die gesuchten Zahlen $1A$, $1B$, $1C$ genannt, so soll

$$1A,\ \tfrac{1}{2}B,\ \tfrac{1}{2}C\ [17,$$
$$1B,\ \tfrac{1}{3}A,\ \tfrac{1}{3}C\ [17,$$
$$1C,\ \tfrac{1}{4}A,\ \tfrac{1}{4}B\ [17$$

sein, und durch die „Aequatio secunda“ (s. o.) ergeben sich hieraus die

drei Gleichungen

$$2A \cdot 1B \cdot 1C \;[34,$$
$$1A \cdot 3B \cdot 1C \;[51,$$
$$1A \cdot 1B \cdot 4C \;[68.$$

Wird die dritte derselben mit 2 multipliziert und die erste vom Resultat subtrahiert, so folgt

$$1B \cdot 7C \;[102.$$

Aus dieser Gleichung entnimmt Buteo durch die Division 102 : 7 und weiteres Probieren, dafs $1C$ [13], $1B$ [11], folglich $1A$ [5] sein mufs. Er lehrt aber auch, wie man weiter rechnen mufs, um zu einer Gleichung mit nur einer Unbekannten zu gelangen:

Er multipliziert nämlich die zweite der drei obigen Gleichungen mit 2 und subtrahiert vom Resultat die erste Gleichung. Das giebt

$$5B \cdot 1C \;[68,$$

und wenn man die vorletzte Gleichung mit 5 multipliziert, wodurch man

$$5B \cdot 35C \;[510$$

erhält, und davon die letzte, d. i. $5B \cdot 1C$ [68 subtrahiert, so bleibt

$$34C \;[442].$$

Hieraus folgt dann $1C$ [13], u. s. w.

Übrigens hält Buteo die Sache durchaus nicht für leicht. Er schliefst den Abschnitt mit den Worten:

Si cui modus iste calculi videatur obscurior in hac regula, cujus est etiam rarior usus, certo sciat alium communiter usurpatum longe plus afferre molestiae, multoque difficilius capi. Innata enim rebus ipsis obscuritas arte quidem levari potest, tolli autem nullo modo.

Das *vierte* Buch (S. 197—328) besteht aus 92 eingekleideten Aufgaben der verschiedensten Art, die ohne Algebra, meist durch Regeldetri, oder durch den doppelten falschen Ansatz, zum Teil auch durch Probieren gelöst werden. Buteo legt Gewicht darauf, nicht sowohl viele Aufgaben zu geben, als durch recht verschiedenartige den Geist zu schärfen.[1]) Dieses Buch enthält auch die oben in der Einleitung erwähnte, von Cantor berührte Aufgabe, die Zahl der verschiedenen Würfe zu bestimmen, die mit vier Würfen möglich seien (S. 305, Nr. 90). Diese Aufgabe wird von Buteo durchaus nicht durch blofse Aufzählung der Würfe, sondern durch ein gutes Schlufsverfahren gelöst. Er zeigt nämlich, dafs die Zahl der möglichen Würfe für 1, 2, 3, 4, .. Würfel beziehungsweise

$$6,\; 6+5+4+3+2+1 = 7 \cdot 3 = 21,$$

1) „Neque enim mercatores, sed Logiston instituo" (S. 198).

$21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 56, \; 56 + 35 + 20 + 10 + 4 + 1 = 126, \cdots$ ist.

Um zu zeigen, wie geschickt BUTEO zu Werke geht, lasse ich noch die Aufgabe 23 (S. 221) mit ihrer Lösung folgen:

Ein Spieler hat nach dem ersten (gewonnenen) Spiel 12 Goldgulden. Er gewinnt in demselben Verhältnis ein zweites und dann ein drittes Mal, indem er jedesmal sein ganzes Geld einsetzt. Nach dem dritten Spiel hat er 27 Goldgulden. Mit wieviel hat er angefangen zu spielen?

Es ist eine geometrische Reihe von 4 Gliedern zu bestimmen, deren zweites Glied 12 und deren viertes Glied 27 ist. Das dritte Glied mufs die mittlere Proportionale zwischen 12 und 27, d. i. die Quadratwurzel aus $12 \cdot 27 = 324$ sein. Das dritte Glied ist also 18. Das erste Glied ist dann die vierte Proportionale zu 27, 18, 12, und als solche ergiebt sich 8; oder, was einfacher ist, da jedes vorhergehende Glied der Reihe 12, 18, 27 dadurch aus dem folgenden entsteht, dafs man letzteres um $\frac{1}{3}$ seines Wertes vermindert, so mufs das erste Glied $12 - \frac{1}{3} \cdot 12 = 8$ sein. Der Spieler fing also mit 8 Goldgulden an zu spielen.

Das *fünfte* Buch (S. 329—386) besteht aus 67 eingekleideten Aufgaben, die durch Gleichungen ersten oder zweiten Grades gelöst werden. Die Ausdrücke *aequatio* und *aequatio secunda* haben bei gemischt quadratischen Gleichungen dieselbe Bedeutung wie bei Gleichungen ersten Grades. Nur ist zu bemerken, dafs die Division, durch welche der Koeffizient des Quadrats der Unbekannten gleich Eins gemacht wird, ebenfalls *aequatio secunda* genannt wird.

Als Beispiel wähle ich die Aufgabe 41 (S. 365). Jemand hat eine Anzahl Hühner, von denen jedes doppelt so viel Eier legt, als die Zahl der Hühner beträgt. Addiert man die Zahl der Hühner zu derjenigen der Eier, so erhält man 406. Wieviel Hühner waren es?

Wird die Zahl der Hühner gleich 1ρ gesetzt, so waren es 2◇ Eier, also 2◇ *P* 1ρ [406. Hieraus erhält man durch die Aequatio secunda 1◇ *P* $\frac{1}{2}$ρ [203], und dann liefert der erste Kanon für die Anzahl der Hühner 14.

Die vorstehende Analyse dürfte genügen zu zeigen, dafs die Logistik des Mönchs BUTEO ein ganz tüchtiges Werk ist, dafs der Verfasser das Ansehen verdiente, dessen er sich bei seinen Zeitgenossen erfreute, und dafs seine Oberen guten Grund gehabt haben, ihm zu erlauben, die freie Zeit, welche seine klösterlichen Pflichten ihm liefsen, der griechischen Sprache und dem EUKLID zu widmen und später sogar die Studien, die er im Kloster ohne jede Unterweisung begonnen hatte, auf der Pariser Universität zum Abschlufs zu bringen.

Galileo Galilei e Simone Mayr.

Di Antonio Favaro a Padova.

La „Société Hollandaise des sciences" di Harlem, alla quale mi onoro altissimamente di appartenere come „Membre étranger", poneva or non ha molto a concorso, con la scadenza al 1° gennaio 1900, il tema seguente: „On demande une étude comparée et critique des observations relatives aux satellites de Jupiter, mentionnées dans le *Nuncius Sidereus* de Galilei et le *Mundus Jovialis* de Simon Marius. On désire voir décider jusqu'à quel point l'accusation de plagiat portée par Galilée contre Marius peut être considerée comme fondée (Humboldt's *Kosmos*, II, p. 357)."

Intorno al quale quesito io mi permetterei di osservare auzitntto due cose: vale a dire che le osservazioni dei Pianeti Medicei sono qualche cosa più che *mentionnées* nel *Sidereus Nuncius* di Galileo e certamente in forma assai più perspicua che non nel *Mundus Jovialis* del Mayr; ed in secondo luogo che la citazione dell' Humboldt faceva ben presentire la opinione di chi poneva il quesito. D' altronde l'autorità dell' Humboldt, la quale viene quì in certo modo invocata, non deriva da nna discussione profonda che questi abbia fatta del delicato argomento, ma soltanto dalla affermazione, espressa anche in forma non del tutto assoluta, che si contiene nelle seguenti parole: „Die Monde des Jupiter wurden, wie es scheint, fast zugleich und ganz unabhängigerweise am 29. December 1609 von Simon Marius zu Ansbach und am 7. Januar von Galilei zu Padua entdeckt." A proposito della quale affermazione vogliamo subito notare che si passa completamente sotto silenzio una circostanza essenziale, vale a dire che, scrivendo ripetutamente il Mayr d'aver notata la sua prima osservazione il giorno 29 dicembre 1609 del calendario giuliano[1]), questo

1) *Mundus Iovialis anno M·DC·IX detectus ope perspicilli belgici, hoc est, quatuor Iovialium planetarum, cum theoria, tum tabulae, propriis observationibus maxime fundatae, ex quibus situs illorum ad Iovem, ad quodvis tempus datum promptissime et facilime supputari potest.* Inventore et authore Simone Mario Guntzenhusano, Marchionum Brandeburgensium in Franconia Mathematico, puriorisque Medicinae studioso. Cum gratia et privil. Sac. Caes. Majest. Sumptibus et typis Iohannis Lauri civis et bibliopolae Noribergensis. Anno M·DC·XIV, car. 20.ª *t*.

corrisponde all' 8 gennaio 1610 del calendario gregoriano seguito dai cattolici e quindi da GALILEO; cade per conseguenza qualsiasi pretesa di priorità, alla quale, non ostante certe dichiarazioni deferenti contenute nel corpo della scrittura, sembra pretendere il MAYR scrivendo nel frontespizio di essa „Mundus Iovialis Anno M·DC·IX detectus."[1])

Quale fosse del resto la opinione personale degli insigni uomini che proposero il quesito nei termini surriferiti, oltre che dalla citazione dell' HUMBOLDT, poteva anche presumersi da ciò che, essendosi offerta la occasione di dire del MAYR nella illustrazione al Carteggio di CRISTIANO HUYGENS, eransi espressi nei termini seguenti: „de son temps, on l'a pris pour un plagiaire de GALILÉE, qui à plusieurs reprises se défendit contre lui. D'après des recherches récentes, sa faute aurait été plutôt de publier ses travaux dans des livres peu connus ou édités trop tard, de sorte que la priorité lui échappa." E ciò veniva aggiunto in una nota come commento ad una dichiarazione assai significativa dell' HUYGENS istesso, il quale dolendosi in una lettera al BOULLIAU sotto il dì 14 maggio 1659 perchè gli si contestava da parte del Principe LEOPOLDO DE' MEDICI il merito d'aver per il primo applicato il pendolo all' orologio, esce a dire: „Mais enfin, Monsieur, que faut-il faire pour oster à ce Prince l'opinion qu'il semble avoir conceue de moy, comme si je m'attribuois l'invention d'autruy et que je ressemblois à ce SIMON MARIUS."[2]) Non dunque soltanto appresso i contemporanei, ma ancora mezzo secolo dopo era tenuto il MAYR, e da parte d'uno dei maggiori uomini del tempo, come il prototipo dei plagiarii.

Quali siano poi queste *„recherches récentes"* le quali possano infirmare il concorde giudizio portato in tempi più vicini al MAYR ed in tempi più vicini a noi per parte di studiosi tra i quali si annoverano pure avversarii dichiarati di GALILEO, confessiamo di ignorare. Infatti, tranne

1) Non è dunque vero ciò che scrive il MAYR: „sub ipsissimo fere tempus, vel aliquando citius quo GALILAEUS in Italia ea primum vidit, a me in Germania adinventa et observata fuisse" (*Mundus Iovialis*, ecc. car. 7.ª *t*). E per quel che può valere notiamo che la osservazione del 29 dicembre 1609 registrata del MAYR nei termini seguenti: „coepi annotare observationes quarum prima fuit die 29 decembris, quando tres eiusmodi stellae in linea recta a Iove versus occasum cernebantur" (*Mundus Iovialis*, ecc. car. 7.ª *r*) e in questi altri equivalenti: „prima fuit observatio 29 decembris anni 1609, quo die vesperi horam circiter quintam tres a Iove occidentales in linea cum ♃ quasi recta vidi" (*Mundus Iovialis*, ecc. car. 18.ª *r*), collima esattamente con quella raffigurata da GALILEO dell' 8 gennaio 1610 (*Sidereus Nuncius*, ecc. Venetiis, MDCX, car. 17 *t*).

2) *Oeuvres complètes de* CHRISTIAAN HUYGENS publiées par la Société Hollandaise des Sciences. Tome deuxième. Correspondance 1657—1659. La Haye, Nijhoff 1889, pag. 406.

qualche articolo biografico, nel quale la questione non poteva essere trattata ex professo, e come sarebbe stato richiesto per sradicare completamente una opinione così inveterata e concordemente espressa, confessiamo di non conoscere in argomento altra scrittura in favore del Mayr da quella in fuori d' un Dr. Julius Meyer „Oberlandesgerichtsrath in Ansbach"[1]) concittadino e fors' anco affine del Mayr, e nella quale ci sembra di ravvisare piuttosto una incompetente campanilesca apologia od una „Verwirrung des Patriotismus" che non una memoria scientifica propriamente detta. Lo stesso Wolf, dopo aver detto che il Mayr „war unter den ersten Beobachtern ... der Jupitermonde"[2]), lo difende molto timidamente e freddamente dal plagio, pur asserendo che in nessun modo gli riuscì di far valere i suoi diritti alla priorità della scoperta.[3])

Ma torniamo al concorso dal quale abbiamo preso le mosse. Intorno al risultato di esso ci informa l'Accademia suddetta nei termini seguenti: „Un mémoire a été envoyé en réponse à une des questions de concours dont le délai expirait le 1er janvier 1900. Il s'agit d'une étude historique et critique des premières observations sur les satellites de Jupiter, décrites par Galilée dans son célèbre traité „Nuncius Sidereus" et par Simon Marius dans son „Mundus Iovialis". Cette étude devait élucider si oui ou non l'accusation de plagiat, portée en termes très-vifs par Galilée contre Simon Marius, était fondée. Le volumineux mémoire envoyé en réponse, 235 pages in folio, écrites en langue allemande, fut successivement soumis à MM. J. A. C. Oudemans à Utrecht, E. F. van de Sande Bakhuyzen à Leyde et J. C. Kapteyn à Groningue. La lecture des rapports émis montre que les membres du jury ont été amenés à examiner eux-mêmes la question posée, ce qui n'a pu laisser de leur coûter un long travail. Les trois rapporteurs conclurent de même: les accusations de Galilée n'ont aucun fondement sérieux. Pour ce qui concerne le mémoire presenté, en dépit du zèle dont l'auteur a fait preuve, un jugement partial et souvent aussi des recherches incomplètes l'ont mis sur une fausse voie, et conduit à tort à un résultat opposé. D'ailleurs, l'étude trop superficielle de certains points de première importance suffirait déjà à ne pas permettre de couronner ce mémoire. Conformément à cet avis unanime des rapporteurs, et sur la proposition des directeurs, l'assemblée décida de ne pas décerner le prix."

Nel complesso adunque il concorso aveva avuto per risultato di for-

1) *Osiander und Marius* von Dr. Julius Meyer (Jahresbericht d. historischen Vereins f. Mittelfranken 44, Ansbach 1892, p. 59—71).

2) *Geschichte der Astronomie* von Rudolf Wolf. München 1877, p. 318.

3) Op. cit., p. 401—402.

nire delle conclusioni precisamente contrarie a quelle che, a quanto sembra, la „Société Hollandaise des Sciences" si attendeva.

I termini però nei quali il giudizio è pronunziato si prestano a considerazioni d'ordine scientifico di duplice natura. Esso riflette infatti da un lato l'unica e ponderosa memoria presentata al concorso, e circa il merito della quale conviene naturalmente rimettersene ai giudici che la esaminarono; ma dall'altro, poichè è detto che i giudici stessi furono indotti ad esaminare essi stessi la questione proposta ed a risolverla anco unanimemente in senso favorevole al Mayr, si tratta di nuovi studi e lavori i quali, avendo condotto a risultati che io mi permetto di considerare siccome *nuovi*, non è giusto che vadano perduti per la storia della scienza.

E il precipuo motivo che m' indusse a richiamare pubblicamente l'attenzione sopra questo argomento, nel periodico che è fra tutti il più adatto a trattare questioni di tale ordine, trova la sua ragione di essere nel desiderio, che certamente sarà condiviso da un gran numero di studiosi, di vedere dato alla luce il lavoro nel quale, a giudicarne dalla mole, la questione deve essere stata trattata con grande ampiezza, come pure fatti di pubblica ragione i motivi che indussero gli egregi giudici a pronunziarsi in un modo che molti stimeranno in perfetta opposizione con ciò che fin quì erasi generalmente tenuto. Certamente nessuno fu guidato da preconcetti, come da nessun preconcetto sono guidato io nell' esprimere tale desiderio, ma soltanto dall' obiettivo certamente comune agli illustri miei colleghi della „Société Hollandaise des sciences": il trionfo della verità.

Über Huygens' Näherungsmethoden bei Kreis- und Logarithmen-Berechnung.

Von M. Koppe in Berlin.

I.

Ist einem Kreise ein reguläres Polygon von n Seiten eingeschrieben, ein eben solches umschrieben, und ist der zu einer Seite gehörige Bogen $= 2\alpha$, so benutzt Archimedes zur Kreisberechnung den Satz, dafs α zwischen $\sin \alpha$ und $\operatorname{tg} \alpha$ liegt, d. h. zwischen $\alpha - \frac{\alpha^3}{6}$ und $\alpha + \frac{\alpha^3}{3}$, wie wir heute aus Newtons Reihe wissen. Die beiden für $\pi = n\alpha$ entstehenden Grenzwerte unterscheiden sich vom wahren Wert um Gröfsen von der Ordnung n^{-2}.

Schon Snellius (1621) suchte dieses Verfahren ergiebiger zu machen, indem er von der Seite des letzten eingeschriebenen Polygons zu einem einfachen Näherungswert des Bogens überging durch die Formel

$$(\alpha) = \frac{3 \sin \alpha}{2 + \cos \alpha},$$

was entwickelt $= \alpha - \frac{\alpha^5}{180} + \cdots$ wird. Hiermit ergiebt sich π bis auf einen Fehler n^{-4}, also auf doppelt so viel Stellen wie bei Archimedes und auch bei Ludolf van Ceulen.

Huygens (1654)[1]) hält die Snelliusschen Beweise der Sätze über Grenzwerte nicht für streng; er ergänzt diese Lücke, und stellt selbst neue Grenzwerte auf, aus denen sich π sogar auf die 3fache Zahl von Stellen wie bei Archimedes ergiebt. Nach dem Résumé bei Rudio[2]) sollte man glauben, dafs diese Grenzwerte auch bewiesen sind. Das ist jedoch für

1) In der Schrift *De circuli magnitudine inventa*, d. h. „Entdeckungen über die Gröfse des Kreises“ und nicht „Über die gefundene Gröfse des Kreises“. Aus Huygens' Vorrede ergiebt sich, dafs er sich das Verdienst, die Gröfse des Kreises gefunden zu haben, nicht zuschreibt.

2) *Vier Abhandlungen über die Kreismessung* (1892), S. 40; daraus Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* II², S. 717. In Klügels *Mathematischem Wörterbuch*, Artikel Cyclotechnie, tritt der wahre Sachverhalt klar hervor.

den *unteren* der beiden *nahen* Grenzwerte nicht der Fall, er soll[1]) auf einer eingehenderen Untersuchung der Schwerpunkte beruhen, aber schon für den *oberen* war diese Untersuchung so verwickelt, dafs man nicht versucht hat, hier die von HUYGENS gelassene Lücke in seinem Sinne zu ergänzen. Nennen wir die obere für den Bogen 2α angegebene Grenze G, die untere g, ferner die verbesserte obere G', die untere g', ist ferner

$$s = \sin 2\alpha, \quad s' = 2 \sin \alpha, \quad t' = 2 \operatorname{tg} \alpha,$$

so beweist HUYGENS in Lehrs. VII und IX die Existenz folgender Grenzen:

$$g = s' + \tfrac{1}{3}(s' - s), \quad G = \tfrac{2}{3}s' + \tfrac{1}{3}t'.$$

Sie sind entwickelt:

$$g = 2\alpha - \tfrac{1}{15}\alpha^5 + \cdots, \quad G = 2\alpha + \tfrac{1}{10}\alpha^5.$$

Daraus ergiebt sich π bis auf eine Gröfse von der Ordnung n^{-4}. Übrigens ist das Mittel von g und G weniger genau als der Näherungswert des SNELLIUS.

Ferner entwickelt HUYGENS die neue obere Grenze

$$G' = s' + \frac{s' - s}{3} \frac{4s' + s}{2s' + 3s}$$

d. h. entwickelt:

$$G' = 2\alpha + 0 + 0 + \tfrac{19}{3150}\alpha^7.$$

Hierdurch nähert man sich π zwar bis auf n^{-6}, dafs dies aber geschah, konnte nur ein Vergleich mit LUDOLFS Rechenergebnis lehren. Denn die neue untere Grenze g' ist nicht bewiesen. Sie lautet

$$g' = s + \tfrac{10}{3} \frac{s' + s}{2s' + 3s + \frac{4}{3}(G' - g)} (s' - s),$$

das ist entwickelt

$$g' = 2\alpha + 0 + 0 - \tfrac{29}{4725}\alpha^7 + \cdots$$

Die Vereinigung von G' mit g' führt zu derselben Genauigkeit, die man heute durch die drei ersten Glieder der Reihe für arc sin x erhält.

II.

In der Logarithmenberechnung (1666)[2]) gelingt es HUYGENS gleichfalls, durch wiederholte Ausziehung von Quadratwurzeln, die er nur bis zur 32ten und 64ten Wurzel führt, Näherungswerte zu bilden, die sich nach

1) RUDIO, a. a. O. S. 127.

2) Siehe BERTRAND, *Sur la méthode de HUYGENS pour calculer les logarithmes;* Comptes rendus de l'acad. d. sc. de Paris 66, 1868, 565—567. — Vergl. CANTOR, *Vorlesungen* II², 747, wo es Zeile 5 des Textes von unten heifsen mufs „mit ($a - d$) vervielfacht", statt ($a - b$); der Fehler steht auch in Aufl. 1.

der ursprünglichen Definition der Logarithmen erst aus Wurzeln mit aufserordentlich hohem Exponenten ableiten lassen. Die Bedeutung seiner Vorschriften ist nicht ohne weiteres zu erkennen, ein Beweis fehlt. Er giebt übrigens hier nicht mehr, wie in der Cyklometrie im Anschlufs an die Alten, je *zwei Grenzwerte*, sondern *einen Näherungswert* an.

Ist $a = \sqrt[32]{10}$, $b = \sqrt[64]{10}$, ferner $f = \sqrt[32]{2}$, $g = \sqrt[64]{2}$, so werden die beiden Ausdrücke gebildet

$$\left(\frac{200a}{3 + 3a + 4b} + 40b - 3a - 3\right)\left(1 - \frac{1}{a}\right) \cdot a = aA,$$
$$\left(\frac{200f}{3 + 3f + 4g} + 40g - 3f - 3\right)\left(1 - \frac{1}{f}\right) \cdot a = aF,$$

die, abgesehen von dem besser abzuspaltenden Faktor a, gleichartig gebildet sind. In der Original-Vorschrift tritt noch eine Zahl $d = 10^{13}$ auf, weil die Dezimalbrüche für a, b, f, g als Quotienten ganzer Zahlen, $\frac{a'}{d}$, $\frac{b'}{d}$ $\cdots$ angenommen sind. Nach moderner Schreibart der Dezimalbrüche ist der Nenner nicht besonders aufzuführen, oder $d = 1$ zu setzen.

Dann soll sein log Brigg $2 = \frac{F}{A}$.

Offenbar erinnern hier der Zähler und der Nenner an log nat 2 und log nat 10, und das Verfahren ist deshalb mit dem von Briggs in der *Arithmetica logarithmica* (1624) zu vergleichen, wo auch durch wiederholte Quadratwurzeln aus 2 und aus 10 zwei Werte, wie F und A, abgeleitet werden, deren Quotient = log Brigg 2 ist. Auch Briggs hat einen Weg entwickelt, der ihm gestattet, bei wenigen Quadratwurzel-Ausziehungen stehen zu bleiben, und aus gewissen abgeleiteten Reihen auf ein Gesetz zu kommen, durch das sich die folgenden Quadratwurzeln mit der genügenden Ziffernzahl durch blofses Addieren zusammensetzen lassen[1]), also im Grunde als lineares Aggregat der wenigen berechneten Wurzeln.

Die Quelle für die Quotientenform liegt bei Briggs in Napiers Definition seiner natürlichen Logarithmen, die wir, um äufserliche Unterschiede zu beseitigen, nach heutiger Art mit dem Dezimal-Komma ausrüsten und sämtlich mit dem Vorzeichen „minus" versehen, damit sie mit zunehmendem Numerus wachsen.[2]) Aus Nepers Vorstellungen in der *Constructio* folgt, dafs, wenn eine Zahl aus einem Ganzen und aus einem langen

1) M. Koppe, *Die Behandlung der Logarithmen und der Sinus im Unterricht.* Progr. d. Andreas-Real-Gymnasiums zu Berlin 1893, S. 22.

2) Die Basis ist alsdann $e = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ für $n = \infty$, *nicht* für $n = 10^7$. Die Basis des Jost Byrg ist dagegen $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ für $n = 10^4$, also eine rationale Zahl.

Dezimalbruch besteht, der in der ersten Hälfte der Stellen nur Nullen hat, dafs dann der Überschufs über 1 der natürliche Logarithmus der Zahl ist. Z. B. log nat 1,0057 = 0,0057. Denn das ist die Zeit, in der ein Punkt auf einer Abscissenachse vom Punkte 1 nach 1,0057 vorrückt, wenn seine Geschwindigkeit von 1 bis 1,0057 variiert, im Mittel also etwa = 1,0029 ist.

Zieht man aus einer beliebigen Zahl p wiederholt Quadratwurzeln und kommt man zu einer Zahl von der eben angegebenen Beschaffenheit, $= a = \sqrt[n]{p}$, so ist $\log \text{nat } a = a - 1$, also $\log p = \log a^n = n \log a = n(a-1) = n(\sqrt[n]{p} - 1)$. Ebenso $\log \text{nat } 10 = n(\sqrt[n]{10} - 1)$[1].

Wird die Geschwindigkeit des Punktes in constantem Mafse vergröfsert, jede Zeit (d. h. Logarithmus) also in demselben Mafse verkleinert, so kann man erreichen, dafs der Weg auf der Abscissenachse von 1 bis 10 in der Zeit 1 zurückgelegt wird, statt in der Zeit log nat 10 = 2,3524. Dazu mufs man also alle Zeiten durch log nat 10 dividieren, und erhält so die Briggssche Formel

$$\log \text{Brigg } p = \frac{n(\sqrt[n]{p} - 1)}{n(\sqrt[n]{10} - 1)}.$$

Sie liefert den Beweis, dafs Briggs das *Wesen* des Modulus beherrschte, dem dann wegen seiner Wichtigkeit später auch ein Name zuerteilt worden ist.

Um die Genauigkeit der Huygensschen Vorschrift zu prüfen, benutze ich, wie auch bei der oben erwähnten vereinfachenden Darstellung des Briggsschen Verfahrens, die Newtonsche Entwicklung der Exponential-Reihe.[2])

Es sei $b = \sqrt[64]{10} = e^{\alpha}$, also $a = \sqrt[32]{10} = e^{2\alpha}$. Dann wird

$$A = \left(\frac{200a}{3 + 3a + 4b} + 40b - 3a - 3\right)\left(1 - \frac{1}{a}\right)$$
$$= \left(\frac{200e^{2\alpha}}{3 + 4e^{\alpha} + 3e^{2\alpha}} + 40e^{\alpha} - 3e^{2\alpha} - 3\right)(1 - e^{-2\alpha})$$
$$= \frac{200(e^{\alpha} - e^{-\alpha})}{3(e^{\alpha} + e^{-\alpha}) + 4} + 40(e^{\alpha} - e^{-\alpha}) - 3(e^{2\alpha} - e^{-2\alpha}).$$

Aus dieser Umformung zeigt sich schon, dafs in der Entwicklnng von A

1) M. Koppe, l. c., S. 22.

2) F. Thoman hat in seiner Note *Sur la méthode de Huygens pour calculer les logarithmes* (Comptes rendus de l'acad. d. sc. de Paris 66, 1868, 661—664), die Genauigkeit der Huygensschen Vorschrift an der Logarithmen-Reihe geprüft, aber meiner Ansicht nach ist die äquivalente Exponential-Reihe vorzuziehen. Dadurch wird auch die Rechnung einfacher.

nach Potenzen von α die geraden Potenzen wegfallen müssen. Aber auch andere Potenzen fallen fort. Das erste Glied rechts wird entwickelt $= 20(2\alpha - \frac{4}{15}\alpha^3 + \frac{7}{150}\alpha^5 - \frac{271}{3500}\alpha^7)$ und damit

$$A = 108\alpha - \frac{2654}{1575}\alpha^7,$$

oder nahezu

$$(A) = 108\alpha(1 - \tfrac{1}{63}\alpha^6).$$

Es ist aber $\alpha = \frac{1}{64}\log \text{nat}\ 10$, also

$$\log \text{nat}\ 10 = \tfrac{64}{108} A = \tfrac{16}{27} A$$

bis auf den Bruchteil $\frac{1}{63}\alpha^6$, oder da α etwa $= \frac{2{,}3}{64} = \frac{1}{30}$, bis auf $2 \cdot 10^{-11}$. Mit noch gröfserer Genauigkeit ergiebt sich

$$\log \text{nat}\ 2 = \tfrac{16}{27} F$$

also auf 10 Stellen genau $\log \text{Brigg}\ 2 = \frac{F}{A}$.

Ist hiermit Huygens' Verfahren verifiziert, so bleibt doch noch unerklärt, woher die grofsen Zahlen seiner Formeln rühren, und ob sie für sein Verfahren notwendig sind. Sie erklären sich, wie die verwickelten Grenzausdrücke G', g' in der Cyklometrie durch die Umwege, auf denen Huygens seine Ziele erreichen mufste. An sich lassen sich hente derartige Ausdrücke, wie sie Huygens wünschte, leicht bilden. Betrachten wir die Reihen:

$$\frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{e^\alpha + e^{-\alpha}} = \alpha - \tfrac{1}{3}\alpha^3 + \tfrac{2}{15}\alpha^5 \cdots$$

$$e^\alpha - e^{-\alpha} = 2\alpha + \tfrac{1}{3}\alpha^3 + \tfrac{1}{60}\alpha^5 \cdots$$

$$e^{2\alpha} - e^{-2\alpha} = 4\alpha + \tfrac{8}{3}\alpha^3 + \tfrac{8}{15}\alpha^5 \cdots$$

Aus diesen kann man mittelst gewisser Koeffizienten ein Aggregat kombinieren, in dessen Entwicklung α^3 und α^5 fehlt. Setzt man

$$\sqrt[n]{p} = e^{2\alpha} = a, \quad \sqrt[2n]{p} = e^\alpha = b,$$

so wird der gesuchte Ausdruck

$$X = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{e^\alpha + e^{-\alpha}} + 4(e^\alpha - e^{-\alpha}) - \tfrac{3}{8}(e^{2\alpha} - e^{-2\alpha}) = \tfrac{15}{2}\alpha + (\alpha^7)$$

oder

$$X = \frac{a-1}{a+1} + \frac{4(a-1)}{b} - \frac{3}{8}\frac{a^2-1}{a} = \tfrac{15}{2}\alpha + (\alpha^7),$$

endlich

$$X = \left(\tfrac{5}{8} - \tfrac{3}{8}a + 4b - \frac{1}{a+1}\right)\left(1 - \frac{1}{a}\right).$$

Da $\log \text{nat}\ p = 2n\alpha$, so folgt

$$\log \text{nat}\ p = \tfrac{4}{15} n X,$$

z. B. aus

$$a = 10^{\frac{1}{128}} = 1{,}0181\ 51722$$

und

$$b = 10^{\frac{1}{256}} = 1{,}0090\ 35044,$$

folgt

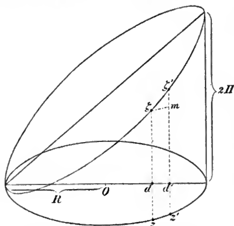
$$\log \text{nat}\ 10 = 2{,}3025\ 85092.$$

Da α etwa $= \frac{12 \cdot 3}{256}$ weniger als $\frac{1}{100}$, so beträgt der Fehler der Formel nur 10^{-14}.

Elliptische und andere Integrale bei Wallis.

Von W. KUTTA in München.

Die analytische Behandlung, die WALLIS in seinen 1655 und 1659 erschienenen Werken bei den Problemen der Differential- und Integralrechnung anwendet, steht im Gegensatz zu den meist geometrischen Verfahren der Zeitgenossen, und liegt uns viel näher, wie schon MONTUCLA[1]) bemerkt. Besonders im Anhange des Werkes von 1659[2]) nähert sich WALLIS späteren Rechnungsmethoden so sehr, als es damals beim Fehlen des formalen Apparates möglich war.



So wird dort (*Opera*, Bd. I, Oxford 1695, S. 557) der Ansatz zur Berechnung der Länge des Ellipsenbogens analytisch gegeben. WALLIS setzt (siehe die Fig.) das Quadrat des Elementes des Ellipsenbogens $\zeta\zeta'$ gleich der Summe des Quadrates des entsprechenden Bogenelementes zz' des Kreises, in den sich die Ellipse parallel projizieren läfst, plus dem Quadrate der Höhendifferenz $\zeta' m$. Daraus findet sich direkt das Bogenelement in WALLIS' Schreibweise gleich:

$$A\sqrt{\frac{R^2}{R^2-a^2}+\frac{H^2}{R^2}}.$$

1) MONTUCLA, *Histoire des mathématiques*, 2. Aufl., Bd. II, S. 353.

2) WALLIS, *Tractatus duo. Prior de Cycloide et corporibus inde genitis. Posterior epistolaris, in qua agitur de Cissoide et corporibus inde genitis et de curvarum tum linearum εὐθύνσει, tum superficierum πλατυσμῷ.*

Hier ist R die kleine, $\sqrt{H^2 + R^2}$ die große Halbachse der Ellipse, $a = Od$ die Projektion der zum Bogenelement $\zeta\zeta'$ gehörigen Abscisse der Ellipse auf den der großen Achse entsprechenden Kreisdurchmesser, $A = dd'$ der dem Bogenelement entsprechende Zuwachs von Od. Die Summation der oben gefundenen Elemente giebt den Ellipsenbogen, genau so wie die Summation der Elemente $A\sqrt{\frac{R^2}{R^2 - a^2}}$ den zugehörigen Kreisbogen giebt.

Damit scheint, abgesehen von der erst 16 Jahre später gefundenen formalen Schreibweise zum ersten Male ein elliptisches Integral analytisch aufgestellt zu sein, wie es erst ein Menschenalter später (1691) Jakob Bernoulli wieder gethan haben dürfte.[1]) Modern geschrieben wäre für R die kleine Halbachse b, für $\sqrt{H^2 + R^2}$ die große Halbachse a, für a $x \cdot \frac{b}{a}$, für A $dx \cdot \frac{b}{a}$ zu setzen und man erhält das Bogenelement ganz richtig als

$$dx\sqrt{\frac{b^2}{a^2 - x^2} + \frac{a^2 - b^2}{a^2}}.$$

Die Bogenelemente der Ellipse heißen „particulae", die auftretenden Kreisbogenelemente „differentiae arcuum". Übrigens kommt die an den späteren Ausdruck anklingende Benennung „differentia" für Element auch sonst bisweilen bei Wallis vor (z. B. S. 563, Zeile 5).

Das Integral ist für Wallis natürlich nicht auswertbar, dagegen gewinnt er, von dem gefundenen Bogenelement ausgehend, die Fläche des Rotationsellipsoids in geschlossener Form durch die Fläche einer Ellipse dargestellt.

Auf Seite 567 erscheint zum zweiten Male ein elliptisches Integral bei der Rektifikation der verlängerten und verkürzten Cykloide. Es gelingt Wallis hier, durch die gewandte analytische Umformung: $a = D - \frac{p^2}{D}$, deren geometrisches Korrelat eine Beziehung zwischen den Punkten der gewöhnlichen und der verlängerten Cykloide ist, das Bogenelement von

$$A\sqrt{\frac{aD \pm 2aB + B^2}{aD - a^2}}$$

ausgehend auf die Form:

$$A \cdot \frac{2B}{D}\sqrt{\frac{D^2}{D^2 - p^2} + \frac{D^2 \pm 2BD}{B^2}}$$

zu bringen. Dabei ist D der Durchmesser des rollenden Kreises, B der Abstand des die Kurve erzeugenden Punktes von der Peripherie, a resp. p sind die Integrationsvariabeln, und A ist beidemal ihr Differential. Der heutige Gleichungsansatz:

---

1) Cantor, *Vorl. über Geschichte der Mathematik*, III², S. 482.

$$x = \frac{D}{2} \cdot \varphi - \left(\frac{D}{2} - B\right) \cdot \sin \varphi$$

$$y = \frac{D}{2} - \left(\frac{D}{2} - B\right) \cdot \cos \varphi$$

führt auf die zweite der obigen Formen, wenn $p = D \cdot \cos \frac{\varphi}{2}$ als Integrationsvariable eingeführt wird.

Aus der Analogie der so hergestellten Form mit der für das Element des Ellipsenbogens gefundenen schliefst Wallis auf die Gleichheit entsprechender Bogenstücke der Cykloide und einer gewissen Ellipse. Diese Beziehung ist, wie es scheint 1658, von Wren geometrisch gefunden, und in eben dieser vorliegenden Abhandlung von Wallis als Eigentum Wrens veröffentlicht (S. 539); gleichzeitig entdeckte sie auch Pascal (*Dimensions des courbes de toutes les roulettes*, 1659); dagegen dürfte die modern anmutende analytische Formulierung Wallis zugehören.

Schliefslich ist vielleicht noch die Ausdrucksweise des Wallis (S. 567) bemerkenswert: „Fatendum interim est, figuram, sic constructam [— die nämlich den Cykloidenbogen ergeben würde —] non magis quadraturae capacem esse, quam est ellipsis curva capax εὐθύνσεως." Das steht unserer Ausdrucksweise: Das Integral läfst sich nur auf ein elliptisches zurückführen, auch formell nicht zu fern.

Auf S. 562—565 findet sich ein weiterer interessanter Punkt. Von der Neilschen Entdeckung der Rektifikation der kubischen Parabel ausgehend, sucht Wallis allgemein die rektifizierbaren Kurven von der Gleichungsform:

$$p^{n+1} = d^n \cdot L$$

auf, wo L konstant, n eine ganze oder gebrochene Zahl ist, p und d unser x und y sind. Das Bogenelement berechnet sich proportional

$$\frac{1}{K} \sqrt{K^2 + (pL^{n-1})^{\frac{2}{n}}},$$

wo K eine Abkürzung der Konstanten $\frac{L \cdot n}{n+1}$ ist. Darauf substituiert Wallis die Variable a vermittelst:

$$a + K = \sqrt{K^2 + (pL^{n-1})^{\frac{2}{n}}}, \text{ d. h.}$$

$$p \cdot L^{n-1} = (a^2 + 2aK)^{\frac{n}{2}},$$

so dafs (von nun an zur Abkürzung in moderner Bezeichnung) an Stelle der Auswertung des Integrals $\int \frac{1}{K} \sqrt{K^2 + (pL^{n-1})^{\frac{2}{n}}}\, dp$, oder, was im

wesentlichen dasselbe, $\int a\,dp$, jetzt auch diejenige des Integrals $\int p\,da$ gesetzt werden kann.

Nun unterscheidet WALLIS die folgenden Fälle: 1. Es ist n gerade. Dann ist p rational ganz in a ausgedrückt, $\int p\,da$ auswertbar, also die verlangte Rektifikation, und ebenso die Flächen- und Momentenberechnung der Rotationsfläche der Kurve um die Achse $p = 0$ leicht ausführbar. Es folgt die Rektifikation für die Beispiele $n = 2, 4, 6$.

2. Es ist n ungerade. Dann ist die Rektifikation (für WALLIS thatsächlich in algebraischer Form) nicht durchführbar, wohl aber die Berechnung der Rotationsfläche, da nicht p, wohl aber p^2 ganz rational in a ist, und die Flächenberechnung auf das Integral $\int p^2 da$ zurückführbar ist. Das Moment der Fläche [d. h. $\int p^3 da$] kann WALLIS wieder nicht berechnen, wie er auch ausdrücklich erwähnt; die Möglichkeit der Auswertung von $\int p^4 da$ [Trägheitsmoment der Fläche] wird nicht erwähnt. Ein allerdings mehr geometrisch als analytisch durchgeführtes Beispiel (S. 562) ist das Rotationsparaboloid (n wäre gleich 1).

3. Es sei n gebrochen. Für diesen Fall giebt WALLIS an, dafs man in derselben Weise untersuchen kann, ob man, wenn nicht die Kurvenlänge, wenigstens die Rotationsfläche oder deren Moment, „aliave hujusmodi" berechnen könne, oder nicht. Der Gedanke ist, wie aus seiner kurzen Darstellung klar hervorgeht, dafs, wenn $\frac{2}{n}$ sich als das Verhältnis $\frac{e}{c}$ der ganzen, relativ primen Zahlen e und c schreiben läfst, p^e sich rational gleich $\frac{[a^2 + 2aK]^c}{L^{(n-1)e}}$ darstellen läfst. WALLIS kann also nach dem vorigen kaum etwas anderes meinen, als dafs in diesem Fall das Integral

$$\int p^{e-1} \sqrt{K^2 + (pL^{n-1})^{\frac{e}{c}}}\; dp$$

auf das rationale Integral $\int p^e da$ führt und ausgewertet werden kann, ganz wie die Kurvenlänge, die Rotationsfläche und das Moment der letzteren für den Fall $e = 1$, $e = 2$ und (was allerdings nicht wirklich behandelt ist) $e = 3$. Die Stelle (S. 565) ist sehr kurz, und in der mir vorliegenden Ausgabe mit Druckfehlern behaftet; es scheint demnach, als ob WALLIS diesen Punkt nicht eingehend durchgearbeitet habe. So scheint es auch mindestens sehr zweifelhaft, ob er gar die Möglichkeit der Auswertung von

$$\int p^{\nu e-1} \sqrt{K^2 + (pL^{n-1})^{\frac{e}{c}}}\; dp$$

erkannt hat.

Immerhin liegen hier Untersuchungen in derselben Richtung, wenn

auch mit ganz anderer Methode vor, wie sie Newton über die Möglichkeit der Quadratur der Kurve

$$x = z^{\vartheta} \, [e + f \cdot z^{\eta}]^{\lambda}$$

in dem zweiten Briefe an Leibniz 1676 (also 17 Jahre später) mitteilt.[1]) Wenn natürlich die Allgemeinheit der von Newton dort gegebenen Sätze mit den kurzen Andeutungen von Wallis über Dinge, die ihm selbst augenscheinlich noch beträchtliche Schwierigkeiten machten, nicht verglichen werden kann, so ist es doch von Interesse, zu sehen, wie die analytische Formulierung der Infinitesimalrechnung sogleich, und schon ehe noch der gewaltige Fortschritt einer zweckmäfsigeren Zeichensprache sich mit der Kenntnis der Reihenlehre verband, so weit führen konnte.

1) Cantor, a. a. O. III², S. 185.

Bericht über den gegenwärtigen Stand der Lehre von den cyklischen Kurven.

Von E. Wölffing in Stuttgart.

Cyklische[1]) Kurven heifsen solche Kurven, welche beim Rollen eines Kreises (*Generator, erzeugender Kreis;* Radius R) auf einem anderen Kreis (*Basis;* Radius F) durch irgend einen Punkt (*beschreibender Punkt*) in der Ebene des letzteren beschrieben werden. Der Kreis (mit Radius r) um den Mittelpunkt des Generators durch den beschreibenden Punkt heifst *beschreibender Kreis.* Die genannte Bewegung wird von Blumenthal [1][2]) als *Doppelkreisbewegung* bezeichnet. Ist die Basis eine Gerade, so entstehen *Cykloiden* (Orthocykloiden nach Reuleaux [2]), ist der Generator eine Gerade, *Kreisevolventen* (Cyklorthoiden nach Reuleaux [4]). Die sehr zerstreute Litteratur über die cyklischen Kurven hat der Berichterstatter [1] zusammengestellt; Beiträge hiezu haben auch Mannheim [6], Haton de la Goupillière [7], „Braid“ [= H. Bosmans] [1] und Archibald [1] geliefert.

Die Behauptung von Elvius [1], die Radlinien (= cyklische Kurven) seien den Alten bekannt gewesen, ist nur insofern begründet, als die Astronomen seit Ptolemäus als Planetenbahnen die sog. Epicykeln annahmen. Wohl aber wurde die Erzeugung der Geraden als zweispitzige Hypocykloide von Nasir Eddin Attusi [1] zuerst angegeben (sie findet sich weiter bei Copernikus [1] (siehe auch Rheticus [1]), Ferrari (siehe Cardano [1]) und Tacquet [1]). Dürer [1] [2] erzeugte eine Pascal'sche Schnecke als Epitrochoide und nannte sie *Spinnenlinie.* Die allgemeinen cyklischen Kurven und ihre Anwendung auf Zahnräder erfand, nach dem Zeugnis La Hires [1] [2], Desargues in der ersten Hälfte des 17. Jahrhunderts. Damit sind die Prioritätsansprüche, welche Leibniz [1] mit so grofsem Eifer zu Gunsten Olaf Römers La Hire gegenüber geltend

1) Irrtümlich nennen manche Schriftsteller so die *cirkularen* Kurven, welche durch die unendlich fernen Kreispunkte gehen. Perigal schlug für die cyklischen Kurven den Namen *Bicircloids* vor (Drach [1], Glaisher [1]).

2) Die Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf den „Litteraturnachweis“ am Ende des Aufsatzes.

macht, hinfällig. Den Stand unserer Kenntnisse von den cyklischen Kurven um die Mitte des 19. Jahrhunderts stellt das Buch von Weissenborn [1] dar. Später lieferten Bellermann [1] und Onnen [1] noch wichtige Beiträge, namentlich in gestaltlicher Hinsicht. Gegenwärtig findet sich die Theorie am besten entwickelt in Burmesters [2] Kinematik; das Buch von Proctor [1] enthält viele Einzelsätze geometrisch bewiesen; Darstellungen elementarer Sätze geben Holzmüller [1] und Piorek [1].

Die cyklischen Kurven heifsen nach de Saussure [1] und Cesàro *Cykloidalen*[1]) oder *gespitzte cyklische Kurven*, wenn der beschreibende Kreis mit dem Generator zusammenfällt, andernfalls nach de Saussure *Trochoidalen.*[2]) Für die weitere Einteilung ist die *doppelte Erzeugungsweise* der cyklischen Kurven (durch zwei Polkreispaare) von Wichtigkeit. Dieselbe wurde für die Cykloidalen von La Hire [1] (später noch einmal von Euler [4]) angegeben. Für die Trochoidalen wurde sie — ein kaum je dagewesener Fall — von 11 Autoren, im wesentlichen ohne von einander zu wissen, entdeckt, und zwar zuerst von Gildemeister [1]. (Die Übrigen sind Bellermann [1], Fouret [1] [3], Rittershaus [1], Piorek [1], Proctor [1], Onnen [1], Vietor [1], Wiener [1], Holst [1] und Reincke [1]). Übrigens war die doppelte Erzeugungsweise der Ellipse schon vorher bekannt, für die Kardioide wurde sie von Mannheim [1], für die sternförmigen cyklischen Kurven von Durège [1] angegeben.

Eine cyklische Kurve heifst nun, wie schon Euler [4] angab, eine |*äufsere* / *innere*| Epicykloide oder auch |*eigentliche Epicykloide* / *Hypocykloide*|, je nachdem die Peripherie des Generators sich |aufserhalb / innerhalb| derjenigen der Basis befindet.[3]) Eine Trochoide heifst ferner |*geschweift* / *verschlungen*|, wenn die Peripherien der Basis und des beschreibenden Kreises durch diejenige des Generators |getrennt / nicht getrennt| werden. Die Ausdrücke verkürzt und verlängert sind, weil von verschiedenen Autoren in verschiedenem Sinne gebraucht, ganz zu verbannen; Burmester [2] sagt an Stelle von geschweift: gestreckt. Die beiden Erzeugungsweisen unterscheidet Schilling [1], indem er von Epitrochoiden

1) Es ist zu verwerfen, dafs manche Schriftsteller (z. B. Onnen, Kramer, Fabri) diesen Ausdruck für Rouletten überhaupt gebrauchen.

2) Auch dieser Name wird z. B. von Cayley im Sinne von Roulette gebraucht, seine jetzige Bedeutung erhielt er durch Young (*A course of lectures on natural and experimental philosophy*, London 1807, II, S. 555).

3) Die *Pericykloiden* sind daher identisch mit den äufseren Epicykloiden, was allerdings Weissenborn [1] S. 3 Anm. noch in Abrede stellte. Es giebt also keine besonderen Pericykloiden, wohl aber eine besondere pericyklische Bewegung.

mit $\left|\begin{matrix}\text{freiem}\\ \text{bedecktem}\end{matrix}\right|$ Centrum redet, je nachdem der Generator den Mittelpunkt der Basis $\left|\begin{matrix}\text{frei läfst}\\ \text{bedeckt}\end{matrix}\right|$. Zu den verschlungenen Trochoiden gehören auch die *sternförmigen* (BURMESTER [2] S. 138), welche durch den Mittelpunkt der Basis hindurchgehen und namentlich von DURÈGE [1] untersucht wurden. Es sind die *Rhodoneen* GRANDIS, auch *Rosaces*, HIMSTEDTsche und LISSAJOUS'sche Kurven genannt. Nach WEBER [1] sind sie anorthoskopische Bilder von Kreisen. Dafs auch beim Rollen imaginärer Kreise reelle Kurven entstehen können, zeigte DE SAUSSURE [1] [2], die Theorie und Geschichte dieser Kurven wurde ausführlich vom Berichterstatter [2] gegeben. Die beiden cyklischen Kurven, welche die zwei Endpunkte des Durchmessers des Generators bilden, nennt HALLSTRÖM [1] (und HENNIG [1]) *Gegencykloiden. Anticykloidalen* heifsen dagegen nach ONNEN [1] S. 22 die Kurven, welche beim Rollen desselben Generators auf der äufseren und inneren Seite der Basis entstehen. Epitrochoiden derselben *Art* sind nach FOURET [2] solche, für welche $\lambda = \frac{F}{R}$ denselben Wert hat. (BELLERMANN [1] S. 11 sagt statt Art mifsbräuchlicher Weise Klasse).

Die rechtwinkligen Koordinaten der cyklischen Kurven werden gewöhnlich als Funktionen eines Parameters ϑ dargestellt. Dieser ist der Winkel der Centrale von Basis und Generator mit einer festen Achse und heifst bei WEISSENBORN [1] *Wälzungswinkel*, bei FOURET [1] *Anomaliewinkel*.

Von der Darstellung des Vektors $x + iy$ durch Exponentialfunktionen des Parameters machte zuerst FRANÇOISE [1] Gebrauch, nach ihm HOLST [1], EICHLER [1], MORLEY [2] und SCHILLING [1]. Ist λ rational, so kann der Parameter eliminiert werden. DRACH [1] bedient sich hiezu mit Vorteil des binomischen Lehrsatzes. Beim Versuch der Elimination für allgemeines n kommt REINEMUND [1] auf eine imaginäre Gleichungsform zwischen x und y. Die Frage nach der Bedeutung imaginärer Parameterwerte warf DE MONTESSUS [1] auf. Die Parameterdarstellung der Polarkoordinaten gab FUSS [1] (und EKAMA [1]); für den Radiusvektor auch DRACH [1] (und HALLSTRÖM [1]); die Gleichung in Polarkoordinaten TISCHLEDER [1], in Polarlinienkoordinaten PURKISS [1] (und AOUST [2] S. 96). Als *krummlinige* Koordinaten verwandte bei Cycloidalen VAN DER HARST [1] bei Trochoidalen AOUST [2] S. 231 den Polarwinkel und den Wälzungswinkel.

Die cyklischen Kurven sind *periodisch*, d. h. sie bestehen aus einer Anzahl kongruenter, den Mittelpunkt der Basis, der auch Mittelpunkt der Kurve ist, umgebender Teile. Die Zahl derselben ist für irrationale λ unendlich, die Kurve ist transcendent wie schon JOH. BERNOULLI [1] be-

merkte und erfüllt einen Teil der Ebene ganz, wie Cesàro [10] ausdrücklich bemerkt. Ist λ rational, so ist die Kurve algebraisch und schliesst sich; erfolgt dies erst nach p Umläufen des Generators, so kann die Kurve durch ein mit dem Generator konzentrisches und mit ihm fest verbundenes p-eck erzeugt werden (Morley [2] S. 191—192). Die Zahl der Zweige und Umläufe hat Reincke [1] bestimmt. Die Punkte | gröfster / kleinster | Entfernung vom Mittelpunkt heifsen | *Apocentrum* / *Pericentrum* |; dieselben sind Krümmungspunkte (Scheitel) mit durch den Mittelpunkt gehenden Normalen, welche Symmetrieachsen der Kurven sind. Die | äufseren / inneren | Epicykloiden haben in den | Perizentren / Apozentren | *Spitzen*. An Stelle derselben treten bei den Trochoidalen Doppelpunkte auf, welche bei den | verschlungenen / geschweiften | | reell / isoliert | sind (Gildemeister [1] S. 20). Sie heifsen *Hauptdoppelpunkte* (Morley [2]); auf ihren Radien liegen Scheitel der Kurve; aufserdem können auch noch andere Doppelpunkte vorkommen. Den Fall, dafs sich zwei Schleifen einer verschlungenen Trochoidale berühren, hat Sang [1] [2] untersucht (vergl. auch Holst [1] S. 150). Alle Radien durch die Doppelpunkte sind nach Ekama [1] Symmetrieachsen der Kurve; diejenigen durch die Hauptdoppelpunkte (Spitzen) heifsen *Nebenachsen*, diejenigen durch die andern Scheitel *Hauptachsen*. Die geschweiften Trochoidalen haben *Wendepunkte*, deren Konstruktion von Burmester [2] S. 142—145 angegeben wurde. Bellermann [1] (und Onnen [1]) machen darauf aufmerksam, dafs zwei Wendepunkte zu einem Flachpunkt in einen Scheitel zusammenrücken und schliefslich imaginär werden können (Marten [1] S. 7).[1]) Die verschlungenen Trochoidalen haben teils Mittelpunktstangenten, teils nicht, an der Grenze stehen die sternförmigen Trochoidalen, bei welchen der Ursprung ein vielfacher Punkt ist.

Die Ordnung und Klasse der cyklischen Kurven, sowie ihre übrigen Plückerschen Zahlen haben Wolstenholme [1], S. Roberts [1] und Holst [1] bestimmt; die Kurven sind unikursal. Kiepert [1] macht darauf aufmerksam, dafs die Zahl der Doppeltangenten gleich derjenigen der Doppelpunkte der Fufspunktkurve in Bezug auf den Mittelpunkt ist. Bellermann [1] (und auch Onnen [1]) weisen auf Krümmungspunkte (sog. *Zwischenscheitel*) hin, in welchen die Normale nicht Symmetrieachse ist und auch nicht durch den Mittelpunkt geht, und zeigen, dafs durch

1) Solche Kurven, in welchen Punkte gröfster und kleinster Krümmung abwechseln, nennt man nach Gyldén (Öfversigt Svenska Vet.-Akad. [Stockholm] 1892, 69—72) *periplegmatische* Kurven.

Hineinrücken von zweien solcher in einen Scheitel Punkte entstehen, in welchen der Krümmungskreis sechspunktig berührt.

Die cyklischen Kurven erreichen die unendlich ferne Gerade in den Kreispunkten; sie schmiegen sich, nach DE SAUSSURE [1], daselbst an imaginäre logarithmische Spiralen asymptotisch an und besitzen in diesen singuläre Punkte, in denen die $\left|\begin{matrix}\text{äufsern}\\ \text{innern}\end{matrix}\right|$ cyklischen Kurven die $\left|\begin{matrix}\text{Geraden nach dem Mittelpunkt}\\ \text{unendlich ferne Gerade}\end{matrix}\right|$ als Tangente haben. Hieraus schliefsen HUMBERT [2] [4] und MORLEY [1], dafs die Brennpunkte der $\left|\begin{matrix}\text{äufsern}\\ \text{innern}\end{matrix}\right|$ Epicykloiden $\left|\begin{matrix}\text{in den Mittelpunkt}\\ \text{ins Unendliche}\end{matrix}\right|$ fallen. Dem gegenüber zeigte FAURE [1] (und nach ihm FRANÇOISE [1] und HOLST [1]), dass nicht nur bei den Trochoidalen, sodern auch bei den Cykloidalen die Brennpunkte die auf den Nebenachsen gelegenen Ecken eines regulären zu der Kurve konzentrischen Polygons sind.¹) Der Widerspruch erklärt sich damit, dafs bei der ersten Auffassung nur die Schnittpunkte der eigentlichen von den unendlich fernen Kreispunkten ausgehenden Tangenten als Brennpunkte angesehen werden, während bei der zweiten Auffassung auch die Strahlen nach den Doppelpunkten und Spitzen als Tangenten gelten. Referent schliefst sich dem letzteren Standpunkt an, mit Rücksicht auf weitere Untersuchungen von FRANÇOISE [1] über *konfokale Trochoidalenscharen*, als deren Orthogonaltrajektorien bei $\left|\begin{matrix}\text{äufseren}\\ \text{inneren}\end{matrix}\right|$ cyklischen Kurven konfokale binomische $\left|\begin{matrix}\text{Parabeln}\\ \text{Hyperbeln}\end{matrix}\right|$, d. h. Kurven von der Form $\left|\begin{matrix}y = ax^n\\ y = ax^{-n}\end{matrix}\right|$ auftreten. Die Brennpunkte sind zugleich Ausnahmepunkte, wenn das $\left|\begin{matrix}\text{Innere}\\ \text{Äufsere}\end{matrix}\right|$ eines Kreises auf das $\left|\begin{matrix}\text{Innere}\\ \text{Äufsere}\end{matrix}\right|$ einer $\left|\begin{matrix}\text{äufseren}\\ \text{inneren}\end{matrix}\right|$ Epicykloide *konform abgebildet* wird. Diese Abbildung wurde von AUGUST [1] für die zweispitzige, von HUBER [1] für die vierspitzige Epicykloide, von AMSTEIN [1] allgemein durchgeführt; den konzentrischen Kreisen entsprechen die konfokalen cyklischen, den Mittelpunktstrahlen die konfokalen binomischen Kurven. AMSTEIN untersucht auch die Isotimen und Isophasen, welche in der Kreisebene den konzentrischen Kreisen und den Mittelpunktstrahlen der Ebene der cyklischen Kurve entsprechen; HUBER konstruiert die RIEMANNsche Fläche und giebt dem konfokalen Kurvensystem eine elektrodynamische Deutung.

1) FRANÇOISE zeigte auch: Die einer Epitrochoide einbeschriebenen halbregulären Polygone haben die Eigenschaft, dafs die Quadratsumme der Radienvektoren ihrer Ecken für alle konstant ist.

Was die *Differentialgleichungen* der cyklischen Kurven betrifft, so ist für die Cykloidalen die Gleichung zwischen Radiusvektor r und dem Ursprungslot p auf die Tangente von Sacchi [1] (und Besant [1]) gegeben worden. Die „intrinsic equation“ zwischen Bogen s und Winkel φ der Tangente mit einer Achse stellte Whewell [1] (nach ihm Natani [1] und Håton de la Goupillière [4]) auf, die Gleichung zwischen s und dem Krümmungsradius ϱ, welche umgedeutet als Mannheimsche Kurve eine Ellipse liefert, soll sich nach Aoust [2] S. 99 bereits bei Riccati finden (vergl. ferner Fuss [1], Mannheim[1]) [2], Cesàro [1] [2], de Saussure [2]). Ist ferner ϱ_i der Krümmungsradius der i-ten Evolute, so wurde die Gleichung zwischen ϱ und ϱ_1 von Eggers [1] (mit Berufung auf Magnus) und Bellermann [1] S. 23, diejenige zwischen ϱ, ϱ_1, ϱ_2 und ϱ_3 von Cesàro [7] angegeben.

Dafs die Normale durch den Berührungspunkt des Generators und der Basis, die Tangente also durch den Gegenpunkt desselben auf dem Generator geht, erkannte bereits la Hire [1] S. 234. Die „magische“ Gleichung der Tangente wurde von Hiern [1] angegeben; Eckardt [1] bemerkte, dafs die Sehne der Tangente im scheitelberührenden Kreis vom Berührungspunkt proportional geteilt wird. Der Richtungskoeffizient $\frac{dy}{dx}$, das Ursprungslot p auf die Tangente und der Winkel der letzteren gegen den Radiusvektor finden sich bei van Hengel [1] S. 18—27. Reincke [1] S. 16 berechnete die Maxima und Minima gegen den Pol, Gildemeister [1] diejenigen gegen die Achsen und gab auch die Tangente von einem Punkt aufserhalb an die Kurve an; Eckardt [2] giebt einen Satz über die Tangente von einem Punkt des scheitelberührenden Kreises an die Kurve an. Juel [1] [2], Neuberg [2], Duporcq [1] und Brocard [1] zeigen, dafs wenn durch Drehung einer Cykloidale um den Pol eine Schar von Cykloidalen entsteht, die Normalen in den Berührungspunkten der von einem Punkt an die Scharkurven gezogenen Tangenten einen Kegelschnitt umhüllen. Jeffery [3] stellt das Produkt der Lote von den Spitzen einer Cykloidale auf die Tangente als Funktion des Ursprungabstandes der letzteren dar.

Den Krümmungsradius und die Evolute der Cykloidalen bestimmte bereits la Hire [1]. Die einfachste Konstruktion des Krümmungsradius beruht auf seiner harmonischen Beziehung (Zehme [1] S. 16), d. h. das Krümmungscentrum liegt auf der Polaren des Kurvenpunkts in

---

1) Mannheim zeigt weiter, dafs beim Rollen einer Cykloidale auf einer Geraden auch das zum jeweiligen Berührungspunkt gehörende Krümmungscentrum der Evolute eine Ellipse beschreibt.

Bezug auf den festen Kreis (CESÀRO [4] [6]). Viele Konstruktionen für Cykloidalen und Trochoidalen gab WEISSENBORN [1]; weitere siehe bei WARING [1], MANNHEIM [3], DIEU [1], PROCTOR [1] und BERTO [1]. Die Kreise über den Krümmungsradien schneiden nach CESÀRO [4] (siehe auch PELLET [1]) die Basis rechtwinklig und umhüllen nach MANSION [1] (siehe auch MENESSON [1]) die Inverse einer Cykloidale. Die Spitzen der ähnlichen Dreiecke über den Krümmungsradien erzeugen nach MORET-BLANC [1] Trochoidalen; FOURET [5] bemerkt hierzu, dass diese $\left|\begin{matrix}\text{verschlungen}\\ \text{geschweift}\end{matrix}\right|$ sind, jenachdem das Dreieck $\left|\begin{matrix}\text{spitz}\\ \text{stumpf}\end{matrix}\right|$ ist; daher beschreibt auch ein Punkt, der den Krümmungsradius $\left|\begin{matrix}\text{äußerlich}\\ \text{innerlich}\end{matrix}\right|$ proportional teilt, eine $\left|\begin{matrix}\text{verschlungene}\\ \text{geschweifte}\end{matrix}\right|$ Trochoidale. Dafs die Evolute zur Cykloidale invers ähnlich ist, bemerkten bereits JAC. BERNOULLI [1] und LA HIRE [1] (siehe auch EULER [1], V. ETTINGSHAUSEN [1], PUISEUX [1], TUCKER [1], EKAMA [1]). Die zweiten, überhaupt alle geraden Evoluten sind nach EULER [5] zur Kurve direkt ähnlich (siehe auch HOLDITCH [1], CURRAN SHARP [1], PIRONDINI [3]). Dafs auch die Developpoiden ähnliche Kurven sind, bewiesen zuerst ROUQUET [1] (aber ungenau) und NATANI [1] (später noch AOUST [2], MANSION [2], FOURET [5], PIRONDINI [1] und GRANE [1] S. 58). Nach CESÀRO [4] ist der Ort der Spitzen aller Developpoiden zur Cykloidale invers. HÀTON DE LA GOUPILLIÈRE [5] (und CESÀRO [4]) zeigte, dafs die Verbindungslinie eines Kurvenpunkts mit dem zugehörigen Krümmungscentrum der Evolute durch den Mittelpunkt geht und von diesem proportional geteilt wird. Als *centre des moyennes distances* führt HÀTON DE LA GOUPILLIÈRE [6] einen Punkt ein, der von Tangente und Normale einen Abstand gleich dem arithmetischen Mittel aus den Krümmungsradien der geraden resp. ungeraden Evoluten hat; ebenso FOURET [6], der als Ort dieses Punktes eine Trochoidale nachweist. Die äufseren Epicykloiden können nach CESÀRO [5] als unendlich vielte Evolventen eines Punktes aufgefafst werden. Die *Evolvente* einer Cykloidale ist zugleich Parallelkurve einer zur Grundkurve ähnlichen Cykloidale, die in den Scheiteln desselben ihre Spitzen hat (ECKARDT [1]) und durch den Schnitt entsprechender Tangenten der Grundkurve und der in Bezug auf die Basis polarreziproken Kurve entsteht (KIEPERT [1]). Eine andere spezielle Evolvente geht durch die Spitzen der Grundkurve, sie hat gar keine Spitzen, sondern nur Scheitel (ONNEN [1] S. 48). Unbemerkt ist bisher geblieben, dafs eine dritte Art von Evolventen der Cykloidalen, nämlich die die Basis rechtwinklig schneiden, ebenfalls eine besondere Bedeutung hat; sie

sind nämlich identisch mit den bereits von Fuss[1]) untersuchten Kurven, in welchen der Krümmungsradius zum Radiusvektor proportional ist.[2]) Böklen [2] zeigte, dafs die Evolventen rectifizierbar sind; nach Humbert [1] sind sie algebraisch, wenn der Zähler von λ gerade ist. (Auch Audibert [1] gab die Quadratur und Rektifikation dieser Kurven an.) Duraeus [1] macht darauf aufmerksam, dafs die Evolventen der Cykloidalen mit ungerader Spitzenzahl die doppelte Anzahl von Umgängen haben als die Grundkurve, ausgenommen die durch die Scheitel gehenden Evolventen. Zweite Evolventen von Cykloidalen kommen bei Natani [2] vor.) Für die Evoluten der Trochoidalen hat Gildemeister [1] S. 28 die Gleichung aufgestellt, Bellermann [1] S. 34 ff. hat den Verlauf dieser Kurven eingehend untersucht, während bei Wiener [2] Darstellung und Figuren sich nur auf einzelne Formen von Trochoidalen beziehen. Bei Bellermann [1] sind hervorzuheben die „unendlich verschlungenen und geschweiften" Trochoidalen, deren Evoluten sich als Cykloidalen ergeben. Wolstenholme [3] zeigt, dafs der Pol der oskulierenden logarithmischen Spirale zum Berührungspunkt in Bezug auf die Basis der Cykloidale invers ist. Die *inversen* Kurven der Cykloidalen heifsen nach Aubry *épis*. Sie werden erzeugt vom zweiten Schnittpunkt der Generatoren bei beiden Erzeugungsweisen (Morley [2] S. 191). Die Fufspunktkurven in Bezug auf den Mittelpunkt hat Bellavitis [1] als sternförmige Trochoidalen nachgewiesen (vergl. auch Böklen [1], Bellermann [1], Eckardt [1]). Ruoss [1] S. 14—15 vergleicht die Flächeninhalte von Cykloidalen mit denjenigen ihrer Fufspunktkurven. Allgemeine Fufspunktkurven hat Hicks [1] behandelt; hieher gehört auch die „Locale" von Callegari [1] S. 211. Die *polarreziproke* Kurve (bei Kiepert Polarkurve) der Cykloidale ist invers zur sternförmigen Trochoidale derselben Art (Svechnikow [1]). Sie war Gegenstand einer von Williamson [1] und Wolstenholme gelösten Aufgabe; am ausführlichsten wurde sie von Jerabek [1] behandelt, welcher eine besondere Erzeugung angab, die Tangente konstruierte [2] und einen neuen Zusammenhang mit der sternförmigen Trochoidale angab. Svechnikow [1] bewies, dafs der Ort der Endpunkte der Polarsubtangente eine ähnliche zur Evolute der Cykloidale polarreziproke Kurve ist. Die *isoptische* und orthoptische Kurve der Cykloidalen ist eine Trochoidale derselben Art, wie schon Chasles [2] S. 25 angab; einen kinematischen Beweis lieferte

1) *Solutio problematis ex methodo tangentium inversa.* Nova Acta Petrop. 4 (1789), 104—128.

2) Fuss (ebenda), Sylvester (Phil. Mag. 36_4 [1868], 305) und Lecornu (Bullet. soc. mathém. Paris 26 [1898], 85—86) zeigen, dafs die Kurve, in welcher der Krümmungsradius gleich dem Radiusvektor ist, eine Evolvente der Kreisevolvente (Norwich spiral) ist.

Loucheur [1], einen geometrischen Espanet [1] (für die orthoptische Kurve schon Eckardt [2]). Barisien [4] (auch Audibert [2] und Duporcq [2]) machte auf die fremden Bestandteile der isoptischen Kurve aufmerksam; insbesondere ist nach Janisch [1] die Basis ein Teil derselben. *Brennlinien* von Cykloidalen betrachtete Bellermann [1] S. 61; er fand, daſs die Evoluten zweier Anticykloidalen gegenseitig Reflexionskaustiken in Bezug auf die Basis sind. Eckardt [1] zeigte, daſs die n-te Katakaustika eines Kreises vom Unendlichen oder von der Peripherie aus eine Cykloidale ist. Die Berührungspunkte eines Parallelstrahlenbüschels mit den verschiedenen Lagen des Generators liegen nach Mannheim [4] auf einer Ellipse.

Der Erzeugung der cyklischen Kurven als Kreisrouletten[1]) steht diejenige als *Epicykliks* entgegen: Der beschreibende Punkt bewegt sich auf der Peripherie eines *Epicykel* genannten Kreises, dessen Mittelpunkt sich gleichzeitig proportional auf einem *Deferent* genannten Kreise bewegt. Zur Konstruktion auf diesem Wege kommt die Übertragung eines Kreisbogens auf einen andern in Betracht, wofür Schlömilch [1] eine Anweisung giebt. Von der Darstellung der cyklischen Kurven als Epicykliks machen z. B. Verdam [1], Bellermann [1], Proctor [1] Gebrauch. Bewegen sich zwei Punkte gleichförmig auf zwei Kreisen, die nach Fouret [2] durchaus nicht konzentrisch zu sein brauchen, so beschreibt jeder Punkt, der ihre Verbindungslinie proportional teilt, eine Trochoidale (Eckardt [1] [2], der [1] noch bemerkt, daſs, wenn die zwei Kreise in parallelen Ebenen übereinander liegen, die von der Verbindungslinie der Punkte umhüllte Regelfläche durch parallele Ebenen nach cyklischen Kurven geschnitten wird). Dies ist die von Burmester [2] S. 162 erwähnte Erzeugung der cyklischen Kurven durch ein rotierendes, affin veränderliches ebenes System. Dabei beschreiben zwei Punkte Cykloidalen, zwei Punkte sternförmige Trochoidalen, die Bedingungen für diese Fälle geben Bellermann [1], Reincke [1], Delaunay [1] an. Hâton de la Goupillière [5] trägt auf den Tangenten der Trochoidale Stücke proportional zum Krümmungsradius ab und erhält damit eine Trochoidale; dasselbe tritt nach Fouret [2] ein, wenn man auf Geraden, die zu den Tangenten gleich geneigt sind, gleiche Stücke abträgt, oder wenn man die Normale bis zum Schnitt mit dem festen Kreis proportional teilt. Françoise [1] bestimmt eine Trochoidale als den Ort der Sehnenmitten, deren Endpunkte dieselbe Differenz des Wälzungswinkels haben; dieser Satz wurde von Fouret [2] auf pro-

1) Dieselbe drückt Burmester [2] S. 134 kinematisch folgendermaſsen aus: Die cyklischen Kurven sind die Punkte eines Systems S_3, das sich in einem System S_2 um einen Punkt dreht, während S_2 sich in einem System S_1 um einen Punkt dreht, im System S_1.

portionale Teilpunkte ausgedehnt. Auf merkwürdige Weise entstehen die |äufseren / inneren| Epicykloiden durch unendlich oft wiederholte Abwicklung einer beliebigen Kurve innerhalb eines |spitzen / stumpfen| Winkels (siehe Euler [2], „Un ancien élève“ [1], Whewell [1]). Apparate zur Zeichnung cyklischer Kurven sind in grofser Zahl bekannt gemacht und ausgeführt worden z. B. von Cardinal [1], Weisbach [1], Plettner [1], Reuleaux [2] [4], Thallmayer [1], Unwin [1], Saladini bei v. Bool [1] S. 172—176; Burmester [3], Mayer [1], Rittershaus [1], Spott [1] und Schilling [1] [2].

Als *Enveloppe* läfst sich eine Cykloidale erzeugen durch die Verbindungslinie von zwei Punkten, die sich auf einem Kreis gleichmäfsig bewegen (Eckardt [1], Kiepert [1], Gob [1]). Der Spezialfall einer Uhr mit gleichlangen Zeigern wurde von Brocard [1] und Gilbert [1] behandelt. Kiepert [1] zeigt weiter, dafs die von der Sehnenmitte beschriebene sternförmige Trochoidale Fufspunktkurve der Enveloppe ist. Liegen die Punkte auf zwei konzentrischen Kreisen, so umhüllt ihre Verbindungslinie eine Evolvente einer Cykloidale, wie zuerst Eckardt [2] nachwies (vergl. auch Juel [4] und Gob [2]). Ein Durchmesser des Generators umhüllt nach Chasles [1] [2] S. 69 dieselbe Cykloidale, die durch Rollen eines halb so grofsen Generators auf derselben Basis erzeugt wird, eine Sehne des Generators nach Aubry [1] eine Evolvente dieser Cykloidale. Eytelwein [1] S. 35—36 bemerkte zuerst den wichtigen Satz, dafs wenn sich zwei Cykloidalen, die denselben Generator haben, berühren und die Basis der einen, ihre Cykloidale mitnehmend auf der Basis der andern rollt, die beiden Cykloidalen immer in Berührung bleiben. Sind die beiden Basen einander gleich, so folgt der Satz von Kauffmann [1] S. 20—21 (vergl. auch Resal [3]): Eine Cykloidale ist die Enveloppe aller Lagen der Anticykloidale, wenn diese beim Rollen von ihrer Basis mitgenommen wird. Infolge der doppelten Erzeugungsweise der Cykloidalen folgt weiter der Satz von Morley [2] S. 197, dafs die Enveloppe aus zwei Cykloidalen besteht, welche dieselbe Spitze haben. *Adjustierbar* sind zwei Cykloidalen, wenn jede ihre Spitzen auf der andern hat. Morley hat diese Theorie auch auf Trochoidalen ausgedehnt, und es schliefst sich hieran auch seine Theorie der Penoskulanten an [4]. Wetzell [1] definiert die Cykloidalen als Enveloppen von Kreisen aus den Berührungspunkten von Basis und Generator; hiebei treten zwei Anticykloidalen gleichzeitig auf. Dagegen besteht die Enveloppe eines vom Generator mitgenommenen Kreises nach Burmester [2] S. 186 aus 2 Evolventen von Cykloidalen (siehe auch Resal [2] S. 9). Das Krümmungscentrum einer vom Generator mitge-

nommenen Kurve führt Mannheim [2] auf das Krümmungscentrum der Ellipse zurück. Dnrchläuft nach Janisch [1] ein Brennpunkt eines Kegelschnitts, der seinen Mittelpunkt im Pol und seine Hauptachse gleich dem Durchmesser der Basis hat, die Cykloidale, so umhüllt der Kegelschnitt dieselbe Cykloidale. Nach Fouret [2] umhüllt eine Gerade, die mit einem auf zwei ähnlichen Cykloidalen gleitenden Winkel fest verbunden ist, eine ähnliche Cykloidale.

Die *Quadratur* der Cykloidalen verdankt man Huygens (bei la Hire [1]). Caswell [1] zeigte das Segment des Generators: Segment der Cykloidale $= F : 2\lambda + F$ (cf. Baur [1]). Besant [2] bestimmt die Fläche zwischen der Basis und der Enveloppe eines Durchmessers der Basis, Ekama [1] diejenige zwischen zwei Anticykloidalen. Die Quadratnr der Trochoidalen findet sich bereits bei l'Hôpital [1], Halley [1] und la Hire [2] (siehe ferner auch Gildemeister [1] S. 34). Die *Rektifikation* der Cykloidalen gaben Newton [1] und la Hire [1]; Gigon [1] führte sie auf die Rektifikation der Pascalschen Schnecke zurück. Nach Humbert [1] [3] sind die Cykloidalen algebraisch rektifizierbar, wenn der Zähler von λ gerade ist. Nach Laisant [1] ist das Quadrat des Bogens zu der Summe der Potenzen seines Endpunktes in Bezug auf n Kreise proportional. La Hire [2] gelang auch die Rektifikation der Trochoidalen; Nicole [1] machte auf den Zusammenhang derselben mit der Ellipse aufmerksam (siehe auch Böklen [2], Streinz [1], Azzarelli [1], Durège [2] S. 215 (speziell für sternförmige Trochoidalen)). Gildemeister [1] S. 31 giebt von diesem Standpunkt aus eine Reihe zur Rektifikation. Das Fagnanosche Theorem kann nach Böklen [1] [2] auch auf Trochoidalen übertragen werden (cf. Siacci [1]). Rankine [1] konstruiert einen Kreisbogen, der annähernd gleich einem Trochoidenbogen ist. Die Anwendung der *Antiroulettensätze* auf Quadratur und Rektifikation der Cykloidalen haben „Un abonné“ [1], Lenthéric [1], Böklen [1], Hennig [1] und Gigon [1] gezeigt.

Gildemeister [1] S. 34—41 kubiert und komplaniert den Drehungskörper der Cykloidalen, Proktor [1] S. 123 kubiert denjenigen der Trochoidalen. Hâton de la Goupillière [4] und Proktor [1] bestimmen den Krümmungs-, Flächen- und Bogenschwerpunkt der Cykloidalen; die beiden letzteren auch Gildemeister [1] S. 43 und ebenso den Flächen- und Körperschwerpunkt des Drehungskörpers. Fouret [1] [2] zeigt, dafs die Resultante von Cykloidalenleitstrahlen ebenfalls ein Cykloidalenleitstrahl ist. Burmester [1] betrachtet Flächen, welche dnrch Schranbenbewegung einer Cykloidale längs einer anf ihrer Ebene im Mittelpunkt senkrecht stehenden Achse entstehen. Bei der Betrachtung von Bohrlöchern zeigt Mallock [1] die Hypotrochoiden als Kurven, innerhalb welcher ein eingeschriebenes Polygon eine drehende Bewegung ausführen kann und

deren Gestalt der Querschnitt des Bohrlochs bei polygonalem Bohrer annehmen mufs.

Rollt eine Cykloidale auf einer Geraden, so beschreibt nach Böklen [2] der Pol eine Ellipse, welche halb so lang ist als die Fufspunktkurve (vergl. auch Kessler [1], Besant [1] [2], Rittershaus [1], Cesàro [6], der bemerkt, dafs der Parameter dieser Ellipse gleich dem Durchmesser der Basis ist). Rollt eine Delaunaysche Kurve auf der kreisförmigen Fufspunktkurve des erzeugenden Kegelschnitts in Bezug auf den beschreibenden Brennpunkt als Pol, so umhüllt die Basis der rollenden Kurve eine Cykloidale (Habich [1]). Rollt eine sternförmige Trochoidale auf einer Ellipse, so beschreibt ihr Mittelpunkt die grofse Achse der Ellipse (Purser [1]). Rollt umgekehrt eine Ellipse auf einer sternförmigen Trochoidale, so geht eine Achse der Ellipse immer durch den Mittelpunkt der Trochoidale (Merkelbach [1]). Rollt eine Cykloidale auf einer andern derart, dafs die Bogenlängen zwischen zwei Spitzen in beiden gleich sind, so beschreibt der Mittelpunkt der rollenden eine Trochoidale (Bellermann [2]). Clairaut [3] hat auch die Kurven betrachtet, welche beim Rollen eines Kreises auf einem Kreis ein Punkt der festen Ebene in der beweglichen Ebene erzeugt, ohne dieselben jedoch als cyklische Kurven zu erkennen.

Rollt von mehreren Kreisen immer einer auf dem andern, so entstehen die *höheren Epicykel*, welche von Littrow [1] und Raabe [1] untersucht wurden.[1]) Hieher gehört auch der Fall von Verdam [1], bei welchem ein Kreis auf einem Kreis rollt, der selbst auf einer Geraden rollt. Kiepert [1] schlägt vor die Punkte zu untersuchen, welche die Verbindungslinie zweier auf einer Ellipse beweglicher Punkte proportional teilen; Cesàro [8] lenkt die Aufmerksamkeit auf die Kurven, bei welchen ein mit Tangente und Normale unveränderlich verbundener Kegelschnitt durch einen festen Punkt geht. Die Verallgemeinerung der Trochoiden durch Biel [1] besteht darin, dafs der beschreibende Punkt auf dem beschreibenden Kreis nicht fest ist, sondern sich gleichmäfsig bewegt. Grane [1] S. 18 fafst mit dem Namen „cyklische Kurven" die Enveloppen der Geraden zusammen, deren Abstand von einem festen Punkt der algebraischen Summe der Abstände dieses Punktes von den zur Geraden parallelen Tangenten an eine Anzahl konzentrischer Cykloidalen gleich ist.

Zur Winkelteilung haben die Cykloidalen durch van Leeuwen [1] und Proctor [1] S. 246—247 Anwendung gefunden (vergl. auch Pel-

1) Für Epicykel aus drei Drehungen schlägt Bellavitis [2] die Namen *Epiepicykloide* und *Hypoepicykloide* vor, je nachdem die zusammensetzenden Drehungen alle im selben Sinn erfolgen oder nicht.

lis [1], der mit ihrer Hilfe den Kreis in 3 gleiche Teile teilt). Zahlreich ist ihr Vorkommen in der Mechanik. Townsend [1] behandelt die epicykloidische Bewegung bei Anziehung durch einen Kreisring. Bereits Newton [1] bewies, dafs die Epicykloiden tautochron sind bei Zentralkraft proportional der Entfernung. Puiseux [2] bemerkt, dafs bei $\left|\begin{matrix}\text{Abstofsung}\\ \text{Anziehung}\end{matrix}\right|$ $\left|\begin{matrix}\text{äufsere}\\ \text{innere}^{1)}\end{matrix}\right|$ Epicykloiden auftreten. Proctor [1] S. 144 stellt ein epicykloidales Pendel auf. Hâton de la Goupillière [2] [3] bewies, dafs der Tautochronismus durch Hinzutreten der Reibung und eines Widerstands proportional zur Geschwindigkeit nicht gestört wird (vergl. auch Darboux [1]). Ökinghaus [1] vergleicht die Zeit der Bewegung in der Trochoidale mit derjenigen in der Fufspunktkurve der Ellipse. Eichler [1] macht Anwendungen auf Schwingungskurven, Collignon [1] auf sog. pendulare Kurven. Guyou [1] betrachtet geschweifte Hypotrochoiden als Bahnkurven von Teilchen in der Hydrodynamik; vergl. auch Voigt [1]. Napier [1] wandte Trochoidalen beim Schiffsbau an. Den Nutzen der cyklischen Kurven in der Theorie der Zahnräder erkannten schon Desargues und la Hire [1]; später haben sich mit diesem Gegenstand Drake [1], Arzberger [1], Dieu [1], Natani [2], Leneveu [1], Léauté [1] und Lecornu [1] beschäftigt; letzterer hat die Epicykloidenverzahnung mit der Evolventenverzahnung verglichen. Eine ausführliche Theorie der Zahnräder mit Litteraturangaben findet sich bei Burmester [2]. Einen hypocykloidischen Mechanismus hat Wilson [1] angegeben. Das Auftreten innerer Epitrochoiden beim Zeemanschen Phänomen, d. h. bei der Bewegung der Jonen eines glühenden Dampfes, der einem homogenen Magnetfeld ausgesetzt ist, hat Blumenthal [1] nachgewiesen. Aufser der konfokalen Schar cyklischer Kurven wurde bereits die durch Drehung einer Cykloidale um ihren Mittelpunkt entstehende Schar erwähnt: Fouret [4] hat ihre Charakteristiken bestimmt. Ramaswami Aiyar [1] zeigte, dafs bei zwei ähnlichen Cykloidalen n-ter Klasse je n gemeinsame Tangenten einen Kegelschnitt berühren und durch drei von ihnen bestimmt sind. Morley [3] studiert die Konfiguration dieser Kegelschnitte, konstruiert sie und weist sie als Enveloppen der gemeinsamen Tangenten nach, wenn die Cykloidalen um ihre Mittelpunkte rollen.

Über *sphärische* cyklische Kurven hat zuerst Hermann [1] Untersuchungen angestellt; Joh. Bernoulli [2] zeigte jedoch, dafs er zu falschen Resultaten gelangt war. Nicole [3] untersuchte die Fälle, welche algebraische Kurven ergeben und wies die sphärische Evolvente, welche durch Rollen eines Grofskreises auf einem Kleinkreis entsteht, als rektifikabel

1) Oder Pseudocykloiden.

nach. Die Rektifikation wurde auch durch Euler [3] ausgeführt. Joh. Bernoulli [2] zeigte ferner, dafs die Rektifikation der sphärischen Cykloidalen auf die Quadratur einer Hyperbel zurückführbar ist; er erörterte den Fall, dafs die Ebenen der Kurve aufeinander senkrecht stehen. Clairaut [2] komplaniert epicykloidisch begrenzte Kugelteile. Auch Fuss [2] behandelt diese Kurven. Jeffery [2] gab Polartangentialgleichung und Vektorpedalgleichnng der sphärischen Cykloidalen und Trochoidalen und zeigte, dafs die Rektifikation der letzteren auf elliptische Integrale 1. 2. und 3. Gattung führt. Lexell [1] (ebenso auch Hachette [1]) bestimmt die Tangente, den Krümmungsradius (diesen auch Resal [2]), den Bogen und die Fläche der sphärischen Cykloidalen und Trochoidalen. Von der sphärischen Evolvente bestimmt Olivier [1] die Tangente, Kauffmann [1] das Krümmungszentrum und die Evolute (vergl. auch Hoffmann [1]); diese Evolute ist eine konische Loxodrome, die sich bei Abwickelung des Kegels in einen Kreis verwandelt, die sphärische Evolvente selbst Loxodrome auf dem projizierenden Cylinder (s. a. Cesàro [3]). Der die sphärische Evolvente erzeugende Kreis rollt zugleich auf einem zweiten, zum ersten parallelen und kongruenten Kleinkreis, ohne zu gleiten, und hat deshalb ihre Spitzen auf beide Kleinkreise verteilt. Nach Cesàro [3] (siehe auch Pirondini [2]) wickelt sie sich auf ihrer Tangentenfläche als Cykloidale ab; sie ist, wie bereits Jorini [1] zeigte (vergl. auch Schoelcher [1]), Isokline (nicht Loxodrome) auf der Kugel; ihre Projektion auf eine Ebene parallel zu den Kleinkreisen ist eine Cykloidale. Nach Pirondini [1] sind sie auch geodätische Linien auf abwickelbaren Schraubenflächen. Enneper [1] zeigte, dafs auch auf den allgemeinen Drehflächen zweiter Ordnung die Isoklinen sich auf eine Ebene senkrecht zur Drehaxe als Cykloidalen projizieren. Auch bei Mannheim [5] kommt ein Cylinder mit cykloidaler Basis vor. Mit der Quadratur und Rektifikation sphärischer Cykloidalen beschäftigt sich Ekama [1]; Hoffmann [1] und Ekama [1] bemerken, dafs die Evolute keine Cykloidale ist. Trognitz [1] behandelt speziell die sphärische Cykloide, die beim Rollen eines Kleinkreises auf einem Grofskreis entsteht; er rektifiziert und komplaniert dieselbe und untersucht ihre Abbildung auf die Merkatorebene. Gleichungen von sphärischen Cykloidalen sind auch von de Saussure [1] S. 66—67 angegeben worden. Reuleaux [2] untersucht besonders die „homozentrischen" sphärischen Trochoidalen, welche den ebenen sternförmigen Trochoidalen entsprechen. Cranz [1] macht auf das Auftreten sphärischer cyklischer Kurven bei der Rotation von Langgeschossen aufmerksam. Rollt ein Kreis, dessen Ebene mit einem festen einen konstanten Winkel bildet, auf diesem und giebt man diesem Winkel alle möglichen Werte, so erzeugen die Rouletten eine Fläche, welche Svechnikow [2] [3] epicykloidale Fläche nennt und welche

er als invers zu einer Cylinderfläche nachweist. Das Problem der sphärischen cyklischen Kurven hat VANECEK [1] bedeutend verallgemeinert, indem er Bewegungen eines Kreises, der einen festen schneidet, untersucht und eine grofse Menge von Einzelfällen unterscheidet.

Auf die eigentlichen Cykloiden und Trochoiden, auf die Kreisevolventen und die ARCHIMEDische Spirale, auf die speziellen algebraischen cyklischen Kurven (STEINERsche Hypocykloide, Astroide, Cardioide, PASCALsche Schnecke, zweispitzige Epicykloide, logarithmische Spirale u. A.) kann im Rahmen dieses Berichts nicht eingegangen werden.

Litteraturnachweis.

Die mit * bezeichneten Arbeiten sind mir nicht zugänglich gewesen.

VAN AKEN, H. [1] *Over de hypocycloide* (Diss. Leiden 1866).

AMSTEIN, H. [1] *Note sur les épicycloides et les hypocycloides envisagées au point de vue de représentation sphérique.* Bull. soc. Vaudoise (Lausanne) 28 (1892), 67—84.

AOUST, L. [1]* *Sur la génération des épicycloides.* Mém. soc. émulation Besançon 5_2 (1854). — [2] *Analyse infinitésimale des courbes planes* (Paris 1873).

ARCHIBALD, R. C. [1] *Question 1729.* L'interméd. des mathém. 7 (1900), 8. — [2] *Bibliographie des épicycloides.* L'interméd. des mathém. 7 (1900), 57.

ARZBERGER, J. [1] *Über die richtige Verzeichnung der Zähne für den Eingriff verzahnten Räderwerkes und die Berechnung der Reibung an denselben.* Polytechn. Jahrbuch (Wien) 5 (1824), 166—189.

AUBRY, A. [1] *Sur l'usage des figures de l'espace pour la définition et la transformation de certaines courbes.* Journ. de mathém. spéc. 4_4 (1895), 249.

AUDIBERT. [1] *Solution de la question 547.* L'interméd. des mathém. 3 (1896), 72—73. — [2] *Solution de la question 895.* L'interméd. des mathem. 4 (1897), 272—273.

AUGUST, F. W. O. [1] *Eine konforme Abbildung der Erde nach der epicycloidischen Projektion.* Zeitschr. der Gesellsch. für Erdkunde (Berlin) 9 (1874), 1—22; (auch Berlin 1875).

AZZARELLI, M. [1] *Esercizio geometrico.* Atti acc. Nuovi Lincei (Roma) 31 (1879), 6—39.

BARISIEN, E. N. [1] *Question 211.* L'interméd. des mathém. 1 (1894), 102. — [2] *Question 431.* L'interméd. des mathém. 2 (1895), 9. — [3] *Extrait d'une lettre.* Journ. de mathém. spec. 4_4 (1895), 239. — [4] *Question 589.* L'interméd. des mathém. 3 (1896), 198.

BAUR, C. W. [1] *Zu der Quadratur der Epicycloide und der Hypocycloide.* Zeitschr. für Mathem. 4 (1859), 311—312.

BAYMA, J. [1]* *On cycloidal functions.* Washington.

BELLAVITIS, G. [1] *Sulla derivazione delle curve.* Ann. di scienze matem. 3 (1852), 508—516. — [2] Atti ist. Veneto 2_4 (1873), 1224—1228.

BELLERMANN, G. [1] *Epicycloiden und Hypocycloiden* (Diss. Jena 1867). — [2] *Rouletten, welche entstehen, wenn eine Cycloide auf einer andern rollt* (Pr. Berlin 1882).

BERGERY, L. *Géométrie des courbes appliquée aux arts, 2e éd.* (Metz 1843).

Bernoulli, Jac. [1] *Additio ad schedam de lineis cycloidalibus.* Acta Erud. 1692, 291 ff.

Bernoulli, Joh. [1] *Lectiones Hospitalianae* (1691—1692), Lect. 21—25 = *Opera* III [1742], 449—463. — [2] *Problème sur les épicycloides sphériques.* Mém. ac. Paris 1732, 237—248.

Berto, E. [1] *Centro di curvatura della epicicloide.* Il politecnico (Milano) 32 (1884), 469—470.

Besant, W. H. A. [1] *On roulettes and glissettes* (Cambridge 1870). — [2] *Notes sur les roulettes et les glissettes.* Nouv. ann. de mathém. 10_2 (1871), 284—286, 324—327, 432, 474—477, 553—555.

Biel, B.]1] *Über Rollbewegungen unter der Voraussetzung, dafs der erzeugende Punkt noch einer besonderen Eigenbewegung unterliegt* (Progr. Bensheim 1884).

Blumenthal, O. [1] *Die Bewegung der Zonen beim Zeemanschen Phänomen.* Zeitschr. für Mathem. 45 (1900), 119—136.

Böhme. [1]* *Cylindrische, konische und sphaerische Cycloiden* (Pr. Zwickau 1871).

Böklen, O. [1] *Lehrsatz.* Arch. der Mathem. 30 (1858), 469. — [2] *Über cyclische Kurven.* Arch. der Mathem. 37 (1861), 118—123.

v. Bool, W. [1] [Instrumente und Apparate für das geometrische Zeichen nebst Erklärung ihrer Theorie] (russ.; Moskau 1892).

„Braid" [= H. Bosmans]. [1] *Solution de la question 1239.* L'interméd. des mathém. 6 (1899), 13.

Brewster, D. [1]* The Edinburgh encyclopaedia I—XVIII (Edinburgh 1810—1830), Artikel „Epicycloide".

Brocard, H. [1] *Note sur la cardioide.* Nouv. correspond. mathém. 3 (1877), 408—410. — [2] *Solution de la question 56.* L'interméd. de mathém. 2 (1895), 208—209. — [3] *Notes de bibliographie des courbes géométriques* (Bar le Duc 1897, 1899).

Burmester, L. [1] *Kinematisch-geometrische Konstruktion der Parallelprojektion der Schraubenfläche.* Zeitschr. für Mathem. 18 (1873), 185—203. — [2] *Lehrbuch der Kinematik* I (Leipzig 1887). — [3] *Rädermechanismen für die zweifache Erzeugung der Trochoiden.* Katalog mathem. Modelle (München 1892), S. 335.

Burnside, W. [1]* *Solution of the question 2732.* Educational times 10 (1868), 96.

Callegari, P. [1] *Equazioni generali ai luoghi geometrici.* Atti acc. Nuovi Lincei (Roma) 7 (1856), 179—218.

Cardano, G. [1]* *Exaereton mathematicorum* (Basel 1572) = *Opera mathem.* 4 (Lyon 1663) 560—561.

de Cardenas, A. R. [1] *Intorno all' epicicloide sferica.* Giorn. di matem. 12 (1874), 313—320.

v. Cardinal. [1] *Über Anwendung und Zeichnung der Cycloide, Epi- und Hypocycloide.* Polytechn. Journal 35 (1830), 329—332.

Caswell, J. [1] *The quadrature of a portion of the epicycloid.* Phil. trans. Royal soc. (London) 19 (1695), 113—114.

Cesàro, E. [1] *Sur l'équation intrinsèque des courbes.* Mathesis 4 (1884), 233—235. — [2] *Questions proposées.* Nouv. ann. de mathém. 4_3 (1885), 448—454. — [3] *Sur l'emploi des coordonnées intrinsèques.* Nouv. ann. de mathém. 5_3 (1886), 127—142. — [4] *Remarque de géométrie infinitésimale.* Mathesis 7 (1887), 25—38. — [5] *Développantes du point.* Mathesis 8 (1888), 36—38. — [6] *Sur deux classes remarquables de lignes planes.* Nouv. ann. de mathém. 7_3 (1888), 171

—190. — [7] *Remarques sur l'osculation.* Nouv. ann. de mathém. 9_3 (1890), 143—157. — [8] *Question 478.* L'interméd. des mathém. 2 (1895), 23—24. — [9] *Geometria intrinseca* (Napoli 1896). — [10] *Sur la représentation analytique des régions et des courbes qui les remplissent.* Bullet. d. sc. mathém. 21_2 (1897), 257—266.

Chasles, M. [1] *Sur quelques courbes remarquables.* Correspond. mathém. phys. 7 (1831), 41—43. (Auszug Mathesis 6_2, 1896, 113). — [2] *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* (Bruxelles 1837).

Clairaut, A. C. [1]* *Recherches sur les courbes à double courbure* (Paris 1731). — [2] *Des épicycloidales sphériques.* Mém ac. Paris 1732, 289—294. — [3] *De la spirale d'Archimède.* Mém. ac. Paris 1740, 148—154.

Collignon, E. [1] *Problème de mécanique.* Assoc. franç. 11 (1882), 127—144.

Copernikus, N. [1]* *Der evolutionibus orbium coelestium* (Nürnberg 1543), Lib. 3 Cap. 4.

Cotterill, T. [1] Educ. times 3 (1865).

Cranz, C. [1] *Theoretische und experimentelle Untersuchungen über die Kreiselbewegung der rotierenden Langgeschosse.* Zeitschr. für Mathem. 43 (1898), 169—215.

„Crut". [1] *Question 1936.* L'interméd. des mathém. 7 (1900), 330.

Curran Sharp, W. J. [1] *On the successive evolutes of a curve.* Mess. of mathem. 9_2 (1880), 95—99.

Curtze, M. [1] *Über einen de la Hire zugeschriebenen Lehrsatz.* Biblioth. Mathem. 2_2 (1888), 65—66. — [2] *Mathematisch-historische Miscellen 1.* Biblioth. Mathem. 9_2 (1895), 33—34.

Dahl, W. [1] *Beitrag zur Theorie der Epicykeln* (Diss. Jena 1888).

Darboux, G. [1] *Sur le tautochronisme quand on a égard au frottement.* Bullet. d. sc. mathém. 3_2 (1879), 484—488.

Delaunay, N. [1] *Über die mechanische Erzeugung der orthogonalen Projektionen ebener Kurven, der Ellipsen und der Trochoiden.* Zeitschr. für Mathem. 40 (1895), 242—244.

Dieu, T. [1] *Note sur les épicycloides.* Nouv. ann. de mathém. 19 (1860), 125—129.

Drach, S. M. [1] *An easy rule for formulizing all epicyclical curves with one moving circle by the binominal theorem.* Philos. mag. 34_2 (1849), 444—448; 520—523; 35_2 (1849), 487—490.

v. Drake, A. [1] *Tankar om krokota lineers nytta uti konster ock wetenskaper.* Handl. Svenska Vet.-Acad. (Stockholm) 1742, S. 1—9.

Dürer, A. [1]* *Unterweysung der Messung mit dem Zirckel und Richtscheyt* (Nürnberg 1525). — [2] *Institutiones geometricae* (Arnhem 1606) I, S. 37.

Duporcq, E. Q. [1] *Solution de la question 56.* L'interméd. des mathém. 1 (1894), 243—244. — [2] *Solution de la question 895.* L'interméd. des mathém. 3 (1896), 291—292.

Duraeus, S. [1] *Demonstration på en geometrisk construction [som stöder sig på egenskaper af cycloider och epicycloider].* Handl. Svenska Vet.-Acad. (Stockholm) 1751, 39—42.

Durège, H. [1] *Über eine besondere Art cyclischer Kurven.* Vierteljahrschrift Naturf. Ges. Zürich 8 (1863), 127—140 = Zeitschr. für Mathem. 9 (1864), 209—217.

Eberenz, J. B. [1]* *Erste Gründe der Epicyclometrie* (Freiburg 1777).

Eckardt, F. E. [1] *Einige Sätze über die Epicycloide und Hypocycloide.* Zeitschr. für Mathem. 15 (1870), 129—134. — [2] *Über die Epicycloide und Hypocycloide.* Zeitschr. für Mathem. 18 (1873), 319—323.

Eggers, H. [1] *Über die Bestimmung der Kurven durch ein System zwischen dem Krümmungsradius und dem der Evolute* (Pr. Norden 1882).

Eichler, C. [1] *Die Darstellung der cyclischen Kurven und ihre Bedeutung für die Schwingungstheorie.* Mitt. Mathem. Ges. Hamburg **2** (1890), 92—105.

Ekama, H. [1] *Die ebenen und sphaerischen cycloidalen Kurven.* Arch. d. Mathem. 7_2 (1889), 207—224 (Übersetzung der Abhandlung: **De sferische cycloidale lijnen.* Nieuw Archief voor Wisk. (Amsterdam) **17** (1889), 32—57.)

Elvius, P. [1] *Vetenskapernas historia. Om krokuga linier.* Handl. Svenska Vet.-Akad. (Stockholm) 1748, 81—95.

Enneper, A. [1] *Zur Theorie der Kurven doppelter Krümmung.* Mathem. Ann. **19** (1881), 72—84.

Espanet. [1] *Propriété de l'épicycloide:* L'interméd. des mathém. **7** (1900), 264.

v. Ettingshausen, A. [1] *Über die ebenen Kurven, welche ihren Evoluten ähnlich sind.* Zeitschr. für Phys. und Mathem. (Wien) **9** (1831), 178—193.

Euler, L. [1] *Investigatio curvarum, quae evolutae sui similes producent.* Comm. ac. Petr. **12** (1750), 3—52. — [2] *Demonstratio teorematis Bernoulliani.* Nov. comm. ac. Petr. **10** (1766), 179—198. — [3] *De curva rectificabili in superficie sphaerica.* Nov. comm. ac. Petr. **15** (1771), 195—216. — [4] *De duplici genesi tam epicycloidum quam hypocycloidum.* Acta ac. Petr. **5**:1 (1784), 48—59. — [5] *Investigatio curvarum quae similes sunt suis evolutis.* Nov. acta ac. Petr. **1** (1787), 75—116.

Eytelwein, P. A. [1] *Theorie derjenigen transcendenten krummen Linien, welche vorzüglich bei statischen Untersuchungen vorkommen.* 2. Aufl. (Berlin 1832), S. 22—49.

Fabri, R. [1] *Sulle curve cicloidale.* Atti acc. Nuovi Lincei (Roma) **10** (1857), 225—235. — [2] *Alcuni teoremi risguardanti la rettificazione e quadratura delle cicloidali.* Atti acc. Nuovi Lincei (Roma) **11** (1858), 399—404.

Faure, H. [1] *Extrait d'un mémoire sur la transformation des courbes.* Mém. ac. Montpellier **2** (1854), 463—478.

Ferrers, N. [1] *On the tangential polar equation to a curve.* Quart. journ. of mathem. **1** (1857), 210—218.

Fouret, G. [1] *Sur les épicycloides.* Bullet. soc. philomath. (Paris) 6_5 (1868), 80—93. — [2]* *Sur les épicycloides.* L'institut (Paris) **36** (1868), 182—183, 189—192. — [3] *Sur la double génération des épicycloides.* Nouv. ann. de mathém. 8_2 (1869), 162—168. — [4] *Sur les courbes planes transcendantes susceptibles de faire partie à un système* (μ, ν). Bullet. soc. mathém. de France **2** (1874), 96—100. — [5] *Questions.* Nouv. ann. de mathém. 19_2 (1880), 63—68. — [6] *Sur le lieu des centres des moyennes distances d'un point d'une épicycloide ordinaire.* Comptes rendus (Paris) **115** (1892), 1055—1056.

Françoise, E. [1] *Lettera a Bellavitis.* Atti istit. Veneto 1_4 (1872), 430—436.

Fuss, N. [1] *Decas problematum geometricarum ex methodo tangentium inversa radium osculi spectantium.* Mém. ac. Pétersbourg 1_5 (1809), 88—118. — [2] *De cycloidibus in superficie sphaerae descriptis.* Mém. ac. Pétersbourg 8_5 (1822), 161—175.

van Geer, P. [1]* *De methode van Roberval.* Nieuw Arch. voor Wisk. (Amsterdam) **11** (1884), 28—45.

Gigon. [1] *Exercices sur les roulettes extérieures et intérieures dans les courbes planes.* Nouv. ann. de mathém. 7_2 (1868), 462—471.

Gilbert, P. [1]* *Sur l'enveloppe de la droite qui joint les extrémités des aiguilles d'une montre.* Ann. soc. scient. Bruxelles **4** (1879), 139—142.

Gildemeister, S. H. [1] *De lineis curvis epicycloidibus et hypocycloidibus* (Diss. Marburg 1866).

Glaisher, J. W. L. [1] Proced. London mathem. soc. **4** (1873), 341.

Gob, A. [1] *Question.* Mathesis **8** (1888), 119—120 (avec Meurice). — [2] *Question 510.* L'interméd. des mathém. **2** (1895), 129. — [3] *Question 1239.* L'interméd. des mathém. **5** (1898), 32.

Godin, L. [1] *Des apparences du mouvement des planètes dans un épicycle.* Mém. ac. Paris 1733, 285—295.

Grane, N. [1] *Über Kurven mit gleichartigen successiven Developpoiden* (Diss. Lund 1894), 18, 58.

Günther, S. [1] *Albrecht Dürer, einer der Begründer der neueren Kurventheorie.* Biblioth. Mathem. 1886, 137—140.

Guyou, E. [1] *Cinématique et dynamique des ondes courantes sur un sphéroide liquide.* Journ. de mathém. 5_3 (1879), 79—106.

Habich, E. [1] *Sur une question des roulettes.* Mathesis **6** (1886), 103—106.

Hachette, J. N. P. [1] *Des épicycloides sphériques.* Corresp. école polyt. (Paris) **2** (1813), 22—28.

Halley, E. [1] *Propositio generalis arcuum dimensionem exhibens in universo illo curvarum genere quae revolutione aequabili circuli super basin quamvis vel rectilineam vel circularem describi possint.* Phil. trans. Royal soc. (London) **19** (1695), 125—128.

Hallström, M. F. [1] *Afhandling om cycloidkurvorna* (Diss. Lund 1856). — [2]* *Epi- och hypertrochoider och några andra slag af rullkurvor* (Umeå 1861).

van der Harst, A. D. [1] *Formeln für die Krümmung eines Systems von ebenen Kurven in krummlinigen Koordinaten.* Nieuw Arch. voor Wisk. (Amsterdam) 4_2 (1899), 226—242.

Hâton de la Goupillière. [1] *Sur les centres de gravité.* Bullet. soc. philomath. (Paris) 5_5 (1867), 79—81. — [2] *Sur le tautochronisme des épicycloides.* Bullet. soc. philomath. 6_5 (1868), 65—66. — [3] *Théorème sur le tautochronisme des épicycloides quand on a égard au frottement.* Comptes rendus (Paris) **66** (1868), 533—537; Journ. de mathém. 13_2 (1868), 205—208; L'institut **36** (1868), 149. — [4] *Recherches sur les centres de gravité.* Journ. éc. polytechn. cah. **43** (1870), 125—155. — [5] *Formules nouvelles pour l'étude du mouvement d'une figure plane.* Journ. éc. polyt. cah. **45** (1878), 103—172. — [6] *Détermination du centre des moyennes distances des centres de courbure des développées successives d'une ligne plane quelconque.* Comptes rendus (Paris) **115** (1892), 856—861. — [7] *Solution de la question 1239.* L'interméd. des mathém. **5** (1898), 234—235.

van Hengel, J. [1] *Über Cycloiden* (Diss. Rostock 1870).

Hennig, R. [1] *Zur Theorie der ebenen Rouletten.* Journ. für Mathem. **65** (1866), 52—61.

Hermann, J. [1] *De epicycloidibus in superficie sphaerae descriptis.* Comment. ac. Petrop. **1** (1728), 210—217.

van Heulen, J. [1]* *Mechanische beschouwingen over eenige kromme lijnen.* Nieuw Archief voor Wisk. (Amsterdam) **7** (1881), 33—58.

Hicks, W. M. [1] *Notes on pedals.* Mess. of mathem. 6_2 (1877), 94—96.

Hirst, W. P. [1] *On the magical equation to a tangent of a curve.* Quart. journ. of mathem. **6** (1864), 31—38.

de la Hire, P. [1] *Traité des épicycloides et de leur usage dans les mécaniques.* Anc.

mém. ac. Paris 9 (1694), 221—294. — [2] *Traité des roulettes.* Mém. ac. Paris 1706, S. 340—379.

Hoffmann, O. [1] *Über sphärische Kurven* (Diss. Göttingen 1876).

Holditch, H. [1] *On the n-th evolutes and involutes of curves.* Quart. journ. of mathem. 3 (1860), 236—246.

Holst, E. [1] *Über algebraische cycloidische Kurven.* Archiv for Mathem. og Naturvidenskab (Christiania) 6 (1882), 125—152.

Holzmüller, G. [1] *Die Haupteigenschaften der cyclischen Kurven in elementarer Behandlung* (Hagen 1875).

de L'Hôpital, H. F. [1] Histoire ac. Paris 2 (1695), 162.

Huber, G. [1] *Konforme Abbildung eines Kreises auf das Innere einer Epicycloide.* Mitteil. Naturf. Ges. Bern, 1891, 41—55.

Humbert, G. [1] *Sur les courbes algébriques rectifiables.* Comptes rendus (Paris) 104 (1887), 1051—1053. — [2] *Sur l'orientation de systèmes de droites.* Amer. journ. of mathem. 10 (1888), 258—281. — [3] *Sur les courbes algébriques rectifiables.* Journ. de mathém. 4_4 (1888), 133—152. — [4] *Sur l'orientation des systèmes de droites.* Nouv. ann. de mathém. 12_3 (1893), 37—64.

Hyde, E. W. [1]* *Foliate curves.* Analyst (Desmoines) 2 (1875), 12—14.

Janisch, E. [1] *Verallgemeinerung des Entstehungsgesetzes der Fufspunktkurven.* Arch. d. Mathem. 8_2 (1889), 171—183.

Jeffery, H. M. [1]* *On the rectificable spherical epicycloid.* Rep. Brit. Assoc. 52 (1882), 453—454. — [2] *On spherical cycloidal and trochoid curves.* Quart. journ. of. mathem. 19 (1883), 44—66. — [3] *On a tangential property of regular epicycloids and hypocycloids.* Proc. Royal Soc. (London) 34 (1883), 105—112.

Jerabek, V. [1]* *Über polarreciproke Kurven von Epicycloiden* (Pr. Brünn 1892). — [2] *Courbes polaires réciproques des épicycloides et hypocycloides.* Mathesis 9_2 (1899), 105—111.

Jorini, A. F. [1] *Le linee isocline delle superficie di rotazione.* Il politecnico (Milano) 37 (1889), 505—511.

Juel, C. [1] *Question 56.* L'interméd. des mathém. 1 (1894), 22. — [2] *Solution de la question 211.* L'interméd. des mathém. 1 (1894), 206. — [3] *Solution de la question 56.* L'interméd. des mathém. 1 (1894), 243. — [4] *Solution de la question 431.* L'interméd. des mathém. 2 (1895), 396.

Kauffmann, E. F. [1] *Theorie und graphische Darstellung der ebenen und sphärischen Epicycloiden sammt ihren Anwendungen auf Zahnräderwerke* (Stuttgart 1850; 2. Aufl. 1883).

Kessler, O. [1] *Darstellung der Kegelschnitte als Rouletten, deren Basis eine Gerade ist* (Diss. Jena 1869).

Kiepert, L. [1] *Über Epicycloiden und Hypocycloiden und daraus abgeleitete Kurven.* Zeitschr. für Mathem. 17 (1872), 129—146.

Kies, J. [1] *Diss. de motu lunae epicycloidoli* (Tübingen 1771).

Laisant, C. A. [1] *Solution de la question 54.* Nouv. corresp. mathém. 5 (1879), 209—211.

Léauté, K. E. V. J. [1] *Note sur le tracé des engrenages par arcs de cercle, perfectionnement de la méthode de Willis.* Bullet. soc. mathém. de France 4 (1876), 99—110; Mém. ac. Toulouse 8_7 (1878), 353—370.

Lecornu, L. [1] *Engrenages à épicycloides et à développantes.* Comptes rendus (Paris) 86 (1878), 1371—1374.

van Leeuwen, J. H. [1]* *Verdeeling van den hoek in een willekeusig aantal gelijke deelen.* Nieuw Archief voor Wiskunde (Amsterdam) **7** (1881), 213.

Leibniz, G. et Bernoulli, Joh. *Commercium philosophicum et mathematicum* I—II (Lausanne 1745).

Leneveu. [1] *Tracé des engrenages épicycloïdiques.* Assoc. franç. **4** (1875), 166.

Lenthéric, J. [1] *Solution générale du problème des roulettes.* Mém. ac. Montpellier **2** (1851), 1—20.

Lepaige, C. M. M. J. [1] *Sur un théorème attribué à La Hire.* Biblioth. Mathem. $\mathbf{1}_2$ (1887), 109.

Lexell, A. J. [1] *De epicycloidibus in superficie sphaerica descriptis.* Acta ac. Petrop. **3**:1 (1782), 49—71.

v. Littrow, J. J. [1] *Disquisitiones ad theoriam epicyclorum pertinentes.* Mém. ac. Pétersb. $\mathbf{7}_5$ (1820), 80—109.

Löfmark, J. M. [1]* *De proprietatibus nonnullis geometricis et mechanicis epicycloidis planae* (Lund 1830).

Loucheur, L. [1] *Sur le lieu des sommets des angles circonscrits ou normaux à une épicycloïde.* Nouv. ann. de mathém. $\mathbf{11}_3$ (1892), 374—384.

Maclaurin, C. [1]* *An account of Sir Isaac Newton's philosophical discoveries* (London 1748).

Magold, M. [1]* *Abhandlung von der Epicycloide* (Landshut 1813).

Mallock, A. [1] *On curves circumscribing rotating polygons with reference to the shape of drilled holes.* Proc. Royal soc. (London) **35** (1883), 319—324.

Mannheim, A. [1] *Limaçon de Pascal.* Nouv. ann. de mathém. **15** (1856), 289. — [2] *Recherches géométriques relatives au lieu des positions successives des centres de courbure d'une courbe qui roule sur une droite.* Journ. de mathém. $\mathbf{4}_2$ (1859), 93—104. — [3] *Construction du centre de courbure des épicycloïdes.* Nouv. ann. de mathém. **18** (1859), 371—376. — [4] *Recherches géométriques sur les longueurs comparées d'arcs de courbes différentes.* Journ. éc. polytechn. cah. **40** (1863), 205—230. — [5] *Sur le déplacement d'un double cône.* Comptes rendus (Paris) **111** (1890), 634—636. — [6] *Solution de la question 1329.* L'interméd. des mathém. **5** (1898), 234.

Mansion, P. [1] *Question 410.* Nouv. corresp. mathém. **4** (1878), 302—303. — [2] *Principes de la théorie des développoïdes des courbes planes.* Nouv. corresp. mathém. **5** (1879), 357—363.

Marten, F. [1] *Die Rolllinien und die Brennlinie durch Zurückwerfung* (Pr. Ostrowo 1869).

Masdea, A. [1]* *Studio sulle epicicloidi* (Napoli 1892).

de Maupertuis, P. L. M. [1] *Quadrature et rectification des figures formées par le roulement de polygones reguliers.* Mém. ac. Paris 1727, 204—213.

Mayer, K. [1] *Zwei Cycloidenapparate* (Katalog mathem. Modelle, München 1892, S. 231).

Menesson. [1] Mathesis **5** (1885), 192.

Merkelbach, W. [1] *Über Rollkurven, welche von einer Geraden eingehüllt werden* (Diss. Marburg 1881).

Miller, W. J. C. and Sircom, S. [1]* *Solution of question 8137.* Educ. times **46** (1887), 27—28.

Molenbroek, P. [1] *Solution de la question 455.* Mathesis **6** (1886), 191—192.

de Montessus. [1] *Question 1358.* L'interméd. des mathém. **5** (1898), 221.

Moret-Blanc. [1] Nouv. ann. de mathém. $\mathbf{15}_2$ (1876), 69—72.

Morley, F. [1] *On the epicycloid.* Amer. journ. of mathem. **13** (1891), 179—184. — [2] *On adjustable cycloidal and trochoidal curves.* Amer. journ. of mathem. **16** (1894), 188—204. — [3]* *Note on common tangents of two similar cycloidal curves.* Bull. Amer. mathem. soc. $\mathbf{2}_2$ (1895—96), 111—116. — [4] *On the metric geometry of the plane n-line.* Trans. Amer. mathem. soc. **1** (1900), 97—115.

Napier, J. R. [1]* *Displacement of ships with trochoid waterlines.* Trans. Glasgow instit. of engin. **9** (1866), 165—169.

Nasir Eddin Attusi. [1]* *Comment on peut résoudre plusieurs des difficultés, relatives aux mouvements des étoiles.* Trad. par C. de Vaux (Recherches sur l'hist. de l'astr. ancienne par P. Tannery, 1893, S. 348—359).

Natani, L. [1] *Mathematisches Wörterbuch* VII (1867), S. 36. — [2] *Über Zahnräder.* Repertor. für Experimentalphysik **4** (1868), 205—215.

Neuberg, J. [1] *Question 455.* Mathesis **5** (1885), 167. — [2] *Solution de la question 56.* L'interméd. des mathém. **1** (1894), 243—244.

Newton, I. [1] *Philosophiae naturalis principia mathematica* (London 1687).

Nicole, F. [1] *Méthode générale pour déterminer la nature des courbes formées par le roulement de toutes sortes de courbes sur une autre courbe quelconque.* Mém. ac. Paris 1707, 81—97. — [2] *Méthode générale pour rectifier toutes les roulettes à bases droites et circulaires.* Mém. ac. Paris 1708, 86—89. — [3] *Manière de déterminer la nature des roulettes formées sur la superficie convexe d'une sphère.* Mém. ac. Paris 1732, 271—288.

Öringhaus, E. [1] *Die elliptischen Integrale der Bewegung eines schweren Punktes in in einer vertikalen Parabel.* Arch. d. Mathem. $\mathbf{7}_2$ (1889), 34—53.

Olivier, T. [1] *Construction des centres de courbure des épicycloides planes et sphériques.* Journ. éc. polyt. cah. **23** (1834), 85—152. — [2] *Recherches géométriques sur les centres de courbure des épicycloides planes et sphériques et les développantes sphériques* (Thèse, Paris 1834).

Onnen, H. [1]* *Aanteckningen betreffende de theorie der essentielle vergelijkingen der vlakke krommen lijnen.* Nieuw Arch. voor Wisk. (Amsterdam) **4** (1878), 30—56; **5** (1879), 1—34. — Franz. Übersetzung: [2] *Note concernant la théorie des équations essentielles des courbes planes.* Archives néerland. (Harlem) **14** (1879), 1—75.

„Onponale". [1] *Question 547.* L'interméd. des mathém. **2** (1895), 150.

Painvin, L. F. [1]* *Principes de géométrie analytique* I (Paris 1866).

Pellet, A. E. C. *Correspondance.* Journ. de mathém. spéc. $\mathbf{4}_4$ (1895), 207.

Pellis. [1]* *Propiété nouvelle de l'épicycloide.* Bullet. soc. philomath. Bordeaux $\mathbf{2}_2$ (1857).

Pirker, J. [1] *Einleitung in die kinematische Geometrie* (Hildesheim 1877).

Pirondini, G. [1] *Rettifica di un teorema.* Giornale di matem. **23** (1885), 222—230. — [2] *Sulla similitudine delle curve.* Annali di matem. $\mathbf{15}_2$ (1887), 53—66. — [3] *Alcuni quistioni sulle evolute successive di una linea piana.* Rendic. acc. Napoli $\mathbf{5}_2$ (1891), 139—150.

Plettner, [1] *Epi- und Hypocycloidenzirkel.* Repert. f. Experimentalphysik **11** (1875), 24—28.

Proctor, R. A. [1] *A treatise on the cycloid and all forms of cycloidal curves* (London 1878).

Puiseux, V. [1] *Problème sur les développées et les développantes des courbes planes.* Journ. de mathém. **9** (1844), 377—399. — [2] *Sur les courbes tautochrones.* Journ. de mathém. **9** (1844), 409—421.

Purriss, H. [1] *Note on pedal coordinates.* Mess. of mathem. **3** (1866), 83—88.

Purser, F. [1] *Notes on rolling curves.* Quart. journ. of mathem. **7** (1866), 129—135.

Raabe, J. L. [1] *Allgemeine Theorie der Epicykeln.* Journ. für Mathem. **1** (1826), 289—301.

Ramaswami Aiyar. [1]* *Question.* Educ. times **65** (1895).

Rankine, W. J. M. [1] *On the approximate graphic measurement of elliptical and trochoidal arcs.* Phil. mag. $\mathbf{29}_4$ (1865), 22—25.

Reincke, E. F. J. A. [1] *Über cyclische Kurven* (Progr. Malchin 1892).

Reinemund, F. [1] *Note sur l'équation de l'épicycloide.* Bull. ac. Bruxelles $\mathbf{39}_2$ (1875), 73—75.

Resal, H. [1]* *Sur les épicycloides.* Mém. soc. émul. Besançon $\mathbf{4}_2$ (1853), 120 ff. — [2] *Mémoire sur les propriétés géométriques du mouvement le plus général d'un corps solide.* Journ. éc. polyt. cah. **37** (1858), 227—271. — [3] *Sur quelques applications du théorème de Savary relatif aux enveloppes des courbes planes.* Nouv. ann. de mathém. $\mathbf{1}_3$ (1882), 7—15.

Reuleaux, F. [1] *Grundzüge der theoretischen Maschinengetriebslehre.* Verhandl. des Vereins zur Beförderung des Gewerbfl. in Preussen **51** (1872), 171—184. — [2] *Modelle zur Darstellung der sphaerischen Cycloiden.* Verh. d. Ver. z. Bef. d. Gewerbefl. **55** (1876), 321—326, 448—450. — [3] *Über das Verhältniss von Geometrie, Mechanik und Kinematik.* Zeitschr. Deutsch. Ingen. **24** (1880). — [4] *Sammlung von kinematischen Modellen* (Katalog mathem. Modelle, München 1892, S. 335—340).

Reusch, E. [1] *Krümmungsgesetze der sphärischen Kurven, besonders der sphärischen Evolvente* (Pr. Heilbronn 1838).

Rheticus, G. J. [1]* *De libris Copernici narratio prima* (Danzig 1590), Blatt 17^b—18^a.

Ribaucour, A. [1] *Sur les courbes enveloppes de cercles et les surfaces enveloppes de sphères.* Bullet. soc. philomath. $\mathbf{6}_5$ (1868), 30—35 (vgl. auch Nouv. corresp. mathém. **5** (1879), 263, 314).

Ridolfi, L. [1]* *Di alcuni usi delle epicicloidi* (Firenze 1844).

Rittershaus, T. [1] *Über Ellipsographen.* Verhandl. d. Ver. für Gewerbefl. in Preussen **53** (1874), 269—300. — [2] *Verzahnungsmodelle* (Katalog math. Modelle, München 1892, S. 346—347).

Roberts, R. A. [1] *On the rectification of certain curves.* Proc. London mathem. soc. **18** (1887), 97—129.

Roberts, S. [1] *Note on the plückerian characteristics of epi- and hypotrochoids and allied curves.* Proc. London mathem. soc. **4** (1873), 353—356.

Root, O. [1]* *Notes on the hypocycloid.* Mathem. monthly **1** (1859), 133—134.

„Rosace". [1] *Question 475.* L'interméd. des mathém. **2** (1895), 22.

Rouquet, V. [1] Nouv. ann. de mathém. $\mathbf{6}_2$ (1867), 380—383.

Rulf, W. [1] *Neuer Satz über die Cycloide.* Arch. d. Mathem. $\mathbf{13}_2$ (1895), 92—95.

Ruoss, H. [1] *Die metrischen Beziehungen der Krümmung reciproker Flächen und Kurven, sowie der Flächeninhalte der letzteren.* Math.-nat. Mitt. (Stuttgart) **4** (1891), 46—69, 73—92.

Sacchi, G. [1] *Sulla geometria analitica delle linee piane* (Pavia 1854).

Sang, E. [1] *On the solution of Perigal's problem concerning the contact of epicycloidical curves.* Proc. Royal soc. Edinburgh **5** (1866), 338—340. — [2] *On the contact of the loops of epicycloidical curves.* Trans. Royal soc. Edinburgh **24** (1867), 121—126.

de Saussure, R. [1] *Sur la génération des courbes par roulement* (Diss. [Baltimore]

Genève 1895). — [2] *Note sur les lignes cycloidales.* Amer. journ. of mathem. 17 (1895), 269—272.

Schilling, F. [1] *Über neue kinematische Modelle, sowie eine neue Einführung in die Theorie der cyclischen Kurven.* Zeitschr. für Mathem. **44** (1899), 214—227. — Französische Übersetzung: [2] *Nouveaux modèles cinématiques et introduction nouvelle à la théorie des courbes cycloidales.* L'enseignement mathém. **2** (1900), 31—48.

Schlömilch, O. [1] *Über die graphische Rektifikation und Transposition von Kreisbögen, sowie über die Konstruktion cyclischer Kurven.* Zeitschr. für Mathem. **2** (1857), 330—334.

Schölcher. [1] *Théorie générale des hélices.* Assoc. franc. **20** (1891), I:160.

Schreiner, J. [1] *Über diejenige Kardioide, bei welcher die Ebenen des rollenden und des festen Kreises aufeinander senkrecht stehen bleiben* (Progr. Kempten 1896).

af Schultén, N. [1]* *Dissertatio de epicycloidi simplici* (Abo 1772).

Serret, P. [1]* *Des méthodes en géométrie* (Paris 1855), 139—140. — [2]* *Théorie nouvelle géométrique et mécanique des lignes à double courbure* (Paris 1860).

Siacci, F. [1] *Sul teorema del conte di Fagnano.* Bull. di bibliogr. d. sc. matem. **3** (1870), 1—26.

Slaby, A. [1] *Ein Beitrag zur Kenntniss der Ellipsographen.* Verh. Ver. f. Gewerbefl. Preussen **55** (1876), 327—336.

Sohncke, L. [1] Encyclopädie der Wissenschaften und Künste von Ersch Gruber **35** (1841), 338—373, Artikel *Epicycloide.*

Spott, M. [1] *Apparat zur Erzeugung einer Cycloide* (Katalog math. Modelle, München 1892, 230—231).

Steiner, J. [1] *Über den Krümmungsschwerpunkt ebener Kurven.* Journ. für Mathem. **21** (1890), 33—63, 101—133.

Streinz, F. [1]* *Über Cycloiden* (Pr. Troppau 1869).

Svechnikow, P. [1] *Sur la polaire réciproque de l'épicycloide.* Journ. de mathém. spéc. 4_3 (1890), 146—149, 169—170. — [2] *Les courbes et les surfaces épitrochoïdales.* Journ. de mathém. spéc. 4_3 (1890), 217—220. — [3]* [Epitrochoidale Flächen; Verallgemeinerung der Eigenschaften der epitrochoidalen Flächen]. Bull. Phys. Math. Kasan 1_2 (1891), Nr. 2, 166—177, 178—184.

Tacquet, A. [1]* *De circulorum volutione per planum* (Antwerpen 1651).

Terquem, O. [1] *Théorie générale des épicycles* (Übersetzung der Abhandlung von Raabe). Nouv. ann. de mathém. **5** (1846), 35—42.

Tischleder. [1] *Disquisitiones analyticae de curvis spiralibus* (Diss. München 1830).

Thallmayer, V. [1] *Apparat zum Anreissen von Epicycloiden- und Hypocycloidenbögen.* Polyt. Journal **228** (1878), 312—314.

Townsend, R. and Wolstenholme, J. [1]* *Solution of the question 3957.* Educ. times **19** (1874), 36—38.

Trognitz, B. [1] *Über einige Kurven auf dem Rotationsellipsoid der Kugel und der Merkatorschen Projektionsebene bei konformem Zusammenhang dieser Flächen* (Diss. Jena 1883).

Tschumi, J. [1] *Ein Beitrag zur Geschichte und Discussion der Cycloiden* (Diss. Bern 1892).

Tucker, R. [1] *Curves whose evolutes are similar to themselves.* Mess. of mathem. **3** (1866), 191—192.

Unwin, W. C. [1]* *Elements of machine design* (2d ed. London 1882).

Vanecek, J. S. [1] *Raumepicycloiden.* Sitz.-Ber. Ac. Wien **83**:2 (1881), 69—91.

Verdam, G. J. [1] *Note sur une manière particulière de déterminer les équations des lignes courbes en faisant usage de la décomposition et de la composition des vitesses suivant les règles de la dynamique.* Arch. d. Mathem. **11** (1848), 13—25.

Viktor, A. [1] *Die Polkreispaare einer Cycloide.* Zeitschr. für Mathem. **25** (1880), 263—271.

Voigt, W. [1] *Beiträge zur Hydrodynamik.* Gött. Nachr. 1891, 37—84.

Walton, W. [1] *The area of the cycloid.* Cambr. and Dublin mathem journ. **9** (1854), 263—264.

Wargny, C. [1] *Question 1680.* L'interméd. des mathém. **6** (1899), 266.

Waring, E. [1]* *Proprietates algebraicarum curvarum* (Cambridge 1772).

Weber, F. [1] *Die Theorie des Anorthoscops und der Anorthoscopischen Figuren.* Zeitschr. für Mathem. **12** (1867), 133—169.

Weisbach, L. J. [1]* *Lehrbuch der Ingenieurmathematik.* I—III (3. Aufl., Braunschweig 1860).

Weissenborn, H. [1] *Die cyclischen Kurven* (Eisenach 1856).

Wetzell, O. [1] *Die cyclischen Kurven als Einhüllungskurven eines beweglichen Kreises* (Diss. [Marburg] Kassel 1880).

Whewell, W. [1] *Of the intrinsic equation of a curve.* Trans. Cambr. philos. soc. 8 (1849), 659—671.

Wiener, C. [1] *Doppelte Entstehungsweise der geschweiften und verschlungenen cyclischen Kurven.* Zeitschr. für Mathem. **26** (1881), 257—263. — [2] *Die Evoluten der geschweiften und verschlungenen cyclischen Kurven.* Zeitschr. für Mathem. **27** (1882), 129—140.

Williamson, B. and Wolstenholme, J. [1] *Solution of a question.* Educ. times **19** (1874), 79—80.

Wilson, J. [1] *On parallel motions.* Proceed. Royal soc. Edinburgh **9** (1876), 161—170.

Wölffing, E. [1] *Bibliographie des épicycloides.* L'interméd. des mathém. **5** (1898), 235—238; **6** (1899), 11—12. — [2] *Über Pseudotrochoiden.* Zeitschr. für Mathem. **44** (1899), 139—166.

Wollseife. [1]* *Über die Hypocycloide* (Pr. Jülich 1870).

Wolstenholme, J. [1] *On epicycloids and hypocycloids.* Proc. London mathem. soc. **4** (1873), 321—327. — [2] *On a locus of the point of concourse of the perpendicular tangents to a cardioide.* Proc. London mathem. soc. **4** (1873), 327—330. — [3]* *Solution of a question.* Educ. times **54** (1891), 68—70.

Zehme. [1] *Elementare und analytische Behandlung der verschiedenen Cycloiden* (Iserlohn und Elberfeld 1854).

„Un ancien élève". [1] *Mémoire sur les développantes successives d'une courbe plane.* Ann. de mathém. **9** (1818), 73—90.

„Un abonné". [1] *Note sur la théorie des épicycloides.* Nouv. ann. de mathém. **4** (1845), 83—89.

Nachruf an Oskar Schlömilch.

Von MORITZ CANTOR in Heidelberg.

Mein jüngst verstorbener Freund und Redaktionsgenosse OSKAR XAVER SCHLÖMILCH wurde den 13. April 1823 in Weimar geboren. Der Vater, Kammermusikus in der Grofsherz. Kapelle, verlor 1835 die innig geliebte Gemahlin am Typhus, und auch das einzige Kind lag damals an der gleichen Krankheit lebensgefährlich und bewufstlos darnieder. Seiner Erziehung lebte von nun an sein Vater, der keine neue Ehe mehr schlofs. OSKAR SCHLÖMILCH bezog in selten frühem Alter die Universität. Er studierte in Jena, Berlin und Wien, und bereits am 12. August 1842, im Alter von $19\frac{1}{3}$ Jahren, legte er in Jena das Doktorexamen ab. Ebendort habilitierte sich SCHLÖMILCH 1844 als Privatdozent der Mathematik, ebendort wurde er 1845 zum aufserordentlichen Professor ernannt. Das Jahr 1849 brachte seine Berufung nach Dresden als Professor der höheren Mathematik und der analytischen Mechanik am Polytechnikum, in welcher Stellung SCHLÖMILCH 25 Jahre hindurch mit glänzendem Lehrerfolge thätig war. In Dresden gründete SCHLÖMILCH sich ein eigenes Heim. Er hatte schon längere Zeit im Hause des Rates ASMUS in Weimar verkehrt und sich mit der jüngsten Tochter PAULINE verlobt. Die Dresdner Anstellung gestattete 1850 die Verheiratung. Das kluge und feinsinnige



Dr. O. Schlömilch.

Mädchen wurde eine eben solche Frau und brachte dem reichen Geiste ihres Gatten ein tiefes Verständnis entgegen, so dafs die Ehe die glücklichste zu nennen war, bis der Tod 1897 sie trennte und SCHLÖMILCH die treue Lebensgefährtin verlor. Die Ehe war kinderlos geblieben. Dafür war die Schwägerin SCHLÖMILCHS mit einem vierjährigen Töchterchen 1853 nach Dresden gezogen und bildete mit dem jungen Ehepaar ein wahrhaft ideales Familienleben. Die kleine Anna fand in dem Onkel einen zweiten Vater, und es war ihr vergönnt, auch nachdem sie selbst verheiratet war, in gleichem Hause mit SCHLÖMILCH lebend Kindespflichten an ihm auszuüben. Wir haben oben gesagt, SCHLÖMILCH habe die Dresdner Professur 25 Jahre lang inne gehabt. Im Jahre 1874 wurde ihm eine ihn dem Lehramte entziehende Stellung angeboten. Briefe aus jener Zeit zeugen dafür, wie sehr SCHLÖMILCH mit sich kämpfte, wie schwer es ihm wurde der ihm so lieben Lehrthätigkeit zu entsagen, wie er sich den Rücktritt nach einer gewissen Zeit immer als möglich und ohne grofse Schwierigkeit ausführbar dachte. Mit diesem stillen Vorbehalte trat SCHLÖMILCH Ende Oktober 1874 als Geh. Schulrat in das Kön. sächsische Ministerium des Kultus und öffentlichen Unterrichts über, hier die Leitung des Realschulwesens übernehmend, „so eine Art von Minister der Mathematik" nannte er in einem Privatbriefe sein Amt in gewohnt scherzhafter Redewendung. Etwa 11 Jahre lang, bis 1885 verwaltete SCHLÖMILCH dieses Amt, dann trat er mit dem Titel Geheimer Rat in den Ruhestand, d. h. er ging zur freien durch keinerlei Berufsthätigkeit gestörten wissenschaftlichen Arbeit über, denn ein unthätiges Leben zu führen wäre für den rastlosen Arbeiter ein Ding der Unmöglichkeit gewesen. Nur die letzten Lebensjahre, nachdem ein Schlaganfall ihn getroffen, bildeten für SCHLÖMILCH eine Zeit trägen Leidens, welcher am 7. Februar 1901 der Tod ein Ende machte. SCHLÖMILCH war Ritter verschiedener Orden, Mitglied verschiedener wissenschaftlicher Körperschaften, z. B. der Schwedischen Akademie der Wissenschaften und der Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig. Innerhalb der Kais. deutschen Akademie Leopoldina-Carolina, welcher er seit 1863 angehörte, war er von 1876 an eine Reihe von Jahren hindurch Obmann der Fachsektion für Mathematik und Astronomie.

Die an raschen Beförderungen reiche Laufbahn SCHLÖMILCHS zeugt dafür, dafs er nicht blofs ein glänzender Lehrer war, als welchen zahllose Schüler ihn weit und breit rühmten, sondern auch ein Schriftsteller von hervorragenden Verdiensten. Es grenzt ans Unglaubliche, was SCHLÖMILCH, abgesehen von mehr als 200 gröfseren und kleineren Abhandlungen in den verschiedensten Zeitschriften, allein an zusammenhängenden Druckschriften der Öffentlichkeit übergeben hat, und welchen Erfolg diese

Schriften hatten, beweist die Anzahl der Auflagen, in welchen einzelne erscheinen durften. Die *Algebraische Analysis* von 1845 erlebte 1881 ihre 6. Auflage. Sie war es, welche den jungen Privatdocenten in Jena mit einem Schlage zu einem bekannten und geschätzten Schriftsteller machte. Mit dem mathematischen Unterrichte auf deutschen Hochschulen war es 1845 im Ganzen noch übel bestellt. Wohl waren in Königsberg FRANZ NEUMANN, HESSE und RICHELOT, in Berlin DIRICHLET, C. G. J. JACOBI und STEINER, in Breslau KUMMER, in Göttingen STERN thätig, während ebendort GAUSS nur selten dazu zu bringen war eine Vorlesung zu halten. Aber was wollten vier Universitäten, darunter die so abgelegenen Königsberg und Breslau, für ganz Deutschland bedeuten? Das Studium der Mathematik bedurfte einer Auffrischung, eines Anstofses durch ein Buch, welches überall zu erhalten war und daher auch überall die Überzeugung verbreiten konnte, es gehe nicht mehr mit den sorglosen Entwickelungsarten, wie sie hergebrachte Übung lehrte, mathematische Strenge sei etwas ganz anderes als was man an den meisten Orten dafür ausgab. Ein solches Buch war SCHLÖMILCHS *Algebraische Analysis.* Sie war allerdings in Anlehnung an CAUCHYS *Analyse algébrique* von 1821 entstanden, aber in ihrer Ausarbeitung ein durchaus selbständiges eigenartiges Werk geworden, eigenartig auch durch die erfrischende Grobheit der in der Vorrede sowohl als in Fufsnoten sich kundgebenden Angriffe gegen das, was wir als Sorglosigkeit der Entwicklung bezeichnet haben. In den späteren Auflagen hat SCHLÖMILCH die polemischen Abschweifungen allmählich gestrichen. Sie waren nicht mehr notwendig, aber dafs sie entbehrlich wurden, ist unzweifelhaft eine Folge der durch die erste Auflage vollzogenen Aufrüttelung der deutschen Mathematiker. Wir stehen darum nicht an, die *Algebraische Analysis* von 1845 als dasjenige Buch zu bezeichnen, durch welches SCHLÖMILCH mehr als durch irgend eine andere Leistung in der Geschichte der Mathematik fortleben wird. Wir glauben aus diesem Grunde die übrigen Lehrbücher SCHLÖMILCHS in kürzerer Übersicht nennen dürfen: Eine *Differentialrechnung* 1846, eine *Integralrechnung* 1848, *Grundzüge einer wissenschaftlichen Darstellung der Geometrie des Mafses* 1849 (6. Auflage 1883), *Compendium der höheren Analysis* 1853 (5. Auflage 1881), *Analytische Geometrie des Raumes* 1855 (6. Auflage 1898), *Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis* 1870 (3. Auflage 1882). Den Charakter von Monographien haben die *Analytische Studien* 1848, *Theorie der Differenzen und Summen* 1848, *Neue Methode zur Summierung endlicher und unendlicher Reihen* 1849, *Allgemeine Umkehrung gegebener Funktionen* 1849, *Mathematische Abhandlungen* 1850, *Die Reihenentwickelungen der Differential- und Integralrechnung* 1851, *Der Attraktionscalcül* 1851. Auch *fünfstellige Logarithmentafeln* gab SCHLÖMILCH heraus, die in oft

wiederholten Auflagen an vielen Schulen in Anwendung kamen. Von den zahlreichen mathematischen Entdeckungen, welche aus diesen Monographien und aus Abhandlungen in den Allgemeinbesitz der Mathematiker übergingen, nennen wir vorzugsweise die SCHLÖMILCHsche Form des Restgliedes der TAYLORschen Reihe, Untersuchungen über den Integralsinus und Integralcosinus (beide Namen von SCHLÖMILCH eingeführt), Sätze über Gammafunktionen, Sätze über die BERNOULLIsche Funktion. Endlich haben wir als eine wissenschaftlich erfolgreiche That die Gründung der Zeitschrift für Mathematik und Physik zu nennen, zu welcher SCHLÖMILCH sich 1856 mit WITZSCHEL verband, und deren Leitung er bis 1896 mit sicherer Hand führte. Wir dürfen wohl hinzufügen, dafs nach WITZSCHELS Tode M. CANTOR in die Schriftleitung eintrat, der 1875 im XX. Bande die bis dahin 'Litteraturzeitung' genannte zweite Abteilung zur 'Historisch-litterarischen Abteilung' erweiterte. E. KAHL war 1860 bis 1892 mehr dem Namen als der Sache nach an der Leitung beteiligt. R. MEHMKE trat 1897 an SCHLÖMILCHS Stelle, und 1900 wurde die Zeitschrift unter freiwilliger Ausscheidung M. CANTORS durch R. MEHMKE und C. RUNGE zum Organe für angewandte Mathematik und Physik umgewandelt.

Was SCHLÖMILCHS persönlichen Charakter betrifft, so war der Verfasser seines Nachrufes durch 40jährige Mitarbeit an der gleichen Zeitschrift wohl in der Lage ihn kennen zu lernen. SCHLÖMILCH war ein guter Mensch und ein treuer Mensch, mitunter etwas aufbrausend, wie gute Menschen es so oft sind, aber nicht nachtragend. Sein Humor, seine fliefsende Beredsamkeit machten ihn zu einem ungemein liebenswürdigen Gesellschafter und mögen ihren Teil zu seiner Beliebtheit als Lehrer beigetragen haben. Seine wunderbare Arbeitskraft läfst sich aus der Fülle der schriftstellerischen Leistungen, welche wir zu nennen wufsten, ermessen. Sein Organisationstalent bewährte sich aufs glänzendste in dem ihm anvertrauten Amte. Was er ergriff, dem widmete er sich mit gleichem Eifer, mit gleichem Erfolge. Die Erinnerung an ihn wird darum in den verschiedensten Kreisen lebendig bleiben.

Verzeichnis der Schriften von O. Schlömilch.*)

1841.

Untersuchungen über Projectionen und neuere Geometrie. Arch. der Mathem. 1, 1841, 248—254.

---

*) Dieses Verzeichnis ist von der Redaktion der Bibliotheca Mathematica hinzugefügt worden.

Entwickelung einiger Formeln aus der Theorie der bestimmten Integrale. Arch. der Mathem. **1**, 1841, 263—268.

Über Bernoulli'sche Zahlen und die Coëfficienten der Secantenreihe. Arch. der Mathem. **1**, 1841, 360—363.

Zur Theorie der bestimmten Integrale. Arch. der Mathem. **1**, 1841, 417—422.

Einige Eigenschaften der Binominalcoëfficienten. Arch. der Mathem. **1**, 1841, 431—434; **2**, 1842, 434—439.

1842.

Siehe 1841.

1843.

Beiträge zur Theorie bestimmter Integrale. Jena, Fromann 1843. 4°, VII + 113 S.

Über die recurrirende Bestimmung der Bernoulli'schen Zahlen. Arch. der Mathem. **3**, 1843, 9—18.

Über die Methode der unbestimmten Coëfficienten und verwandte Gegenstände. Arch. der Mathem. **3**, 1843, 269—277.

Über die Integration unendlicher Reihen. Arch. der Mathem. **3**, 1843, 278—283.

Einige Sätze von Sechsecken, welche in oder um einen Kegelschnitt beschrieben sind. Arch. der Mathem. **3**, 1843, 386—388.

Allgemeines Theorem für die Verwandlung einer Function in eine unendliche Reihe. Arch. der Mathem. **3**, 1843, 400—403.

1844.

Theorema Taylorianum. Dissertatio inauguralis mathematica. Jena 1844. 4°, 13 S.

Über einige durch bestimmte Integrale summirbare Reihen. Arch. der Mathem. **4**, 1844, 23—38.

Über einige bestimmte Integrale, deren Werthe durch doppelte Integration gefunden werden. Arch. der Mathem. **4**, 1844, 71—75.

Einiges über die Euler'schen Integrale der zweiten Art. Arch. der Mathem. **4**, 1844, 167—174.

Über die Zerlegung der bestimmten Integrale in andere von kleineren Integrationsintervallen. Arch. der Mathem. **4**, 1844, 316—329.

Über die höheren Differentialquotienten einiger Functionen. Arch. der Mathem. **4**, 1844, 364—373.

Entwickelung einer sehr brauchbaren Reihe. Arch. der Mathem. **4**, 1844, 431—435.

Analytische Aphorismen. Arch. der Mathem. **5**, 1844, 90—101.

Neues Theorem über eine gewisse Klasse periodischer Functionen. Arch. der Mathem. **5**, 1844, 152—155.

Über einige merkwürdige bestimmte Integrale. Arch. der Mathem. **5**, 1844, 204—212.

Über die Reihen, welche den Cosinus und Sinus durch Potenzen des Bogens ausdrücken. Arch. der Mathem. **5**, 1844, 326—330.

Gegen Herrn Doctor Barfuss [über Reihen]. Arch. der Mathem. **5**, 1844, 374—400.

Über den zweiten Aufsatz des Herrn Doctor Barfuss: „Einige Bemerkungen über die Reihen, mit besonderer Hinweisung auf die Exponential- und Binomialreihe." Arch. der Mathem. **5**, 1844, 437—442.

1845.

Handbuch der algebraischen Analysis. Jena, Fromann 1845. 8°.

Zweite, völlig umgearbeitete Auflage. Jena, Fromann 1851. 8°, VIII + 344 S. + 1 Tafel.

Dritte verbesserte und durch einen Anhang vermehrte Auflage. Jena, Fromann 1862. 8°, VIII + 414 S.
Vierte Auflage. Jena, Fromann 1868. 8°, VII + 424 S.
Fünfte Auflage. Jena, Fromann 1873. 8°, VIII + 428 S.
Sechste Auflage. Jena, Fromann 1881. 8°, VIII + 413 S.
Sechste Auflage. Zweiter Druck. Stuttgart, Fromann 1888. 8°, VIII + 413 S.

Über die Verwandlung der Quadratwurzeln in unendliche periodische Kettenbrüche. Arch. der Mathem. **6**, 1845, 147—150.

Über einige Integrale, welche goniometrische Functionen involviren. Arch. der Mathem. **6**, 1845, 200—205.

Ein Paar allgemeine Eigenschaften der Euler'schen Integrale zweiter Art. Arch. der Mathem. **6**, 1845, 213—222.

Ist $\int \frac{dx}{x} = lx + const.$ *oder* $= \frac{1}{2} l(x^2) + const.?$ Arch. der Mathem. **6**, 1845, 326—328.

1846.

Handbuch der Differential- und Integralrechnung. Erster Theil. *Differentialrechnung.* Greifswald, Otte [1846—]1847. Zweiter Theil. *Integralrechnung.* Greifswald, Otte 1848. 8°. **I**: (2) + VIII + (4) + XIX + 327 S. + 2 Taf. — **II**: 214 S. + 1 Taf.

Über das Integral $\int_0^\infty e^{-ax} \sin^m x\,dx$. Arch. der Mathem. **7**, 1846, 38—45.

Über das von Herrn Clausen angegebene Theorem. Arch. der Mathem. **7**, 1846, 46—47.

Allgemeine Sätze für eine Theorie der höheren Differentialquotienten. Arch. der Mathem. **7**, 1846, 204—214.

Über die Integrale $\int_0^\infty \frac{\cos bx}{x^2 - a^2}\,dx$ *und* $\int_0^\infty \frac{x \sin bx}{x^2 - a^2}\,dx$. Arch. der Mathem. **7**, 1846, 270—273.

Metrische Relationen im Gebiete der perspectivischen Projection. Arch. der Mathem. **7**, 1846, 274—283.

Ein Theorem über Facultäten. Arch. der Mathem. **7**, 1846, 331—333.

Über Legendre's Theorem von den Euler'schen Integralen zweiter Art. Arch. der Mathem. **7**, 1846, 348—353.

Über die Verwandlung der Functionen einer Veränderlichen in Reihen, welche nach steigenden Potenzen dieser Veränderlichen fortschreiten. Arch. der Mathem. **7**, 1846, 353—358.

Über die Bewegung eines schweren Punctes auf einer krummen Linie. Arch. der Mathem. **8**, 1846, 157—165.

Über die höheren Differenzialquotienten des Ausdrucks $(x^2 + ax + b)^{-(\mu+1)}$. Arch. der Mathem. **8**, 1846, 357—364.

Über die höheren Differentialquotienten beliebiger Functionen des Logarithmus. Arch. der Mathem. **8**, 1846, 427—433.

Théorèmes généraux sur les dérivées d'un ordre quelconque de certaines fonctions très générales. Journ. für Mathem. **32**, 1846, 1—7.

Développement d'une formule qui donne en même temps les nombres de Bernoulli et les coefficients de la série qui exprime la sécante. Journ. für Mathem. **32**, 1846, 360—364.

Note sur la variation des constantes arbitraires d'une intégrale définie. Journ. für Mathem. **33**, 1846, 268—280.

Note sur quelques intégrales définies. Journ. für Mathem. **33**, 1846, 316—324.

Sur l'intégrale définie $\int_0^\infty \frac{d\vartheta}{\vartheta^2 + a^2} \cdot e^{-x^2\vartheta}$. Journ. für Mathem. **33**, 1846, 325—328.

Développement de quelques intégrales définies, renfermant des fonctions trigonométriques. Journ. für Mathem. **33**, 1846, 353—361.

1847.

Ein Paar goniometrische Sätze. Arch. der Mathem. **9**, 1847, 1—4.

Bemerkung zur Theorie des Integral-Logarithmus. Arch. der Mathem. **9**, 1847, 5—8, 307—313.

Über quadrirbare Figuren auf cylindrischen Flächen. Arch. der Mathem. **9**, 1847, 149—158.

Über die näherungsweise Berechnung eines bestimmten Integrales. Arch. der Mathem. **9**, 1847, 215—219.

Über die höheren Differentialquotienten der Potenzen des Cosinus. Arch. der Mathem. **9**, 1847, 313—315.

Relationen zwischen den Facultätencoëfficienten. Arch. der Mathem. **9**, 1847, 333—335.

Über eine in der Wahrscheinlichkeitsrechnung vorkommende analytische Aufgabe. Arch. der Mathem. **9**, 1847, 372—379.

Allgemeine Reductionsformel für gewisse bestimmte Integrale. Arch. der Mathem. **9**, 1847, 379—383.

Eine geometrische Anwendung der Lehre vom Grössten und Kleinsten. Arch. der Mathem. **9**, 1847, 448—453.

[Über die Aufgabe: Zwei Grössen zu finden, deren Differenz, Quotient und Quadratsumme einander gleich sind.] Arch. der Mathem. **9**, 1847, 456.

Zur Differentiation der Potenz. Arch. der Mathem. **10**, 1847, 42—45.

Über eine eigenthümliche Erscheinung bei Reihensummirungen. Arch. der Mathem. **10**, 1847, 45—53.

Über eine besondere Gattung algebraischer Functionen. Arch. der Mathem. **10**, 1847, 67—74.

Über die Differentiation unendlicher Reihen. Arch. der Mathem. **10**, 1847, 74—77.

Einige Betrachtungen aus der höheren Geometrie. Arch. der Mathem. **10**, 1847, 215—221.

Mein letztes Wort gegen Herrn Doctor BARFUSS. Arch. der Mathem. **10**, 1847, 321—325.

[Über die Summe der Reihe $1^n + 2^n + 3^n + 4^n \cdots + r^n$.] Arch. der Mathem. **10**, 1847, 342—344.

Über einige arithmetische Sätze. Arch. der Mathem. **10**, 1847, 424—428.

Allgemeine Transformationsformeln für gewisse Integrale. Arch. der Mathem. **10**, 1847, 440—449.

1848.

Analytische Studien. Erste Abtheilung: *Theorie und Tafel der Gammafunctionen nebst deren wichtigsten Anwendungen.* Zweite Abtheilung: *Die* FOURIER'*schen Reihen und Integrale nebst deren wichtigsten Anwendungen.* Leipzig, Engelmann 1848. 8°, 207 + IV + 197 S.

Theorie der Differenzen und Summen. Ein Lehrbuch. Halle, Schmidt 1848. 8°, VI + 241 S.

Über die singulären Werthe bestimmter Integrale. Arch. der Mathem. **11**, 1848, 63—69.

Über ein Paar Doppelintegrale. Arch. der Mathem. **11**, 1848, 174—180.

Über die Complanation des elliptischen und hyperbolischen Paraboloides. Arch. der Mathem. **11**, 1848, 233—239.

Über die Differentiation der Exponentialgrössen und des Logarithmus. Arch. der Mathem. **11**, 1848, 386—389.

Über den Integralsinus und Integralcosinus. Arch. der Mathem. **11**, 1848, 389—395.

Über die independente Bestimmung der Facultätencoëfficienten. Arch. der Mathem. **11**, 1848, 445—449.

Nouvelle démonstration des théorèmes de Fourier. Journ. für Mathem. **36**, 1848, 268—270. — Italienische Übersetzung siehe **1850.**

Transformations de quelques intégrales définies. Journ. für Mathem. **36**, 1848, 271—276.

1849.

Die allgemeine Umkehrung gegebener Functionen. Eine Monographie. Halle, Schmidt 1849. 8°, 56 S.

Grundzüge einer wissenschaftlichen Darstellung der Geometrie des Maasses. Ein Lehrbuch. Theil 1. Geometrie der Ebene. Eisenach, Bärecke 1849. 8°, XXIV + 216 S. + 5 Taf. — Holländische Übersetzung von J. C. Eger und H. Onnen, italienische Übersetzung von D. Gambioli und V. Bernardi (1891).

Zweite Auflage. Eisenach, Bärecke 1854. 8°, VII + 247 S.

Dritte Auflage. Planimetrie und Ebene Trigonometrie. Eisenach, Bärecke 1859. 8°, VIII + 261 S.

Vierte Auflage. Eisenach, Bärecke 1868. 8°, VII + 261 S.

Fünfte Auflage. Leipzig, Teubner 1874. 8°, VII + 254 S.

Sechste Auflage. Heft 1, 2. Leipzig, Teubner 1883. 8°, **1**: VI + 162 S. — **2**: VI + 97 S.

Siebente Auflage. Heft 1. Leipzig, Teubner 1888. 8°, VI + 163 S.

— — — Theil 2. Geometrie des Raumes. Eisenach, Bärecke 1854. 8°, XII + 256 S.

Zweite Auflage. Eisenach, Bärecke 1862. 8°, VII + 275 S.

Dritte Auflage. Leipzig, Teubner 1874. 8°, VII + 266 S.

Neue Methode zur Summirung endlicher und unendlicher Reihen. Arch. der Mathem. **12**, 1849, 130—166. — Auch besonders herausgegeben (Greifswald, Koch 1849; 37 S. 8°).

Über eine Fläche vierten Grades. Arch. der Mathem. **12**, 1849, 193—198.

Über das Integral $\int_0^\infty \frac{x^\mu\,dx}{r^2 + 2rx\cos u + x^2}$. Arch. der Mathem. **12**, 1849, 198—203.

Über eine transcendente Gleichung, welcher keine complexe Zahl genügt. Arch. der Mathem. **12**, 1849, 293—297.

Über die höheren Differentialquotienten der Tangente. Arch. der Mathem. **12**, 1849, 297—304.

Bemerkung über die Continuität der Functionen. Arch. der Mathem. **12**, 1849, 430—432.

1850.

Mathematische Abhandlungen. 1. Über das Theorem von Mac Laurin. 2. Die Bürmann'sche Reihe. 3. Über approximative Quadraturen. 4. Über ein Doppelintegral mit zwei willkührlichen Funktionen. 5. Über die Bestimmung der Masse bei ungleichförmiger Dichtigkeit. Dessau, Katz 1850. 8°, 151 S. + 1 Tafel.

Nuova dimostrazione dei teoremi di Fourier. Annali di sc. matem. **1**, 1850, 513—516. — Übersetzung (siehe **1848**).

Zur Elementaren Quadratur des Kreises. Arch. der Mathem. **14**, 1850, 101—104.

Bemerkung über die Convergenz der Reihen. Arch. der Mathem. **14**, 1850, 105—107.

Zur Theorie der Reihen. Arch. der Mathem. **14**, 1850, 146—153.

Über die elementare Cubatur der Flächen zweiten Grades. Arch. der Mathem. **14**, 1850, 154—161.

Über die Bestimmung eines häufig vorkommenden Grenzwerthes. Arch. der Mathem. **14**, 1850, 452—454.

Über die Bestimmung des Grenzwerths von $\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots\sqrt{s}}{s\sqrt{s}}$ *für unendlich wachsende Werthe der Zahl s.* Arch. der Mathem. **14**, 1850, 454—456.

1851.

Der Attractionscalcül. Eine Monographie. Halle, Schmidt 1851. 8°, 58 S. + 1 Tafel.

Die Reihen-Entwicklungen der Differential- und Integralrechnung. Dresden, Schönfeld 1851. 4°, 39 S. + 1 Tafel.

Elementare Ableitung der Reihe für die Berechnung des Bogens aus seiner Tangente. Arch. der Mathem. **16**, 1851, 230—234.

Bemerkung zu dem Aufsatze [über die continuirliche Function und ihre Abgeleiteten]. Arch. der Mathem. **16**, 1851, 235—237.

Neue Formeln zur independenten Bestimmung der Secanten- und Tangentencoëfficienten. Arch. der Mathem. **16**, 1851, 411—418. — Französische Übersetzung siehe **1857**.

Développement de deux formules sommatoires. Journ. für Mathem. **42**, 1851, 125—130.

(Neue Auflage des „Handbuches der algebraischen Analysis", siehe **1845**.)

1852.

Sur quelques intégrales multiples. Annali di sc. matem. **3**, 1852, 327—339.

Über die independente Bestimmung der Coëfficienten unendlicher Reihen und der Facultätencoëfficienten insbesondere. Arch. der Mathem. **18**, 1852, 306—327.

Zur Differenzenrechnung. Arch. der Mathem. **18**, 1852, 381—390.

Über die Substitution neuer Variabelen in unbestimmte und bestimmte Integrale. Arch. der Mathem. **18**, 1852, 391—399.

Zur Theorie der Kettenbrüche. Arch. der Mathem. **18**, 1852, 416—419.

Über die Auflösung von Functionsgleichungen. Berichte d. Sächs. Gesellsch. d. Wiss. (Leipzig) **4**, 1852, 27—34.

Recherches sur les coefficients des facultés analytiques. Journ. für Mathem. **44**, 1852, 344—355.

Note sur le théorème de Taylor. Nouv. ann. de mathém. **11**, 1852, 177—182.

1853.

Compendium der höheren Analysis. [Band 1.] Braunschweig, Vieweg 1853. 8°, XVI + 549 + (1) S.
Zweite völlig umgearbeitete und vermehrte Auflage. Band 1. Braunschweig, Vieweg 1862. 8°, XII + 559 S.
Dritte verbesserte Auflage. Band 1. Braunschweig, Vieweg 1869. 8°, XIV + 564 S. — Vgl. **1873.**
Vierte Auflage. Band 1. Braunschweig, Vieweg 1874. 8°, XIII + 566 S.
Fünfte Auflage. Band 1. Braunschweig, Vieweg 1881. 8°, XIII + 566 S.
— — — Band 2. Vorlesungen über einzelne Theile der höheren Analysis, gehalten am Polytechnikum zu Dresden. Braunschweig, Vieweg 1866. 8°, VIII + 540 S.
Zweite verbesserte Auflage. Braunschweig, Vieweg 1874. 8°, VIII + 540 S.
Dritte Auflage. Braunschweig, Vieweg 1879. 8°, VIII + 546 S.
Vierte Auflage. Braunschweig, Vieweg 1895. 8°, X + 596 S.
Über ein neues Verfahren zur Entwickelung der elliptischen Functionen. Berichte d. Sächs. Gesellsch. d. Wiss. (Leipzig) **5**, 1853, 25—27.
Remarques sur le calcul des dérivées des fonctions x^a et a^x. Nouv. ann. de mathém. **12**, 1853, 31—33.

1854.

Über das vollständige Viereck. Berichte d. Sächs. Gesellsch. d. Wiss. (Leipzig) **6**, 1854, 4—13.
Neue Theoreme über unendliche Reihen. Berichte d. Sächs. Gesellsch. d. Wiss. (Leipzig) **6**, 1854, 127—133.
Über Kettenbrücken von durchaus gleicher Sicherheit. Der Civilingenieur **1**, 1854, 110—113.
(Zweiter Theil und neue Auflage des ersten Theils der „Geometrie des Maasses", siehe **1849.**)

1855.

Lehrbuch der analytischen Geometrie.[1]) Zweiter Theil. *Analytische Geometrie des Raumes.* Leipzig, Teubner 1855. 8°, VII + 238 S.
Zweite Auflage. Leipzig, Teubner 1863. 8°, VIII + 248 S.
Dritte Auflage. Leipzig, Teubner 1872. 8°, VIII + 286 S.
Vierte Auflage. Leipzig, Teubner 1877. 8°, VIII + 286 S.
Fünfte Auflage. Besorgt von R. Heger. Leipzig, Teubner 1886. 8°, VIII + 304 S.
Sechste Auflage. Bearbeitet von R. Heger. Leipzig, Teubner 1898. VIII + 338 S.
Theorie der Kettenbrückenlinien. Programm der k. polytechnischen Schule zu Dresden. Dresden 1855. 4°, 10 S. — Vgl. **1856.**
Über die Bestimmung der Massen und der Trägheitsmomente symmetrischer Rotationskörper von ungleichförmiger Dichtigkeit. Abhandl. d. Sächs. Gesellsch. d. Wiss. (Leipzig) **4**, 1855, 377—393.
Über einige allgemeine Reihenentwickelungen und deren Anwendung auf die elliptischen Functionen. Abhandl. d. Sächs. Gesellsch. d. Wiss. (Leipzig) **4**, 1855, 395—430.
Über die Bestimmung eines Kegelschnitts durch fünf Puncte. Berichte d. Sächs. Gesellsch. d. Wiss. (Leipzig) **7**, 1855, 1—8.

---

1) Der erste Teil (*Analytische Geometrie der Ebene*) ist von O. Fort verfafst.

Über die Bestimmung der Transversalen zu vier gegebenen Geraden im Raume. Berichte d. Sächs. Gesellsch. d. Wiss. (Leipzig) **7**, 1855, 39—44.

Note sur la quadrature élémentaire du cercle. Nouv. ann. de mathém. **14**, 1855, 462—464.

1856.

Über den Satz vom Parallelogramm der Kräfte. Berichte der Sächs. Gesellsch. d. Wiss. (Leipzig) **8**, 1856, 138—143.

Über die axonometrische Projektion. Der Civilingenieur **2**, 1856, 196—199. — Vgl. **1859.**

Die Kegelschnitte als Collinearverwandte des Kreises. Zeitschr. für Mathem. **1**, 1856, 1—20.

Über eine besondere Gattung von Reihen. Zeitschr. für Mathem. **1**, 1856, 21—28.

Elementarer Beweiss, dass für positive α *und* β $\mathrm{Lim}\, \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\cdots(\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n-1)} = 0$ *sobald* $\alpha > \beta$ *und* $n = \infty$ *ist.* Zeitschr. für Mathem. **1**, 1856, 47—48.

Restbetrachtung für die Arcussinus-Reihe. Zeitschr. für Mathem. **1**, 1856, 48—49.

Lehrsätze der analytischen Geometrie. Zeitschr. für Mathem. **1**, 1856, 50—51.

Die gleichgespannte Kettenbrückenlinie. Zeitschr. für Mathem. **1**, 1856, 51—55. — Aus dem Programme vom Jahre **1855.**

Über die Entwickelung vielfacher Integrale. Zeitschr. für Mathem. **1**, 1856, 75—84.

Zur Theorie der Gammafunction. Zeitschr. für Mathem. **1**, 1856, 118—119.

Geometrische Aufgabe. Zeitschr. für Mathem. **1**, 1856, 120.

Einige trigonometrische Formeln. Zeitschr. für Mathem. **1**, 1856, 121—122.

Ein Paar Sätze vom Dreieck und Viereck. Zeitschr. für Mathem. **1**, 1856, 122.

Über die Potenzreihen und deren Reste. Zeitschr. für Mathem. **1**, 1856, 129—142.

Bemerkung über unendliche Reihen. Zeitschr. für Mathem. **1**, 1856, 180—181.

Über die Entwickelung von Arcsin x. Zeitschr. für Mathem. **1**, 1856, 181—184.

Über das bestimmte Integral $\int_0^\infty \frac{\cos 2\beta x}{a^2+x^2} e^{-\gamma^2 x^2}\, dx$. Zeitschr. für Mathem. **1**, 1856, 186—188.

Über die BERNOULLI*'sche Function und deren Gebrauch bei der Entwickelung halbconvergenter Reihen.* Zeitschr. für Mathem. **1**, 1856, 193—211.

Über die Functionen $\varphi(x) = -\int_0^x \frac{l(1-\xi)}{\xi}\, d\xi$ *und* $\psi(x) = \int_0^x \frac{l(1+\xi)}{\xi}\, d\xi = -\varphi(-x)$. Zeitschr. für Mathem. **1**, 1856, 245—250.

Über Linien von gleicher Steigung auf gegebenen Flächen. Zeitschr. für Mathem. **1**, 1856, 250—253.

Über den Beweis des Hauptsatzes der Transversalentheorie. Zeitschr. für Mathem. **1**, 1856, 317.

Über das Tangentenviereck. Zeitschr. für Mathem. **1**, 1856, 317—318.

Eine Eigenschaft der Kegelschnitte. Zeitschr. für Mathem. **1**, 1856, 319—320.

Die Oberfläche des dreiachsigen Ellipsoides und deren Schwerpunkt. Zeitschr. für Mathem. **1**, 1856, 376—379.

1857.

Über ein allgemeines Princip für Reihenentwicklungen. Berichte d. Sächs. Gesellsch. d. Wiss. (Leipzig) **9**, 1857, 11—17. — Wieder abgedruckt in der Zeitschrift für Mathem. (siehe unten).

Reduction eines vielfachen Integrales. Berichte d. Sächs. Gesellsch. d. Wiss. (Leipzig) **9**, 1857, 67—73. — Wieder abgedruckt in der Zeitschr. für Mathem. (siehe 1858). — Französische Übersetzung siehe unten.

Zur Theorie der höheren Differentialquotienten Berichte d. Sächs. Gesellsch. d. Wiss. (Leipzig) **9**, 1857, 163—180. — Wieder abgedruckt in der Zeitschr. für Mathem. (siehe 1858).

Transformation eines bestimmten Integrales. Berichte der Sächs. Gesellsch. d. Wiss. (Leipzig) **9**, 1857, 181—186.

Sur quelques intégrales elliptiques. Journ. de mathém. 2_2, 1857, 43—46.

Sur l'intégrale $\int_0^1 \frac{t^{\mu+\frac{1}{2}}(1-t)^{\mu-\frac{1}{2}}dt}{(a+bt-ct^2)^{\mu+1}}$. Journ. de mathém. 2_2, 1857, 47—49.

Réduction d'une intégrale multiple. Journ. de Mathem. 2_2, 1857, 206—212. — Übersetzung (siehe oben).

Nouvelles formules pour la détermination indépendante des coëfficients dans la série des sécantes et la série des tangentes et nombres Bernoulliens. Nouv. ann. de mathém. **16**, 1857, 27—33. — Übersetzung (siehe 1851).

Über einige elliptische Integrale. Zeitschr. für Mathem. **2**, 1857, 49—56.

Über das vollständige Viereck und das Tangentenviereck. Zeitschr. für Mathem. **2**, 1857, 56—57.

Notiz über die Entwickelung des Integrales $\int_0^1 \frac{t^{\mu+\frac{1}{2}}(1-t)^{\mu-1}dt}{(a+bt-ct^2)^{\mu+1}}$. Zeitschr. für Mathem. **2**, 1857, 67—68.

Über die analytischen Beweise des Satzes vom Parallelogramm der Kräfte. Zeitschr. für Mathem. **2**, 1857, 84—93.

Bemerkung über die Evolute der Ellipse. Zeitschr. für Mathem **2**, 1857, 117—118.

Über die Bessel'sche Function. Zeitschr. für Mathem. **2**, 1857, 137—165.

Über die Krümmungshalbmesser der Kegelschnitte. Zeitschr. für Mathem. **2**, 1857, 187—192.

Über den verallgemeinerten Taylor'schen Satz. Zeitschr. für Mathem. **2**, 1857, 269—272.

Über die Bestimmung des Krümmungshalbmessers für eine ebene Curve. Zeitschr. für Mathem. **2**, 1857, 273—274.

Über die sechs Kreise des vollständigen Vierecks. Zeitschr. für Mathem. **2**, 1857, 274—278.

Über ein allgemeines Princip für Reihenentwickelungen. Zeitschr. für Mathem. **2**, 1857, 289—298. — Abgedruckt aus den Leipziger Berichten (siehe oben).

Über die graphische Rectification und Transposition von Kreisbögen, sowie über die Construction cyclischer Curven. Zeitschr. für Mathem. **2**, 1857, 330—334.

Über eine Reihenentwickelung. Zeitschr. für Mathem. **2**, 1857, 420—421.

1858.

Über Mittelwerthe verschiedener Ordnungen. Berichte d. Sächs. Gesellsch. d. Wiss. (Leipzig) **10**, 1858, 77—81.

[Remarque sur la note de M. Roche relative à la formule de Taylor.] Journ. de mathém. **3**, 1858, 384.

Sur le changement de la variable indépendante dans les dérivées d'une fonction. Journ. de mathém. **3**, 1858, 385—390.

Reduction eines vielfachen Integrales. Zeitschr. für Mathem. **3**, 1858, 22—29. — Abgedruckt aus den Leipziger Berichten (siehe **1857**).

Über die Bewegung eines schweren Körpers auf einer Schraubenlinie. Zeitschr. für Mathem. **3**, 1858, 64.

Zur Theorie der höheren Differentialquotienten. Zeitschr. für Mathem. **3**, 1858, 65—80. — Abgedruckt aus den Leipziger Berichten (siehe **1857**).

Transformation eines bestimmten Integrales. Zeitschr. für Mathem. **3**, 1858, 115—119.

Über die approximative Darstellung gegebener Funktionen. Zeitschr. für Mathem. **3**, 1858, 124—130.

Über eine Eigenschaft gewisser Reihen. Zeitschr. für Mathem. **3**, 1858, 130—132.

Ueber eine unendliche Reihe. Zeitschr. für Mathem. **3**, 1858, 180—187.

Über die Vergleichung zwischen dem arithmetischen, dem geometrischen und dem harmonischen Mittel. Zeitschr. für Mathem. **3**, 1858, 187—189. — Französische Übersetzung siehe **1859.**

Notiz über die harmonische Reihe. Zeitschr. für Mathem. **3**, 1858, 251—252.

Über Mittelgrössen verschiedener Ordnungen. Zeitschr. für Mathem. **3**, 1858, 301—308.

Über den Quotienten zweier Facultäten. Zeitschr. für Mathem. **3**, 1858, 322—323.

Über den Grenzwerth von $n\,(a^{\frac{1}{n}}-1)$ *für* $n=\infty$. Zeitschr. für Mathem. **3**, 1858, 387—389.

Über die elementare Entwickelung der unendlichen Producte für die trigonometrischen Functionen. Zeitschr. für Mathem. **3**, 1858, 389—393.

1859.

Über den mittleren Radius des dreiaxigen Ellipsoids. Berichte d. Sächs. Gesellsch. d. Wiss. (Leipzig) **11**, 1859, 87—89. — Wieder abgedruckt in der Zeitschr. für Mathem. (siehe unten).

Über Facultätenreihen. Berichte d. Sächs. Gesellsch. d. Wiss. (Leipzig) **11**, 1859, 109—137. — Wieder abgedruckt in der Zeitschr. für Mathem. (s. unten).

Über die graphische Darstellung gegebener Winkel und regelmässiger Vielecke. Der Civilingenieur **5**, 1859, 219—221.

Über die axonometrische Projektion. Der Civilingenieur **5**, 1859, 221—222.

Moyennes géométriques, arithmétiques, harmoniques comparées. Nouv. ann. de mathém. **18**, 1859, 353—355. — Übersetzung (siehe **1858**).

Die Transformation und Auflösung der Gleichungen fünften Grades (nach Jerrard und Hermite). Zeitschr. für Mathem. **4**, 1859, 77—90.

Über die Discontinuität gewisser unendlicher Reihen. Zeitschr. für Mathem. **4**, 1859, 161—163.

Über einen allgemeinen Satz von den Flächen ebener Curven. Zeitschr. für Mathem. **4**, 1859, 163—166.

Über den mittleren Radius des dreiachsigen Ellipsoides. Zeitschr. für Mathem. **4**, 1859, 242—244. — Abgedruckt aus den Leipziger Berichten (siehe oben).

Über eine Aufgabe der Elementargeometrie. Zeitschr. für Mathem. **4**, 1859, 244—246.

Über die Bewegung eines schweren Punktes auf einer vertical stehenden Plancurve. Zeitschr. für Mathem. **4**, 1859, 300—303.

Elementare Theorie der axonometrischen Projection. Zeitschr. für Mathem. **4**, 1859, 361—365.

Über Facultätenreihen. Zeitschr. für Mathem. **4**, 1859, 390—415. — Abgedruckt aus den Leipziger Berichten (siehe oben).

Entwickelung einer neuen Reihe für die Gamma-Function. Zeitschr. für Mathem. **4**, 1859, 431—433.

Über eine transcendente Function. Zeitschr. für Mathem. **4**, 1859, 433—437.

Über die elementare Bestimmung der Trägheitsmomente. Zeitschr. für Mathem. **4**, 1859, 445—450.

(Neue Auflage der „Geometrie des Maasses", siehe **1849**.)

1860.

Ein neuer statischer Beweis für das Parallelogramm der Kräfte. Berichte d. Sächs. Gesellsch. d. Wiss. (Leipzig) **12**, 1860, 68—70.

Théorème d'inégalité sur un produit continu. Nouv. ann. de mathém. **19**, 1860, 280—281.

Bemerkung über discontinuirliche Functionen. Zeitschr. für Mathem. **5**, 1860, 55—56.

Gelegentliche Bemerkung über unendliche Reihen. Zeitschr. für Mathem. **5**, 1860, 132—136. — Französische Übersetzung siehe **1861**.

Über einen arithmetischen Satz. Zeitschr. für Mathem. **5**, 1860, 228—229.

Über das bestimmte Integral $\int_0^\infty \frac{\sin^p x}{x^q}\,dx$. Zeitschr. für Mathem. **5**, 1860, 286—292.

Über die Differentiation unendlicher Potenzenreihen. Zeitschr. für Mathem. **5**, 1860, 292—294.

Über den Integralsinus und Integralcosinus. Zeitschr. für Mathem. **5**, 1860, 294—296.

Die Integration der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Zeitschr. für Mathem. **5**, 1860, 323—345.

Über den Satz vom Parallelogramm der Kräfte. Zeitschr. für Mathem. **5**, 1860, 435—437.

1861.

Über eine Transformation unendlicher Reihen. Berichte d. Sächs. Gesellsch. d. Wiss. (Leipzig) **13**, 1861, 120—124.

Sommation de séries infinies. Nouv. ann. de mathém. **20**, 1861, 108—110, 260. — Übersetzung (siehe **1860**).

Neue Auflösung der biquadratischen Gleichungen. Zeitschr. für Mathem. **6**, 1861, 49—51.

Über einige Integralformeln. Zeitschr. für Mathem. **6**, 1861, 205—209.

Bemerkung über Curvenconstructionen. Zeitschr. für Mathem. **6**, 1861, 260—261.

Bemerkung über die Rectification der Ellipse. Zeitschr. für Mathem. **6**, 1861, 330—332.

Über die LAMBERT*'sche Reihe.* Zeitschr. für Mathem. **6**, 1861, 407—415.

Über die gleichseitig hyperbolischen Schnitte der Flächen zweiten Grades. Zeitschr. für Mathem. **6**, 1861, 418—421.

1862.

Über die Complanation der centrischen Flächen zweiter Ordnung. Berichte d. Sächs. Gesellsch. d. Wiss. (Leipzig) **14**, 1862, 23—34. — Vgl. hierzu Tageblatt deutsch. Naturforsch. **37**, 1862, 29. — Wieder abgedruckt in der Zeitschr. für Mathem. (siehe **1863**).

Über die Complanation gewisser Fusspunktflächen. Berichte d. Sächs. Gesellsch. d. Wiss. (Leipzig) **14**, 1862, 51—55. — Wieder abgedruckt in der Zeitschr. für Mathem. (siehe **1863**).

Transformation einer endlichen Reihe. Zeitschr. für Mathem. **7**, 1862, 49—50.

Über das Potential der Kugelschaale. Zeitschr. für Mathem. **7**, 1862, 207—213.

Über einige Integralformeln. Zeitschr. für Mathem. **7**, 1862, 262—264.

Über die bedingt convergirenden Reihen. Zeitschr. für Mathem. **7**, 1862, 283—284.

(Neue Auflagen des „Handbuches der algebraischen Analysis", der „Geometrie des Masses" und des „Compendiums der höheren Analysis", siehe **1845**, **1849** und **1853**.)

1863.

Über die Entwickelung von Functionen complexer Variabelen in Facultätenreihen. Berichte d. Sächs. Gesellsch. d. Wiss. (Leipzig) **15**, 1863, 58—62.

La quadrature des surfaces du 2e ordre douées de centre. Journ. de mathém. 8_2, 1863, 89—98.

[Sur la résolution des équations du quatrième degré et la transformation des fonctions.] Journ. de mathém. 8_2, 1863, 99—101.

Über die Complanation der centrischen Flächen zweiter Ordnung. Zeitschr. für Mathem. 8, 1863, 1—12. — Abgedruckt aus den Leipziger Berichten (siehe **1862**).

Über wulstförmige Flächen. Zeitschr. für Mathem. 8, 1863, 121—123.

Complanation der conischen Keilfläche. Zeitschr. für Mathem. 8, 1863, 142—145.

Über die Reduction der biquadratischen Gleichungen. Zeitschr. für Mathem. 8, 1863, 223—225.

Über die Complanation gewisser Fusspunktflächen. Zeitschr. für Mathem. 8, 1863, 225—229. — Abgedruckt aus den Leipziger Berichten (siehe **1862**).

(Neue Auflage der „Analytischen Geometrie des Raumes", siehe **1855**.)

1864.

Über die Reduction von Doppelintegralen auf Producte einfacher Integrale. Zeitschr. für Mathem. **9**, 1864, 205—209.

Über ein paar durch Gamma-Functionen ausdrückbare Integrale. Zeitschr. für Mathem. **9**, 1864, 356—358.

Die Pothenot'sche Aufgabe als algebraisches Problem. Zeitschr. für Mathem. **9**, 1864, 433—436.

1865.

Zur Berichtigung des Aufsatzes „Die wahre Gestalt der Planeten- und Cometenbahnen von C. G. Stieber". Leopoldina **5**, 1865, 37—42, 81—87.

Notiz über die Convergenz und Divergenz unendlicher Reihen. Zeitschr. für Mathem. **10**, 1865, 74—76.

Über $\int\limits_0^\infty e^{-2\beta t}\cos(\alpha^2 t^2)\,dt$ *und* $\int\limits_0^\infty e^{-2\beta t}\sin(\alpha^2 t^2)\,dt$. Zeitschr. für Mathem. **10**, 1865, 76—80.

Über einige allgemeine Integralformeln. Zeitschr. für Mathem. **10**, 1865, 152—155.

Über die näherungsweise Berechnung der Permutationszahlen. Zeitschr. für Mathem. **10**, 1865, 232—236.

Notiz über ein bestimmtes Integral. Zeitschr. für Mathem. **10**, 1865, 500—501.

Über die näherungsweise Rektifikation der Ellipse. Zeitschr. für Mathem. **10**, 1865, 501—502.

1866.

Fünfstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Braunschweig, Vieweg 1866. 8°, XXVI + 170 S. — Viele neue Auflagen; von der unveränderten Ausgabe erschien die vierte verbesserte Auflage 1891, und von einer kürzeren Ausgabe (wohlfeile Schulausgabe, IV + 151 S.) wurde die 15. Auflage 1899 herausgegeben.

Über die Complanation verschiedener Flächen. Berichte d. Sächs. Gesellsch. d. Wiss. (Leipzig) **18**, 1866, 38—45.

Über die näherungsweise Berechnung von Functionen und insbesondere des Ellipsenumfanges. Der Civilingenieur **12**, 1866, 31—38.

Die Weltanschauung Keplers. Sitzungsber. der naturwiss. Gesellsch. Isis (Dresden) 1867, 143—144.

Über ein angeblich neues Criterium für die Convergenz unendlicher Reihen. Zeitschr. für Mathem. **11**, 1866, 354—355.

Bemerkung über Doppelreihen. Zeitschr. für Mathem. **11**, 1866, 426—427.

Über das Problem der Complanation. Zeitschr. für Mathem. **11**, 1866, 505—514.

(Zweiter Band des „Compendiums der höheren Analysis", siehe **1853**.)

1867.

Bemerkung über die dekadischen Werthe der Potenzen ganzer Zahlen. Zeitschr. für Mathem. **12**, 1867, 350.

1868.

Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis. Erster Theil. Aufgaben aus der Differentialrechnung. Leipzig, Teubner 1868. 8°, VII + 264 S.

Zweite Auflage. Leipzig, Teubner 1873. 8°, VII + 287 S.

Dritte Auflage. Leipzig, Teubner 1878. 8°, VII + 308 S.

Vierte Auflage. Leipzig, Teubner 1887. 8°, VIII + 336 S.

— — — Zweiter Theil. Aufgaben aus der Integralrechnung. Leipzig, Teubner 1870. 8°, VII + 338 S.

Zweite Auflage. Leipzig, Teubner 1874. 8°, VII + 338 S.

Dritte Auflage. Leipzig, Teubner 1882. 8°, VIII + 384 S. — Eine italienische Übersetzung wurde 1884 in Neapel von A. Favilla herausgegeben.

Vierte Auflage, bearbeitet von R. Henke. Leipzig, Teubner 1900. 8°, VIII + 448 S.

Über die Wegschaffung von Wurzelgrössen aus Differentialen. Berichte d. Sächs. Gesellsch. d. Wiss. (Leipzig) **20**, 1868, 151—153.

Ein geometrisches Paradoxon. Zeitschr. für Mathem. **13**, 1868, 162.

Gelegentliche Bemerkung über die Ellipse. Zeitschr. für Mathem. **13**, 1868, 530.

(Neue Auflagen des „Handbuches der algebraischen Analysis" und der „Geometrie des Maasses", siehe **1845** und **1849**.)

1869.

Über den Werth von Arctan ($\xi + i\eta$). Zeitschr. für Mathem. **14**, 1869, 77—80.

Über einige aus Kegelschnitten abgeleitete Curven. Zeitschr. für Mathem. **14**, 1869, 158—161.

Über eine Spirale. Zeitschr. für Mathem. **14**, 1869, 162—163.

Über die harmonische Reihe. Zeitschr. für Mathem. **14**, 1869, 250—253.

(Neue Auflage des „Compendiums der höheren Analysis", siehe **1853**.)

1870.

Über rectificable Curven. Zeitschr. für Mathem. **15**, 1870, 124—126.

Über das Dirichlet'sche Paradoxon bei unendlichen Reihen. Zeitschr. für Mathem. **15**, 1870, 134—135.

Über die mehrfache Differentiation unter dem Integralzeichen. Zeitschr. für Mathem. **15**, 1870, 207—208.

Notiz über die Rectification von Curven. Zeitschr. für Mathem. **15**, 1870, 215.

Über die Anziehung eines Ellipsoides auf einen äusseren Punct. Zeitschr. für Mathem. **15**, 1870, 216.

Über die Anziehung des dreiachsigen Ellipsoides auf einen äusseren Punct. Zeitschr. für Mathem. **15**, 1870, 288.

(Zweiter Teil des „Übungsbuches", siehe **1868**.)

1871.

Festrede am 14. Mai 1871 zum 25jährigen Jubiläum des sächsischen Ingenieur-Vereins. Dresden, Türk 1871. 8°, 13 S.

Über die stereometrischen Analoga zum Fagnano'schen Satze. Berichte d. Sächs. Gesellsch. d. Wiss. (Leipzig) **23**, 1871, 13—18. — Wieder abgedruckt in der Zeitschr. für Mathem. (siehe **1872**).

Über einen anschaulichen Beweis über die Zusammensetzung zweier Drehungen eines starren Körpers um zwei parallele oder um zwei sich schneidende Achsen. Sitzungsber. der Gesellsch. Isis (Dresden) 1871, 56.

Über den Kettenbruch für tan z. Zeitschr. für Mathem. **16**, 1871, 259—260.

Über eine Kettenbruchentwickelung für unvollständige Gamma-Functionen. Zeitschr. für Mathem. **16**, 1871, 261—262.

1872.

Über eine besondere Gattung algebraischer Functionen. Berichte d. Sächs. Gesellsch. d. Wiss. (Leipzig) **24**, 1872, 26—29. — Wieder abgedruckt in der Zeitschr. für Mathem. (siehe unten).

Über die bedingt-convergirenden Reihen. Berichte d. Sächs. Gesellsch. d. Wiss (Leipzig) **24**, 1872, 327—330. — Wieder abgedruckt in der Zeitschr. für Mathem. (siehe **1873**).

Über die stereometrischen Analoga zum Fagnano'schen Satze. Zeitschr. für Mathem. **17**, 1872, 66—69. — Abgedruckt aus den Leipziger Berichten (siehe **1871**).

Über die Kettenbruchentwickelungen für Quadratwurzeln. Zeitschr. für Mathem. **17**, 1872, 70—71.

Über die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit eines Beobachtungsfehlers. Zeitschr. für Mathem. **17**, 1872, 87—88.

Über die Werthe von Arc sin $(x + iy)$ und Arc cos $(x + iy)$. Zeitschr. für Mathem. **17**, 1872, 245—248.

Über eine besondere Gattung algebraischer Functionen. Zeitschr. für Mathem. **17**, 1872, 248—251. — Abgedruckt aus den Leipziger Berichten (siehe oben).

Über einige Integrationen längs geschlossener Wege. Zeitschr. für Mathem. **17**, 1872, 347—350.

[Über die Grenze des Verhältnisses des arithmetischeu und des geometrischen Mittels einer unendlichen arithmetischen Progression.] Zeitschr. für Mathem. **17**, 1872, 520.

(Neue Auflage der „Analytischen Geometrie des Raumes", siehe **1855**.)

1873.

Théorie des intégrales et des fonctions elliptiques. Traduit de l'allemand et précédé d'une Introduction sur la théorie des fonctions d'une variable imaginaire, par J. Graindorge. Gand 1873. 8°, 220 S. — Übersetzung eines Teiles des „Compendiums der höheren Analysis".

Über einige Integrale von allgemeiner Form. Zeitschr. für Mathem. **18**, 1873, 315—319.

Über die gleichzeitige Convergenz oder Divergenz zweier Reihen. Zeitschr. für Mathem. **18**, 1873, 425—426.

Über bedingt-convergirende Reihen. Zeitschr. für Mathem. **18**, 1873, 520—522. — Abgedruckt aus den Leipziger Berichten (siehe **1872**).

(Neue Auflagen des „Handbuches der algebraischen Analysis" und des „Übungsbuches", siehe **1845** und **1868**.)

1874.

Über die Construction von Ovallinien. Zeitschr. für Mathem. **19**, 1874, 263—264.

Verallgemeinerung eines geometrischen Satzes von Fermat. Zeitschr. für Mathem. **19**, 1874, 462.

(Neue Auflagen der „Geometrie des Maasses", des „Compendiums der höheren Analysis" und des „Übungsbuches", siehe **1849**, **1853** und **1868**.)

1876.

Über Flächen von gegebenen Eigenschaften. Zeitschr. für Mathem. **21**, 1876, 75—79.

1877.

Über einige unendliche Reihen. Berichte d Sächs. Gesellsch. d. Wiss. (Leipzig), **29**, 1877, 101—105. — Wieder abgedruckt in der Zeitschr. für Mathem. (siehe **1878**).

Über die Summen von Potenzen der reciproken natürlichen Zahlen. Berichte der Sächs. Gesellsch. d. Wiss. (Leipzig) **29**, 1877, 106—109. — Wieder abgedruckt in der Zeitschr. für Mathem. (siehe **1878**).

(Neue Auflage der „Analytischen Geometrie des Raumes", siehe **1855**.)

1878.

Über die Konstruktion regelmässiger Vielecke. Der deutsche Schulmann **1**, 1878, 30.

Über einige unendliche Reihen. Zeitschr. für Mathem. **23**, 1878, 132—135. — Abgedruckt aus den Leipziger Berichten (siehe **1877**).

Über die Summen von Potenzen der reciproken natürlichen Zahlen. Zeitschr. für Mathem. **23**, 1878, 135—137. — Abgedruckt aus den Leipziger Berichten (siehe **1877**).

Bemerkungen über das vollständige Viereck. Zeitschr. für Mathem. **23**, 1878, 191—193.

Über doppelt centrische Vierecke Zeitschr. für Mathem. **23**, 1878, 193—194.

Über Tangenten und Normalen an Curvensystemen. Zeitschr. für Mathem. **23**, 1878, 337—339.

Bemerkungen über Grenzwerthe. Zeitschr. für mathem. Unterr. **9**, 1878, 192—200

Über Grenzwerthe der Functionen mehrerer Variabelen. Zeitschr. für mathem. Unterr. **9**, 1878, 356—359.

Möglichkeit und Wirklichkeit. Zeitschr. für mathem. Unterr. **9**, 1878, 427—430.

(Neue Auflage des „Übungsbuches", siehe **1868**.)

1879.

Handbuch der Mathematik, herausgegeben unter Mitwirkung von F. Reidt und R. Heger. Band 1, 2. Breslau, Trewendt 1879—1881. 8°. **1**: VIII + 662 S. + 12 Taf.; **2**: VII + 963 S. — Nach dem von Schlömilch gegebenen Plane von Reidt und Heger verfasst.

Über den verallgemeinerten Taylor'schen Satz. Berichte d. Sächs. Gesellsch. d Wiss. (Leipzig), **31**, 1879, 27—33. — Wieder abgedruckt in der Zeitschr. für Mathem. (siehe **1880**).

(Neue Auflage des „Compendiums der höheren Analysis", siehe **1853**.)

1880.

Über den verallgemeinerten Taylor'schen Satz. Zeitschr. für Mathem. **25**, 1880, 48—53. — Abgedruckt aus den Leipziger Berichten (siehe **1879**).

Einige Bemerkungen über den reciproken Werth der Gamma-Function. Zeitschr. für Mathem. **25**, 1880, 103—106.

Über das Integral $\int_0^1 (u)_n \, du$. Zeitschr. für Mathem. **25**, 1880, 117—119.

Über eine Verwandte der Gamma-Function. Zeitschr. für Mathem. **25**, 1880, 335—342.

Über den Quotienten zweier Gamma-Functionen. Zeitschr. für Mathem. **25**, 1880, 351—352.

Notiz über gewisse periodische Decimalbrüche. Zeitschr. für Mathem. **25**, 1880, 416.

Zur Schuldentilgung. Zeitschr. für mathem. Unterr. **11**, 1880, 262—264.

Über das arithmetische, das geometrische und das harmonische Mittel aus beliebig vielen Zahlen. Zeitschr. für mathem. Unterr. **11**, 1880, 361—362.

1881.

Über Summen und Produkte von Vectoren der Ellipse und verwandter Curven. Zeitschr für Mathem. **26**, 1881, 59—62.

Über simultan convergirende und divergirende Reihen. Zeitschr. für Mathem. **26**, 1881, 63—64.

Eine Eigenschaft concentrischer Ellipsen und Hyperbeln. Zeitschr. für Mathem. **26**, 1881, 135—136.

Notiz über die bedingt convergirenden Reihen. Zeitschr. für mathem. Unterr. **12**, 1881, 30—31.

Zur Bezeichnung der Binomialcoefficienten. Zeitschr. für mathem. Unterr. **12**, 1881, 423—424.

(Neue Auflagen des „Handbuches der algebraischen Analysis“ und des „Compendiums der höheren Analysis“, siehe **1845** und **1853**.)

1882.

Über Reihenentwickelungen für gewisse hyperelliptische Integrale. Berichte d. Sächs. Gesellsch. d. Wiss. **34**, 1882, 1—4. — Wieder abgedruckt in der Zeitschr. für Mathem. (siehe unten).

Notiz über gewisse elliptische Integrale. Zeitschr. für Mathem. **27**, 1882, 62—64.

Über Reihenentwickelungen für gewisse hyperelliptische Integrale. Zeitschr. für Mathem. **27**, 1882, 317—320. — Abgedruckt aus den Leipziger Berichten (siehe oben).

Zwei projectivische Sätze. Zeitschr. für Mathem. **27**, 1882, 380.

(Neue Auflage des „Übungsbuches“, siehe **1868**.)

1883.

Zur Schuldentilgungsrechnung. Zeitschr. für mathem. Unterr. **14**, 1883, 483—494.

(Neue Auflage der „Geometrie des Maasses“, siehe **1849**.)

1884.

Bemerkung über den Ellipsenquadranten. Zeitschr. für Mathem. **29**, 1884, 376—378.

Notiz über die Lambert'sche Reihe. Zeitschr. für Mathem. **29**, 1884, 384.

Über die Construction von Pseudoellipsen. Zeitschr. für mathem. Unterr. **15**, 1884, 407—413.

1885.

Eine Verallgemeinerung des binomischen Satzes. Zeitschr. für Mathem. **30**, 1885, 191—192.

Bemerkungen [zu einem aus der Potentialtheorie hergeleiteten geometrischen Satz]. Zeitschr. für Mathem. **30**, 1885, 251—253.

Ueber gewisse Scharen von Dreieckskreisen. Zeitschr. für Mathem. **30**, 1885, 301—302.

Notiz über Ungleichheiten. Zeitschr. für Mathem. **30**, 1885, 351—352.

1886.

Über die Abstände eines Punktes von drei Graden. Zeitschr. für Mathem. **31**, 1886, 64.

Über gewisse merkwürdige Punkte des Dreiecks. Zeitschr. für Mathem. **31**, 1886, 251.

Über Ungleichungen und deren geometrische Anwendungen. Zeitschr. für mathem. Unterr. **17**, 1886, 1—12.

Über die unendliche Reihe für die Zahl e. Zeitschr. für mathem. Unterr. **17**, 1886, 183—184, 277.

Lehrsätze betreffend die Abstände eines Punktes von drei Geraden. Zeitschr. für mathem. Unterr. **17**, 1886, 255—256.

(Neue Auflage der „Analytischen Geometrie des Raumes“, siehe **1855**.)

1887.

Über eine Entwickelung des Logarithmus. Berichte d. Sächs. Gesellsch. d Wiss. (Leipzig) **39**, 1887, 53—54.

Über die Basis der natürlichen Logarithmen. Zeitschr. für Mathem. **32**, 1887, 191—192.

Über den Rest der Reihe für arc sin x. Zeitschr. für Mathem. **32**, 1887, 368—369.

Betrachtungen über das Unendliche. Zeitschr. für mathem. Unterr. **18**, 1887, 161—167.

Beiträge zur algebraischen Analysis. Zeitschr. für mathem. Unterr. **18**, 1887, 561—576.

Ein stereometrisches Problem. Zeitschr. für mathem. Unterr. **18**, 1887, 580.

(Neue Auflage des „Übungsbuches", siehe **1868**.)

1888.

Eine Eigenschaft der Binomialcoefficienten. Zeitschr. für Mathem. **33**, 1888, 190—191.

Bemerkung über doppelt centrische Vielecke. Zeitschr. für Mathem. **33**, 1888, 191.

Über die Differentiation der Potenz, des Logarithmus und der Exponentialgrösse. Zeitschr. für mathem. Unterr. **19**. 1888, 81—83.

Zum Unterricht in der analytischen und der descriptiven Geometrie. Zeitschr. für mathem. Unterr. **19**, 1888, 241—246.

(Neue Auflagen des „Handbuches der algebraischen Analysis" und der „Geometrie des Maasses", siehe **1845** und **1849**.)

1889.

Hyperarithmetische und hyperharmonische Mittel nebst geometrischen Anwendungen. Zeitschr. für Mathem. **34**, 1889, 59—63.

Eine projective Eigenschaft des Pascal-Brianchon'schen Sechsecks. Zeitschr. für Mathem. **34**, 1889, 188—189.

Crelle oder Brocard? Zeitschr. für mathem. Unterr. **20**, 1889, 401—405.

Über dreifache Punkte im Dreieck. Zeitschr. für mathem. Unterr. **20**, 1889, 406—407.

1891.

Über die Durchschnitte einer Geraden und einer Curve zweiter Ordnung. Zeitschr. für Mathem. **36**, 1891, 190—191.

Über die Krümmungskreise der Kegelschnitte. Zeitschr. für mathem. Unterr. **22**, 1891, 161—168.

Über die Kubatur der Kugel und verwandter Körper. Zeitschr. für mathem. Unterr. **22**, 1891, 257—258.

1892.

Über die Inhaltsbestimmung des Fasses. Zeitschr. für mathem. Unterr. **23**, 1892, 107—109.

Notiz über Ellipsensehnen. Zeitschr. für mathem. Unterr. **23**, 1892, 250—251.

1893.

Über die Construction von Vierecken aus den Radien der Berührungskreise eines Dreiecks. Zeitschr. für Mathem. **38**, 1893, 310—313.

Drei Aufgaben über ausgezeichnete Punkte des Dreiecks. Zeitschr. für mathem. Unterr. **24**, 1893, 161—167.

Zur höheren Arithmetik. Zeitschr. für mathem. Unterr. **24**, 1893, 259—260.

Über rationale Dreiecke und Vierecke. Zeitschr. für mathem. Unterr. **24**, 1893, 401—409.

1894.

Über die Construction von Kegelschnitten aus fünf Punkten oder fünf Tangenten Zeitschr. für Mathem. **39**, 1894, 117—120.

Über die Kegelschnitte um und in ein Fünfeck. Zeitschr. für Mathem. **39**, 1894, 245—247.

Zur internationalen Sprache der Mathematik. Zeitschr. für mathem. Unterr. **25**, 1894, 100—103.

Mein letztes Wort gegen Herrn Max Simon [über die internationale Sprache der Mathematik]. Zeitschr. für mathem. Unterr. **25**, 1894, 237.

1895.

Zur Perspective des Kreises. Zeitschr. für Mathem. **40**, 1895, 56—58.

Über einen zahlentheoretischen Satz von Legendre. Zeitschr. für Mathem. **40**, 1895, 125.

(Neue Auflage des „Compendiums der höheren Analysis", siehe **1853**.)

1896.

Ueber einige unendliche Producte und Reihen. Zeitschr. für Mathem. **41**, 1896, 127—128.

1898.

(Neue Auflage der „Analytischen Geometrie des Raumes", siehe **1855**.)

1900.

(Nene Anflage des „Übungsbnches", siehe **1868**.)

Über die mathematische Terminologie.

Eine historisch-linguistische Skizze.

Von FELIX MÜLLER in Steglitz.

Wer die mathematische Litteratur der letzten Dezennien aufmerksam verfolgt hat, dem mufs die aufserordentliche Bereicherung der Nomenklatur aufgefallen sein, welche die reine und die angewandte Mathematik in der neueren Zeit erfahren haben. Man braucht nur das Inhaltsverzeichnis eines Bandes unseres Jahrbuches über die Fortschritte der Mathematik durchzublättern, um eine grofse Zahl von Kunstausdrücken zu entdecken, die uns bisher gänzlich unbekannt waren. Selbst der gelehrteste Mathematiker wird hier auf Lücken in seinem Wissen stofsen, die bei der Ausdehnung, welche unsere Wissenschaft im letzten Jahrhundert erfahren hat, zwar begreiflich sind, die er aber um so verdriefslicher empfinden möchte, als es bis jetzt leider immer noch an einem litterarischen Hilfsmittel gebricht, das uns über unbekannte Ausdrücke, über die wir uns gelegentlich zu orientieren wünschten, Auskunft zu geben geeignet wäre. Denn die letzten in Frage kommenden Wörterbücher der Mathematik, das KLÜGEL'sche und das MONTFERRIER'sche, sind über 60 Jahre alt, entsprechen also den neueren Fortschritten der Mathematik nicht mehr. Daher ist denn auch das Bedürfnis nach einem neuen mathematischen Wörterbuche schon wiederholt als ein dringendes betont worden. Da sich uns dieser Mangel bei der Begründung des oben genannten Jahrbuches ganz besonders fühlbar machte, so sah ich mich schon damals (vor mehr als dreifsig Jahren) veranlafst, ein Verzeichnis sämmtlicher mathematischen Kunstausdrücke, die mir in der durchzusehenden Litteratur verschiedener Sprachen begegneten, anzulegen, und dieses Verzeichnis sollte eventuell als Vorarbeit zu einem mathematischen Wörterbuche dienen. Meiner Sammlung von Kunstausdrücken, die in den drei Dezennien zu einem recht umfangreichen Wortschatze der mathematischen Sprache angeschwollen ist, entnahm ich kürzlich das *Mathematische Vokabularium in französischer und deutscher Sprache*[1]), das in erster Linie

1) FELIX MÜLLER, *Mathematisches Vokabularium, Vocabulaire mathématique.* I. *Français-allemand.* II. *Deutsch-französisch* (Leipzig, B. G. Teubner, 1900—1901).

eine für jeden Mathematiker unentbehrliche Ergänzung der französisch-deutschen Wörterbücher bieten soll. Dieses Vokabularium enthält mehr als zehntausend mathematische Kunstausdrücke aus der reinen und angewandten Mathematik in alphabetischer Anordnung, mit kurzen, den Begriff näher bestimmenden Merkmalen, mit Angabe der betreffenden Disziplin, sowie gelegentlichen historischen Notizen über den Ursprung des Begriffes oder des Wortes. Kann dieses Vokabularium — wie alle ähnlichen Sammelwerke — auch keinen Anspruch auf absolute Vollständigkeit machen, so enthält es doch für alle, welche die mathematische Nomenklatur studieren wollen, eine Fülle des einschlägigen Materials, wie sie bisher in keinem Buche geboten wurde.

Im folgenden werde ich versuchen, einen kurzen Überblick über die mathematische Nomenklatur zu geben, indem ich die mathematischen Kunstausdrücke nach gewissen Gesichtspunkten gruppiere, historische Angaben über die Entstehung und Entwickelung der einzelnen Gruppen einflechte und gewisse sprachliche Eigentümlichkeiten berühre, welche zu kritischen Bemerkungen Veranlassung zu geben geeignet sind. Vorauf schicke ich eine Übersicht über die Benennungen der mathematischen Disziplinen.

I. Abschnitt.

Beispiele aus der mathematischen Terminologie.

§ 1. Die Namen der mathematischen Disziplinen.

Die Wissenschaft der Mathematik gleicht einem mächtigen Baume, an dessen Stamme von unermefslichem Umfang starke Äste emporragen mit Zweigen, deren Zahl von Jahr zu Jahr sich vergröfsert. Zwar hat man im Laufe der Jahrhunderte mehrere Äste losgetrennt, auch sind mit der Zeit einige Zweige vertrocknet, doch ist der Bereich unseres Baumes immer mehr gewachsen.

Es ist hier nicht unsere Absicht, eine systematische Übersicht über die Gebiete der Mathematik zu geben; wir folgen bei der Aufzählung der Namen der mathematischen Disziplinen, soweit es möglich, der chronologischen Entstehung derselben.

Im Altertum unterschied man höchstens acht mathematische Disziplinen: die *Arithmetik* oder Lehre von den Zahlgröfsen an sich, die *Logistik* oder Rechenkunst, die *Geometrie* oder Lehre von den räumlichen Gebilden, die *Geodäsie* oder Feldmefskunst, die *Musik* oder Lehre von der Harmonie, die *Mechanik* oder Lehre von den Bewegungen und den Kräften, die *Astronomie* oder die Lehre von den Himmelskörpern und die *Optik*

oder Lehre vom Sehen.[1]) Daneben finden wir allerdings gelegentlich noch einige andere Namen für Zweige der Mathematik, wie Sphärik, Stereometrie, Astrologie, Gnomonik oder Horologie, Skenographie oder Perspektive, Tektonik, Physik etc. Die Lehre von den Himmelskörpern wechselte schon im Altertum ihren Namen. Während Plato noch das Wort *Astronomie* gebraucht, wendet sein Schüler Aristoteles ausschliefslich den Ausdruck *Astrologie* dafür an. Zwei Jahrhunderte später ersetzte Hipparch die Bezeichnung *Astrologe* durch die allgemeinere *Mathematiker*. Durch die Verwechslung der *Mathematiker* mit den *Astrologen*, den Sterndeutern, kam der Name unserer Wissenschaft in Verruf. Im Mittelalter sind *Astronomie* und *Astrologie* Synonyma, und erst nach der Renaissance verblieb der wissenschaftlichen Sternkunde der erstere Name ausschliefslich.[2]) Unter *Sphärik* verstanden die Pythagoräer die theoretische Astronomie. Die *Physik* war im Altertum ganz mit der Philosophie verschmolzen; erst Aristoteles scheidet die *Physik* von der *Metaphysik*. Seine *Meteorologie* behandelt die Erscheinungen, welche zunächst an der Sphäre der Gestirne stattfinden. Unter *Mechanik* versteht Aristoteles einen Teil der Kunst, welche dazu dient, Aporieen, d. h. schwierige Fragen und Widersprüche, zu beantworten und zu lösen.

Der Name *Algebra* verdankt seinen Ursprung dem Titel einer um das Jahr 820 von Muhammed ben Mûsâ al Chovarezmi verfafsten Werkes. *Algebra* und *Almukabala*, ursprünglich arabische Namen für Gleichungsoperationen, dienten lange zur Bezeichnung der Rechnung mit der Unbekannten. Cardano nennt die *Algebra Ars magna* (1545). Vieta unterscheidet die *Logistica speciosa*, die Buchstabenrechnung, von der *Logistica numerosa*, dem gemeinen Rechnen mit Zahlen. Der Name *Trigonometrie* stammt von Bartholomaeus Pitiscus (1595). Das Wort *Logarithmus* rührt von Neper her; die Kunst, Logarithmen zu berechnen, nannte Nic. Mercator (1668) Logarithmotechnia.

Die *analytische Geometrie* wurde 1637 von Descartes als eine Disziplin begründet; den Namen gab ihr erst Newton.

Die Kunst, den Rauminhalt eines Fafses zu bestimmen, nannte man (seit 1487) *Visierkunst*.

Werfen wir noch einen Blick in die Encyklopädieen, welche in der zweiten Hälfte des XVII. und bei Beginn des XVIII. Jahrhunderts erschienen, von Pierre Hérigone, Caspar Schott, Milliet Dechales,

1) Näheres über die von den Alten versuchte Systematik der Mathematik und über die wechselnde Bedeutung dieser Benennungen siehe in meinem Programm: *Historisch-etymologische Studien zur mathematischen Terminologie* (Berlin 1887).

2) Paul Tannery, *Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne* (Paris 1893), p. 159.

Christian Wolff u. a., so finden wir die Zahl der mathematischen Disziplinen beträchtlich vermehrt. Von der arithmetica speculativa wurde die arithmetica practica seu Logistica, supputatrix, algorithmus unterschieden, zu der die arithmetica geometrica, astronomica, rhabdologica, calcularis seu linearis, divinatoria gehörten. Die geometria elementaris umfaſste die Elemente Euklids I—VI; auſser ihr gehörte zur geometria speculativa die stereometria, trigonometria elementaris und trigonometria sphaerica. Abschnitte der geometria practica waren die euthymetria seu longimetria, epipedometria seu planimetria, stereometria seu solidometria, cyclometria, geodaesia, metamorphosis d. i. Verwandlung von Figuren und Körpern; ichnographia seu topographia, geometria subterranea oder Markscheidekunst. Zur Algebra rechnet Christian Wolff auch die analytische Geometrie, die Differentialrechnung und die Integralrechnung. Sehr umfangreich war damals die angewandte Mathematik. Zu ihr gehörten die Astronomie, theoretische und praktische, Astrologie, Kosmographie, Uranographie, Geographie, Chronologie (worunter Gnomonik oder Horographie), Mechanik oder Maschinenlehre, Statik, Hydrostatik, Hydraulik oder Hydrotechnie, Hydrographie oder Nautik (Schiffkunst), Optik, Katoptrik, Dioptrik, Perspektive, Musik oder Harmonik, Architectura civilis, Fortifikation oder architectura militaris, Pyrotechnie oder Feuerwerkerkunst.

Die *Benennung* einer Disziplin knüpft sich meist an eine für diese grundlegendes Werk an, das den neuen Titel trägt.

Von einer *Funktionentheorie* als mathematischer Disziplin war erst seit dem Erscheinen von Lagranges *Théorie des fonctions analytiques* (1797) die Rede; der Name *Funktion* rührt von Leibniz her. Die höhere Analysis, also die Differential- und Integralrechnung, wird auch *Analysis des Unendlichen* genannt. Die Bezeichnung *calculis integralis* rührt von Joh. Bernoulli her. In einem Briefe an Joh. Bernoulli (*Commerc. phil. et math. Leibnitii et Joh. Bernoulli* II, 161) sagt Leibniz, er habe diese Rechnung *calculus summatorius* genannt, dagegen mit *calculus integralis* den Algorithmus bezeichnet, durch welchen arithmetische Aufgaben in ganzen Zahlen gelöst werden. Bei den Engländern hieſs anfänglich die Differentialrechnung *methodus fluxionum*, die Integralrechnung *methodus fluxionum inversa*. Eulers *Introductio in analysin infinitorum* (1748) enthält nicht die Infinitesimalrechnung, sondern auſser der analytischen Geometrie alle die Lehren, welche man später *algebraische Analysis* genannt hat, nach Cauchys *Analyse algébrique* (1821). Sie umfaſst die Elemente der Kombinationslehre, den binomischen und polynomischen Satz, elementare Reihen, elementare Funktionen, binomische Gleichungen, reziproke, kubische und biquadratische Gleichungen.

Der Name *Kombinationslehre*, ars combinatoria, stammt aus einer Abhandlung Leibniz' (1666); das Wort combinatio für Verbindung von je Zweien kommt schon bei verschiedenen römischen Schriftstellern vor. Die *kombinatorische Analysis*, für welche Hindenburg eine eigene Schule gründete, ist ein jetzt fast ganz abgestorbener Zweig der Mathematik. Die Kombinatorik wurde auch *Syntaktik* genannt, z. B. von Lorenz (1806). Leibniz nannte Permutationen variationes. (Der Name *Variationscalcul* rührt von Euler her.)

Die *ältere Zahlentheorie* erhielt ihren Namen und ihren zusammenfassenden Abschlufs in Legendres *Essai d'une théorie des nombres* (1799) und *Essai sur la théorie des nombres* (1816, Suppl. 1825). Die *neuere Zahlentheorie* oder die *höhere Arithmetik* als selbständige Wissenschaft begründete Gauss durch seine *Disquisitiones arithmeticae* (1801). Neuerdings unterscheidet P. Bachmann (1894) die *analytische Zahlentheorie* und die *zahlentheoretische Analysis*.

Im Gegensatz zur analytischen Geometrie nannte man seit Ende des XVIII. Jahrhunderts diejenige Geometrie, die sich der Methode der Alten bediente, die *reine Geometrie*. Monge schuf (1794) die *deskriptive* oder *darstellende Geometrie*, so genannt, weil sie die Methoden der Darstellung räumlicher Gebilde in der Ebene lehrt. Carnots *Géométrie de position* (1803) wurde von Schumacher *Geometrie der Stellung* genannt.

Die von Poncelet (1822) begründete *projektive Geometrie* hat ihren Namen von den projektiven Eigenschaften der Figuren, d. h. solchen, die bei einer gewöhnlichen Transformation oder Projektion ungeändert bleiben.

Von einer allgemeinen *Flächentheorie* konnte man seit Gauss' *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (1827) reden.

Möbius' *barycentrischer Calcul* oder *Schwerpunktsrechnung* (1827) hat ihren Namen daher, weil sie den Schwerpunkt als Punkt der mittleren Entfernungen rein geometrisch definiert.

Mit Möbius zugleich begründete Plücker (1828) die *neuere analytische Geometrie*, die, im Gegensatz zu Descartes analytischer Geometrie, durch die Methode der symbolischen Bezeichnung und der unbestimmten Koeffizienten charakterisiert ist.

Die *neuere synthetische Geometrie* schuf Steiner (1832); sie sollte „den Organismus aufdecken, durch welchen die verschiedenartigsten Erscheinungen in der Raumwelt mit einander verbunden sind".

Staudts reine *Geometrie der Lage* (1847) hat ihren Namen daher, weil sie ohne Anwendung metrischer Relationen die Lageverhältnisse der Figuren behandelt. Da hier zugleich die imaginären Elemente in der projektiven Geometrie voll berücksichtigt werden, so konnte man seit dieser Zeit von einer *Geometrie des Imaginären* sprechen.

Hankel[1]) sagt: „Man könnte die *neuere Geometrie* (im Gegensatz zur antiken Geometrie oder zur Geometrie der Alten) passend die *Geometrie der Lage* nennen, wie dies schon vielfach geschehen ist, oder auch *projektivische Geometrie*. Dagegen hat es seine Bedenken, sie im Gegensatze zur *analytischen* Geometrie als *synthetische* zu bezeichnen, wenigstens dann, wenn man die eigentliche Bedeutung dieser Wörter, wie sie die griechischen Mathematiker und Logiker festgestellt haben, beibehalten will.“ Im Sinne der Philosophen ist die neuere Geometrie in ihrer Methode nicht weniger analytisch als die sogenannte analytische oder Koordinatengeometrie.

Grassmann vereinigte in seiner *Ausdehnungslehre* (1844 und 1862) die synthetische Darstellung, welche überall die Objekte selbst betrachtet und deren gegenseitige Beziehungen aus der Anschauung entwickelt, mit der analytischen Methode, welche die Objekte durch Rechnungsoperationen nach bestimmten Gesetzen verknüpft. Die Betrachtung der höheren komplexen Zahlen führte W. R. Hamilton auf seinen *Quaternionencalcul* (1853). Die *Vektoranalysis* oder *Algebra der Vektoren*, welche aus ihm entsprang, ersetzte die Koordinatengeometrie als Hilfsmittel der Untersuchung bei Problemen der modernen Physik.

In seinem *Calcul der Äquipollenzen* (1854) gab Bellavitis einen geometrischen Algorithmus, der mit äquipollenten Geraden rechnet. Äquipollent heifsen Gerade von gleicher Länge und Richtung; verschiedene Länge bei gleicher Richtung wird durch Koeffizienten bezeichnet.

Der Grundgedanke einer *Analysis situs*, einer „rein geometrischen Analyse, die uns die Lage (situs) ebenso direkt ausdrückt, wie die Algebra die Gröfse“, ist auf Leibniz zurückzuführen. Möbius nannte diesen Zweig der Geometrie *Situationsgeometrie*. Der Name *Topologie* für dieselbe stammt von Listing (1847).

Die neueren geometrischen Forschungen haben eine grofse Zahl von Geometrieen geschaffen, deren Namen wir hier nicht sämmtlich anführen können. Mit den Prinzipien der Geometrie beschäftigt sich die *Metageometrie*, auch *allgemeine Geometrie* genannt. Eine von dem Euklidischen Parallelenaxiom unabhängige Geometrie wurde *nichteuklidische* oder *transzendentale* Geometrie genannt oder auch *absolute* Geometrie. Die *n-dimensionale* Geometrie hat ihren Ursprung in den Werken von Grassmann und in den Untersuchungen von Riemann, der den Begriff der mehrfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit schuf. Die Lobatschefskysche Geometrie wird auch *Pangeometrie* oder *imaginäre Geometrie* genannt. Klein unterscheidet (1871) die Riemannsche, Lobatschefskysche und Euklidische Geometrie als *elliptische*, *hyperbolische* und *parabolische*.

1) H. Hankel, *Die Elemente der projektivischen Geometrie in synthetischer Behandlung* (Leipzig 1875), S. 32.

Der Unterschied zwischen *synthetischer* und *analytischer* Geometrie mufste sich mit der Zeit verwischen, da beide dem Inhalt und der Methode nach immer ähnlicher wurden. Da das Gebiet der neueren synthetischen Geometrie meist mit den Hilfsmitteln der Rechnung, speziell der neueren Algebra, untersucht wurde, so hat August (1881) für eine solche Disziplin den Namen *rechnende synthetische Geometrie* vorgeschlagen.

Die sogenannte *abzählende Geometrie* oder *Geometrie der Anzahl* beginnt mit Chasles (1864), dem Schöpfer der Theorie der Charakteristiken von Kurven- und Flächensystemen. Ihren Namen hat sie daher, weil sie bestimmt, wie viele gegebene geometrische Gebilde einer hinreichenden Anzahl von Bedingungen genügen.

Die *Liniengeometrie* oder *Geometrie der Geraden* ist eine von Plücker (1868) auf die Betrachtung der Geraden als Raumelement begründete neue Disziplin.

Laguerres *Direktionsgeometrie* (1880) ist ein neuer Zweig der ebenen Geometrie, dessen Elemente die Direktion (Gerade nach Lage und Sinn) und der Cyklus (Kreis nach Lage und Sinn). W. Fiedlers *Cyklographie* (1882) ist eine spezielle Abbildung der Punkte des Raumes auf die Kreise einer festen Ebene.

Die *Kartographie* oder *Kartenentwurfslehre* als Name einer besonderen Wissenschaft datiert seit Lambert (1772), und Gauss begründete durch seine neue Auffassung der *Abbildung* die *höhere Geodäsie* (1825 und 1827). Der Name *Chorographie* für Kartenprojektionslehre findet sich bei Littrow (1833).

Namen, die in der praktischen Geodäsie oder Landmessung vorkommen, sind *analytische Polygonometrie* (Magistrini 1809), *Tachymetrie* oder celerimensura (Pietro Perro), *Photogrammetrie* oder *Terrainaufnahme*, für welche neuerdings die wenig passende Übersetzung *Bildmefskunst* beliebt wurde.

Die *Wahrscheinlichkeitsrechnung* hiefs in dem grundlegenden Werke Jacob Bernoullis, das Nicolaus Bernoulli 1713 herausgab, *ars conjectandi, Mutmafsungskunst.* Moivre nannte sie *doctrine of change* (1718). Die *Ausgleichungsrechnung* und die sogenannte *Methode der kleinsten Quadrate* oder die *Fehlertheorie* wurde wissenschaftlich begründet durch Gauss (1795 und 1809), Legendre und Laplace. Des letzteren *analytische Wahrscheinlichkeitslehre, Theorie analytique des probabilités* (1812) enthält auch den Keim des neuesten Zweiges der Wahrscheinlichkeitslehre, der *geometrischen Wahrscheinlichkeit*, „local probability“, die seit 1865 besonders von englischen Mathematikern gepflegt wurde. Die Wahrscheinlichkeit hat ihre Anwendung gefunden auf die Arithmetik des täglichen Lebens, auf die *politische Arithmetik*, „mathesis forensis“ (bei Joh. Friedr. Pollack

1784), die sich zur *national-ökonomischen* und *juridisch-politischen Arithmetik* entwickelte.

Von neueren Namen für besondere Geometrieen erwähnen wir noch kurz die *Geometrie des Lineals* (SERVOIS 1804 und BRIANCHON), die *Geometrie des Zirkels*, geometria del compasso des MASCHERONI (1797), die *imaginäre Geometrie* von LAGUERRE (1870), die *Geometrie der Kugeln und Kugelsysteme* (TH. REYE 1879), die *Geometrie des Regelraumes* (KÖNIGS), die *lemniskatische Geometrie* (HOLZMÜLLER 1876), die *parabolische Trigonometrie* von JAMES BOOTH (1851) und die *neuere Dreiecksgeometrie* (LEMOINE 1873).

Die *kinematische Geometrie* oder *Geometrie der Bewegung* trennte sich von der Dynamik und wurde von HERMANN (1716) *Phoronomie* genannt. Das Wort *Kinematik* wurde zuerst von AMPÈRE (1830) gebraucht für eine bestimmte Betrachtungsform der Mechanismen und später erst im Sinne einer rein geometrischen Bewegungslehre.

Der Name *graphische Statik* kommt zuerst in einer Vorlesung REULEAUX' v. J. 1863 vor. Eine *graphische Dynamik* wurde ausgebildet von PRÖLL (1873). Die technisch wichtige *Nomographie* von D'OCAGNE (1891) führt die Rechnungen auf Ablesung fertiger graphischer Bilder zurück.

Die *Potentialtheorie* wurde wissenschaftlich begründet durch GREEN (1828), von dem auch der Name *Potentialfunktion* stammt.

Von einer *mathematischen Physik* kann erst seit Entwickelung der Potentialtheorie die Rede sein. Von R. MAYER (1841), JOULE, HELMHOLTZ und CLAUSIUS u. a. wurde die Lehre von der Energie, die *Energetik*, begründet. Die *Molekularphysik* wurde zuerst mathematisch behandelt von CAUCHY (1836), die *Capillarität* durch LAPLACE (1806), die *Elastizitätstheorie* von LAMÉ (1852); die mathematische Behandlung der *Elektrizität* reicht bis auf AMPÈRE (1826) zurück, und Begründer der *mechanischen Wärmetheorie* ist SADI CARNOT (1825).

Aus der *Dioptrik*, die schon von EULER (1765) mathematisch neu begründet war, entwickelte sich in neuerer Zeit ein besonderer Zweig der mathematischen Optik, die *geometrische Optik*.

Kürzlich hat man die *theorische Astronomie* von der *theoretischen* oder *physischen Astronomie* unterschieden; die *mathematische Geographie* von der *Geophysik* oder *Geonomie* (EPSTEIN 1887). Der Name *Gnomonik* für Lehre von der Konstruktion der Sonnenuhren kommt als Titel zuerst bei SCHONER (1562) vor.

§ 2. Namen für besondere Methoden und Theorieen, Prinzipien, Sätze, Formeln, Gesetze und Probleme.

Wir beginnen unsere Auswahl aus dem reichen Wortschatze der mathematischen Sprache, indem wir den vorher genannten mathematischen

Disziplinen eine weitere Reihe von Namen für *Methoden* und *Theorieen* anschliefsen, die sich in engeren Grenzen halten und nicht den Umfang einer wirklichen Disziplin haben. Es handelt sich hier hauptsächlich um Methoden zur Herleitung von Sätzen, zur Behandlung von Fragen und Problemen, zur Darstellung von Resultaten und Beweisen. Man unterscheidet allgemein analytische und synthetische, deduktive und induktive, experimentelle oder Versuchsmethode, Anschauungsmethode, symbolische, algebraische, geometrische, graphische, dynamische, physikalische Methode. In der Arithmetik haben wir eine Näherungsmethode, Methode der unbestimmten Koeffizienten, Interpolationsmethode, Vektormethode, Wronskis Methode; ferner die vielen als Regeln benannten Methoden des praktischen Rechnens und der elementaren Algebra. Bei der Lösung von Gleichungen und Gleichungssystemen benutzt man Eliminationsmethoden, die Additions-, Multiplikations-, Kombinations-, Substitutionsmethode, Eulers, Bézouts, Sylvesters dialytische, ferner Rolles Kaskadenmethode, Horners, Jerrards, Sturms Methode, Descartes' und Harriots Zeichenregel, Huddes und Huttons Regel, Cramers und Puiseux' Regel für algebraische Kurven. Ferner spricht man von Galois' Theorie der algebraischen Gleichungen, Hermites Theorie der assoziierten Formen, Weierstrass' Theorie der elliptischen Funktionen, Cauchys Kontakttheorie für Kurven und Flächen, Poinsots Theorie der Bewegung eines festen Körpers, Newtons Emissions- und Huygens' Undulations- oder Oscillationstheorie des Lichtes, Dopplers Theorie der Refraktion, Webers und Maxwells Theorie der Elektrodynamik, Helmholtz' Wirbeltheorie, um nur einige der physikalischen Theorieen zu nennen. Die Prinzipien der Geometrie behandeln die Parallelentheorie, die Elementargeometrie enthält eine Transversalentheorie. In der Geometrie ist zu nennen die Methode der abgekürzten Bezeichnung, der reciproken Polaren, der Bereiche, von Projektionsmethoden die der kotierten Projektion und die trimetrischen; in der höheren Analysis die Methode der Tangenten, die umgekehrte Tangentenmethode, die Methode der Grenzen, die Quadraturmethode. Viele nach ihren Schöpfern benannte Methoden hat die Theorie der Differentialgleichungen, so d'Alemberts, Ampères, Brissons, Cauchys, Hamiltons, Jacobi-Hamiltons, Hermites, Jacobis, Lagranges, Laplaces, Liouvilles, Monges, Pfaffs, Lies, Tchebychefs.

Jede Wissenschaft baut sich auf nach gewissen *Prinzipien* oder Grundsätzen; solche haben wir auch in den mathematischen Wissenschaften. Hier wird das Wort Prinzip häufig angewandt im Sinne von Fundamentalgesetz. Für die algebraischen Operationen giebt es additives, multiplikatives, associatives, distributives, kommutatives Prinzip; in der höheren Algebra ein Prinzip der Apolarität, der Permanenz, der Äquivalenz, der

Superposition, der Trägheit der Formen; in der Funktionentheorie das Prinzip der Kontinuität oder Stetigkeit, der Eindeutigkeit, der Divergenz, der analytischen Fortsetzung, der Umkehrung und das DIRICHLET'sche Prinzip. Von Prinzipien der Geometrie nennen wir das Prinzip der Ähnlichkeit, der Symmetrie, der Homographie, der Abzählung der Konstanten, der Erhaltung der Anzahl, der Kontinuität, LAMÉS Prinzip, HESSES Übertragungsprinzip, das Prinzip der Dualität, der Korrelation, der Korrespondenz, und das der Exhaustion. Für die Theorie der Differentialgleichungen sei erwähnt das Prinzip des letzten Multiplikators. Am zahlreichsten sind die Prinzipien in der Mechanik und in der mathematischen Physik. Es seien hier genannt die Prinzipien der Dynamik, HUYGENS', STEVINS, D'ALEMBERTS, GAUSS', LAGRANGES, HAMILTONS, DUHAMELS Prinzip, das Prinzip der Trägheit der Materie, der Energetik, der Erhaltung der Energie, der Erhaltung der lebendigen Kräfte, der Erhaltung des Schwerpunktes, der Bewegung des Schwerpunktes, der Momente der Bewegungsgröfse, der Flächen, der virtuellen Geschwindigkeit, des kleinsten Widerstandes, des kleinsten Zwanges, der kleinsten Wirkung, der Aktion und Reaktion, der Arbeit.

Von *Gesetzen* seien genannt: FECHNERS Gesetz der logischen Perzeption, das Gesetz der Gröfsenfolge, das Gesetz der grofsen Zahlen in der Wahrscheinlichkeit, GOLDBACHS Gesetz, LEGENDRES und HERMITES Reziprozitätsgesetz in der Zahlentheorie, das Gesetz der Homogeneität der algebraischen Gleichungen, das Rationalitätsgesetz in der Krystallographie, das Fehlergesetz bei Beobachtungen, die KEPLERschen Gesetze für die Bewegung der Planeten, BODES Gesetz für die Abstände der Planeten. In der Mechanik die Fallgesetze, Attraktionsgesetze, NEWTONS Gravitationsgesetz. Von physikalischen Gesetzen: BOLTZMANN-MAXWELLS Gesetz für die physikalische Wahrscheinlichkeit, das Brechungsgesetz, BREWSTERS und LAMBERTS Gesetz in der Optik, MARIOTTE-GAY-LUSSACS Gesetz in der Aerodynamik, in der Wärmelehre AVOGADROS Gesetz, in der Theorie der Elektrizität OHMS, WEBERS, BIOT-SAVARTS, JOULES, NEUMANNS Exponentialgesetz, ponderomotorisches und elektromotorisches Integralgesetz und viele andere.[1])

Wir kommen nun zu der grofsen Reihe von mathematischen *Sätzen*, Lehrsätzen oder Theoremen, die ihre besonderen Benennungen haben. In der Methode unterscheidet man Fundamental-, Grund-, Haupt-, Lehr-, Hilfssätze oder Lemmata, Folgesätze oder Korollare. Wir werden nur wenige Namen finden, die sich auf den Inhalt der Sätze beziehen, wie Sinns-,

1) Vergleiche auch den Aufsatz von B. SCHWALBE: *Über die physikalische Nomenklatur*; Unterrichtsbl. f. Mathem. u. Naturw. 3, 1894, 49—53, 67—70, 83—87.

Cosinus-, Tangentialsatz in der Trigonometrie, Censustheorem in der Geometrie, binomischer Satz, Restsatz, Existenztheorem, Additionstheorem in der Funktionentheorie. Die meisten Sätze sind nach Personen benannt. Eine solche Personalbenennung, die oftmals historisch nicht zu rechtfertigen ist, kam mit sehr wenigen Ausnahmen in der älteren mathematischen Nomenklatur noch nicht vor; sie entstand erst vor ungefähr 100 Jahren und wird jetzt immer mehr Mode. Zur Gruppierung dieser Sätze benutzen wir wiederum am besten die systematische Anordnung. In der elementaren Geometrie haben wir den Satz des Pythagoras, Ptolemäus, Menelaus, Ceva, Fermat, Feuerbach, Simson, Foncenex, Stewart; für die Stereometrie den Eulerschen Satz; für die Kegelschnitte die Sätze des Apollonius, Pappus, Pascal, Brianchon, Desargues, Poncelet, Steiner, Lambert, Chasles, Castillon, Graves, Kirkman, Miquel; in der darstellenden Geometrie die Sätze von Pohlke, Gauss, Quetelet-Dandelin; in der höheren Geometrie die Sätze von Joachimsthal, Meusnier, Dupin, Newton, Carnot, Clairaut, Dandelin, Dupuis, Rodrigues, Frégier, Lancret, Weingarten; in der sphärischen Trigonometrie die von Lexell, Lhuilier, Legendre, Cagnoli, Lehmann, Geber, Villarceau. Die höhere Algebra enthält Sätze von Descartes, Cotes, Bézout, Harriot, Rolle, Jerrard, Bring, d'Alembert, Gauss, Budan-Fourier, Sturm, Jacobi, Eisenstein, Sylow, Sylvester, Gordan; die Zahlentheorie solche von Bachet, Fermat, Wilson, Goldbach, G. Cantor, de Paolis; die Wahrscheinlichkeitsrechnung solche von Bernoulli, Bayes, Tchebychef, Crofton. In der Funktionentheorie sind anzuführen Sätze von Abel, Dirichlet, Cauchy, Taylor, Mac Laurin, Wallis, Stirling, Stokes, Wronski, Scherk, Hadamard, Laurent, Puiseux, Weierstrass, Mittag-Leffler, Riemann-Roch, Hermite, Nöther, Clifford; in der Integralrechnung Sätze von Boole, Fagnano, Fourier, Viviani, Liouville, Lie. Die Mechanik enthält Sätze von Peaucellier, Bobilier-Chasles, Coriolis, Joh. Bernoulli, Clapeyron, Minding, Poisson, Poisson-Jacobi, Saladini, Mac Laurin, Ivory, Gauss, Green; die Hydrodynamik solche von Torricelli, Lagrange, Laplace, Bjerknes, Helmholtz, Neumann, Saint-Venant, und die Thermodynamik von Carnot, Clausius, Mayer.

Den Lehrsätzen schliefsen sich am engsten an die *Formeln*; denn sie sind ja durch Gleichungen ausgedrückte Sätze. Mehrere der oben genannten Sätze werden auch als Formeln benannt, wenn sie analytisch dargestellt werden. So spricht man vom Eulerschen Satz oder von der Eulerschen Polyederformel, von Clapeyrons Satz oder der Clapeyronschen Formel etc. Wir haben Fundamental-, empirische, illusorische, Nährungs-, projektive Formeln. Ferner in der Arithmetik und Algebra

Reduktions-, Produkten-, Summenformeln, Binomialformel, CARDANische Formel, STIRLINGS, WARINGS Formel; in der Funktionentheorie Grenz-, Reversions- oder Umkehrungsformel, Interpolationsformeln von NEWTON und LAGRANGE, ferner MOIVRES, WALLIS', BINETS, CAUCHYS, DIRICHLETS, MAC LAURINS und EULERS Summenformel; in der höheren Analysis FRULLANIS, DE L'HOSPITALS, SIMPSONS Quadraturformel, PONCELETS Näherungsformel und Integralformeln. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung hat LAPLACES, MAKEHAMS, GOMPERTZ' Formel für Sterblichkeit. In der Astronomie treten die Störungsformeln, in der Chronologie Osterformeln auf. In der Geschichte der elementaren Geometrie spielt die HERONische Dreiecksformel eine Rolle, Grundformeln der sphärischen Trigonometrie sind die GAUSSschen oder MOLLWEIDEschen. In der analytischen Geometrie giebt es EULERsche Formeln für Koordinatentransformation, CODAZZIS Formeln der Flächentheorie, PLÜCKERsche Formeln für die Charakteristiken, Inzidenz- und Koinzidenzformeln der abzählenden Geometrie. In der Physik nennen wir nur MAXWELLS, YOUNGS, BESSELS, BRADLEYS Formel und die Barometer- und Hygrometerformel.

Unter den *Aufgaben* oder *Problemen* sind mehrere historisch merkwürdige. Die drei wichtigsten Probleme der Griechen waren das Delische Problem der Verdoppelung des Würfels oder der beiden mittleren Proportionalen, die Quadratur des Zirkels und die Trisektion des Winkels. Bei der Konstruktion von geometrischen Örtern unterschied man lineare, ebene, körperliche, überkörperliche oder surdesolide Probleme. Ferner giebt es bestimmte, unbestimmte, überbestimmte, mögliche und unmögliche Probleme. In der Arithmetik und Algebra haben wir ARCHIMEDES' Rinderproblem; ferner die Brunnenaufgaben, DIOPHANTische Aufgaben, Rätselaufgaben, Domino-, Schach-, Läufer-, Springerproblem, KIRKMANS Problem, das römische Erbfolgeproblem, das Petersburger Problem, das STURMsche Problem, FIBONACCIS, PELLS und das Teilerproblem der Zahlentheorie, das Umkehrproblem der Funktionentheorie. Die Infinitesimalrechnung entstand aus dem Tangentenproblem und dem umgekehrten Tangentenproblem. Sie behandelt die Probleme der Maxima und Minima, die isoperimetrischen Probleme, das Florentiner Problem VIVIANIS, CAUCHYS, PFAFFS, MONGES, PLATEAUS Problem und das Problem der Trajektorien. Mechanische Probleme sind das ballistische, das Seilproblem, die Billardaufgaben, HUYGENS' Problem und das Problem der 3 und der n Körper. HALLEYS und KEPLERS Problem gehören der Astronomie an, HANSENS und POTHENOTS der Geodäsie, ALHAZENS Aufgabe der Optik, GREENS Problem der allgemeinen Physik, DIRICHLETS der Hydrodynamik, SAINT-VENANTS der Elastizität.

§ 3. **Geometrische Gebilde: Elemente, Punkte, Gerade, Kurven und Flächen.**

Wie zahlreich die Namen der geometrischen Gebilde sind, mag der Leser aus der Bemerkung ersehen, dafs H. Brocard in seinen *Notes de bibliographie des courbes géométriques*; Partie complémentaire (Bar-le-Duc 1899), nicht weniger als 1022 Kurven-Namen anführt, dafs in meinem Vokabularium der Artikel „Punkt“ 308, „Kurve“ 452, „Linie“ 250, „Winkel“ 140, „Ebene“ 120, „Fläche“ 309 Kunstausdrücke enthält, wobei zu beachten ist, dafs die besonderen Namen oben genannter Gebilde, welche nicht mit den Worten Punkt, Kurve, Linie etc. endigen, noch nicht mitgerechnet sind. Im Folgenden wollen wir nun eine Auswahl aus der Nomenklatur der geometrischen Gebilde geben und mit den *Elementen* beginnen.

Das Wort *Element* wird häufig für Grundgebilde oder Elementargebilde gebraucht, die bei besonderen geometrischen Betrachtungsweisen als Raumelemente genommen werden. Das Element der Punktgeometrie ist der Punkt, das der Liniengeometrie die Gerade, das der mehrdimensionalen Geometrie die Fläche oder der Körper. Die Berührungstransformation führt das Flächenelement als Raumelement ein. Daher die Bezeichnungen: Element einer Mannigfaltigkeit, Berührungselement, Abstandselement im Raume, Element der Ausdehnung, Konnexelement, Hauptelement einer Koinzidenz, Bogenelement, lineares Element einer Ebene und einer Fläche, Element *n*. Ordnung in der Differentialgeometrie, Oberflächenelement. Man unterscheidet reelle und imaginäre Elemente in der Geometrie der Lage, ideale Elemente der hyperbolischen Geometrie. Man spricht von entsprechenden, korrespondierenden, homologen, erzeugenden, harmonischen, doppelharmonischen, konjugierten, adjungierten, äquidistanten, gemeinsamen, merkwürdigen, dualistisch entgegengesetzten, linear zugeordneten, homographischen, involutorischen, reziproken, zweifach entsprechenden u. s. w. Elementen; ferner von unendlich fernen Elementen, von Doppelelementen einer Kollineation und Involution, von Ordnungselementen einer Involution und einer Perspektivität, von Nullelementen reziproker involutorischer Systeme, von Deckelementen der Projektion, von den Elementen einer Koinzidenz, einer Gruppe und von Einheitsheitselementen der Koordinaten u. s. f.

Die vielfachen Benennungen der geometrischen Gebilde, der Punkte, Linien, Flächen, Körper, sind zum Teil entstanden durch die Lage derselben, zum Teil durch besondere Eigenschaften. Endlich hat man besonders merkwürdige Gebilde nach Personen benannt, meist wohl nach den vermeintlichen oder wirklichen Entdeckern dieser Gebilde oder ihrer Eigenschaften. Diese Personalbestimmungen waren früher sehr selten; sie

gehören fast alle den letzten fünf Dezennien an. Besonders die ganz junge elementare Dreieckstheorie hat in der Bezeichnung von Punkten, Geraden und Kurven nach Personen mehr als zuviel geleistet. Auch die Zahl der Adjektiva, durch welche die Art des Gebildes ausgedrückt, wenn auch nicht immer charakterisiert wird, hat sich in der neueren Zeit aufserordentlich vermehrt. In den Wörterbüchern von OZANAM und CHRISTIAN WOLFF, also vor circa 200 Jahren, finden wir nur wenige unterscheidende Adjektiva, und meist leicht verständliche. Es waren Worte wie: ganz, halb, doppelt, dreifach, zusammengesetzt, oder elementar-mathematische, wie eben, räumlich, körperlich, geometrisch, arithmetisch, algebraisch, mechanisch, geodätisch, optisch, rational, irrational, cyklisch, sphärisch, elliptisch, hyperbolisch, konisch, cylindrisch, kommensurabel, inkommensurabel, homolog, harmonisch und ähnliche. Aus der Bezeichnung der Art der Gebilde durch neuere Adjektiva, wie kollinear, homographisch, involutorisch, projektiv, perspektivisch, adjungiert, konjugiert, komplex, kontinuierlich, fokal, konfokal, orthogonal, polar, stationär und und viele andere, auf die wir weiter unten zu sprechen kommen, kann man einen Schlufs auf die Zeit der Entstehung des Kunstausdruckes machen.

Von *Punkten* hat die elementare Geometrie folgende: Endpunkt, Teilpunkt, Mittelpunkt oder Centrum, Durchschnitts-, Schnitt-, Treff-, gemeinsamer, Scheitel-, Fufs-, Abschnitts-, Höhenschnittpunkt oder Orthocentrum, Schwerpunkt, homologer, antohomologer, umgekehrter homologer, komplementärer, supplementärer, diametral entgegengesetzter, reziproker, halbreziproker, tantologer, Potential-, Halbpotential-, Äquipotential-, antifokaler, kollinearer, koncyklischer, isobarischer, isodynamischer, isogoner, isopleter, isoptischer, isotomischer, tautologer, Symmetrie-, BROCARDS direkter und rückläufiger, FEUERBACHS, GERGONNES, GREBES oder LEMOINES oder Symedian-, NAGELS, SPIEKERS, JERABEKS, KIRKMANS, SALMONS, TARRYS, WALLACES Punkt. In der projektiven Geometrie sei genannt: Ähnlichkeitscentrum, äufserer und innerer Ähnlichkeitspunkt, Chordal-, Radikalpunkt, Radikalcentrum, Anti- oder Gegenpunkt, STEINERscher, BRIANCHONS, Grenz-, Kreis-, Null-, harmonischer, harmonischer Mittelpunkt, äquiharmonischer, äquianharmonischer Punkt, anharmonisches Centrum, konjugierter harmonischer, imaginärer, idealer, Konformitäts-, Einheitspunkt, Homologie-, Kollineations-, Projektivitätscentrum, homocyklischer, kreisverwandter, uneigentlicher, unendlich ferner, Situations- oder Identitätspunkt, Punkt gleicher Potenzen, Punkt gleicher Schnitte, Centrum der mittleren Entfernungen, Centrum der harmonischen Pole, Pol einer Geraden, Affinitätspol etc.

Die *darstellende Geometrie* benutzt folgende Punkte: Augen-, Distanz-,

Flucht-, Abstands- oder Entfernungs-, Accidental-, Aufsen-, Durchgangs-, Glanz-, Verbindungs-, Spur-, zufälliger Punkt, Projektionscentrum, kotierter Punkt, Pol der stereographischen Projektion.

Unter den Punkten, die wir in der *analytischen Geometrie* oder der *höheren Geometrie* überhaupt zu betrachten haben, spielen eine grofse Rolle die Singularitäten von Kurven und Flächen, die Mittelpunkte, die Brennpunkte, die Pole. Mit den Koordinatenpunkten beginnend, haben wir Anfangspunkt der Koordinaten, Pol der Polarkoordinaten, Fundamentalpunkte der barycentrischen Koordinaten, Gleichkoordinatenpunkt, Richtungspunkt der Koordinaten. Ferner Punkte einer Geraden, eines Strahles, einer Kurve, einer Fläche, Basispunkt eines Kurvenbüschels, Fundamentalpunkt einer Kurvenschar, einer Transformation, Grundpunkt eines Büschels, Grenzpunkt einer Kreisschar, Hauptpunkt einer Kurve *n*. Ordnung, eines Netzes, Potenzpunkt einer Punktfolge, Punkt des Systems von Kurven, Jacobischer Punkt eines Kurvenpaares, Chasles', Frégiers Punkt eines Büschels, charakteristischer Punkt einer Enveloppe, mittlerer Punkt der Geraden der Kongruenz, Mittelpunkt oder Centrum eines Kreises, einer Ellipse, einer Hyperbel, eines Kegelschnitts, einer algebraischen Kurve, einer Kugel, einer Fläche 2. Grades, einer algebraischen Fläche, eines Büschels, eines Bündels, einer Schar, eines Komplexes, der Kollineation, der Transformation, Mittelpunkt des Berührungskreises, Krümmungsmittelpunkt, harmonischer, kritischer Mittelpunkt, Centralpunkt einer Fläche, Diagonalpunkt einer Kurve, Fufspunkt einer Normale, Inzidenzpunkt; ferner Pol einer Geraden, einer Ebene, einer Kurve, einer Fläche, der Cykloide, Konchoide, Strophoide, Spirale, konjugierter Pol, Tangentialpol, Begleitpunkt einer Kurve, Koinzidenzpunkt, Berührungspunkt, Berührungspunkt höherer Ordnung, Brennpunkt oder Fokus, Fokalpunkt, Brennpunkt einer Kurve, einer Parabel, einer Fläche, einer Kongruenz, eines Strahlensystems, eines Kurvensystems, eines Flächensystems, Asymptoten-, konjugierter, dreifacher, imaginärer Brennpunkt; Punkt im Unendlichen, reeller, imaginärer, isobarischer, kritischer, Tangential-, Verschwindungs-, Elementar-, einfacher, elliptischer, hyperbolischer, parabolischer, assoziierter, konjugierter, autokonjugierter, homologer, entsprechender, isogonaler, korrespondierender, zugeordneter, polar zugeordneter, Oskulations-, Klassenpunkt. Es giebt niedere und höhere Singularitäten, gewöhnliche, eigentliche und uneigentliche, Punkt-, Kurven-, Flächen-, Tangentialsingularitäten. Von singulären Punkten seien angeführt: Doppelpunkt, uniplanarer, biplanarer, isolierter, reeller, imaginärer Doppelpunkt, dreifacher, vierfacher, fünffacher, sechsfacher, mehrfacher oder vielfacher Doppelpunkt, Zwillingspunkt, Asymptoten-, Kreis-, Nabel-, Knoten-, Selbstberührungs-, Berührungsknoten-, Schnabel-, Verdoppelungs-, Wende-, Wendeberührungs-, Inflexions-, Beug-

ungs-, Cuspidal-, acnodaler, crünodaler, Nadel-, Schlangen-, Schlängelungs-, Windungs-, Undulations-, Stillstands-, stationärer Punkt, Spitze, Doppelspitze, Knotenspitze, Schnabelspitze, Berührungsknotenspitze.

In der *Funktionentheorie* kommen folgende Namen für besondere Punkte vor: Konvergenz-, Divergenz-, Begrenzungs-, Grenz-, Null-, Wurzel-, Verzweigungs-, Stetigkeits-, Unstetigkeits-, Stetigvieldeutigkeits-, kritischer, fester kritischer, beweglicher kritischer, Spaltungs-, Ausnahme-, singulärer, gewöhnlicher singulärer, aufserordentlich singulärer, wesentlich singulärer, aufserwesentlich singulärer, logarithmisch singulärer, WEIERSTRASSscher Punkt.

Für die *Mechanik* sind folgende Benennungen anzuführen: materieller, fester, beweglicher, freier, Drehpunkt, Mittelpunkt der augenblicklichen Drehung, der Bewegung, der Anziehung, paralleler Kräfte, Massenmittelpunkt oder Schwerpunkt, Stütz- oder Unterstützungspunkt oder Hypomochlium, Metacentrum, Druck-, Gleichgewichts-, Erschütterungs-, Beschleunigungs-, Schwingungs-, Trägheits-, Wirkungs-, Rotationsmittelpunkt, Aktions-, Momenten-, Repulsionscentrum, Aufpunkt, Aufhänge-, Kreisungs-, Reduktions-, Windungs-, Angel-, Angriffs-, anziehender, BALLS, BURMESTERS Punkt.

Die *Astronomie* und *mathematische Geographie* hat: Nord-, Süd-, Ost-, Westpunkt, Nord- und Südpol, Weltpol, Frühlings-, Herbst-, Äquinoktial-, Wendepunkt, Sonnenwende-, Antipoden-, Circummeridian-, Kulminationspunkt, Apogäum, Perigäum, Apsiden, Zenith, Nadir, Pol der Ekliptik, Pol des Äquators u. a.

Einige *physikalische* Punkte mögen dieses Verzeichnis beschliefsen: in der Optik reeller und virtueller Brennpunkt, Haupt-, Kardinal-, Reflexions-, Refraktions-, Dispersions-, Einfalls-, Strahlungspunkt, Aberrations-, Kollineationscentrum; in der Akustik Kontrapunkt; in der Wärmelehre Gefrier-, Nullpunkt, etc.

Mit den *geraden Linien*, zu deren Nomenklatur wir jetzt übergehen, fassen wir sogleich zusammen die Strahlen, Achsen, Durchmesser, Radien, Polaren, Transversalen, die ja auch Gerade sind. In der *elementaren Geometrie* kommen vor: endliche Gerade oder Strecke, senkrechte oder normale und schiefe, parallele, antiparallele, Mittelgerade, Mittelsenkrechte, seitenhalbierende und winkelhalbierende Gerade, Mediane, Symmediane, isogonale, isotomische, isobarische, merkwürdige, NEWTONsche, BROCARDische, CAYLEYsche, STEINERsche, EULERsche, GAUSSsche, FEUERBACHsche, JERABEKsche, DE LONGCHAMPS', LEMOINES, WALLACES, SIMSONS, Gleichwinkelgerade, Diagonale, Höhe, Transversale, Eck-, Scheitel-, Winkel-Transversale, Durchmesser eines Kreises, einer Kugel, Radius oder Halbmesser eines Kreises, einer Kugel, Sekante, Tangente, Sehne, Centrale.

Die *höhere Geometrie* (projektive, darstellende, analytische) ist sehr reich an Namen für bestimmte gerade Linien: Halbgerade, Halbstrahl, Halbachse, imaginäre Gerade, ideale Sekante, imaginäre Tangente, konjugierte, reziproke, homologe, entsprechende, harmonische, adjungierte Geraden und Strahlen, Symmetrie-Gerade und Achse, Kollineations-Gerade und Achse, perspektive, asymptotische, assoziierte, singuläre, Pascalsche, unendlich ferne Gerade, Berührungs-Gerade und Strahl, fokale Gerade und Fokal- oder Brennstrahl, Ähnlichkeits-Achse, -Strahl und Radius, Affinitäts-Achse und Strahl, Koinzidenz-Achse und Strahl, Achse und Strahl eines Büschels, eines Bündels, eines Komplexes, einer Kongruenz, Doppel-Gerade und Strahl, Potenz-Strahl und Achse, Null-Gerade und Strahl, Grund-Gerade und Strahl, polare Gerade, Polarstrahl, imaginäre Gerade und Achse, Krümmungs-Gerade, -Achse und Radius, Haupt-Strahl, -Achse und Radius; dreifache, vielfache, Mittel-, orthogonale, normale, autopolare, symptotische, Gegen-, Fufspunkten-, Seiten-, windschiefe, Zwischen-, Keil-, Schwer-, Hilfs-, Inflexions-, Biegungs-, Minimal-, erzeugende, Leitgerade; Leitstrahl oder Direktrix einer Parabel, Konchoide, Fläche, Kongruenz, Korrelation, Normalie, Traktorie, eines Polarsystems, Asymptotendirektrix; Parallel-, Projektions-, Ordnungsstrahl; Durchmesser eines Büschels, eines Kegelschnittes, einer Fläche, einer Kurve, eines Komplexes; äufserer, innerer, reeller, imaginärer, wahrer, scheinbarer, konjugierter, äquikonjugierter, Neben-, Quer-, Transversal-, Zwerch-Durchmesser; Radius vector oder Fahrstrahl, Apsidal-, Krümmungs-, konjugierter, reziproker Radius, Radius der absoluten Krümmung, der sphärischen Krümmung, der Torsion; doppelte, dreifache, vielfache Sekante und Tangente, Sub-Tangente und Sekante, Polarsubtangente, konjugierte, autokonjugierte, harmonische, homologe, antihomologe, oskulierende, stationäre, singuläre, Cuspidal-, Inflexions-, Rückkehr-, Wendetangente; Cuspidal-, Knoten-, Rückkehrkante; Kante eines Polyeders, eines Kegels, Seiten-, Gegen-, Zwischen-, Grund-, Schwerkante; Achse einer Kurve, eines Kegelschnitts, einer Fläche, eines Systems, eines Netzes; Achse der harmonischen Anfangspunkte, der harmonischen Mittel, der mittleren Entfernungen, der Perspektivität, der Projektivität, der homothetischen Beziehung, der Homologie, Identitäts-, Symptosen-, Involutions-, Projektions-, Rotations-, Umdrehungs-, Aberrations-, Koordinaten-, Abscissen- oder X-, Ordinaten- oder Y-, Z-Achse; Radikalachse oder Chordale oder Potenzlinie; Polare eines Punktes in Bezug auf eine Kurve oder Fläche, Polare eines Kreises, einer Kurve, einer Fläche, einer Kugel, eines Netzes, erste, zweite, dritte, ..., *n*te Polare, gerade, geneigte, windschiefe, innere, gemischte, konjugierte, harmonische, konische Polare.

Wir wollen zum Schlufs noch einige Namen von Achsen anführen,

die in der *Mechanik* und *Optik* vorkommen: bewegliche, feste oder unbewegliche, freie, unveränderliche, momentane, spontane, Drehungs-, Rotations-, Schrauben-, Deviations-, Beschleunigungs-, Central-, Gleichgewichts-, Trägheits-, Hauptträgheits-, Hauptdrehungs-, Momenten-, Bahnachse, Achse eines Kräftepaares, eines Systems, des Stofses, Hauptachse eines Systems, optische Achse, Seh-, Visier-Achse und Strahl, gebrochener, reflektierter, Einfalls-, Brechungs-, Brenn- oder Fokal-, Lichtstrahl.

Da wir in diesem Abschnitt von den Koordinatenachsen gesprochen haben, so schliefsen wir am besten hier die Nomenklatur der *Koordinaten* selbst an, der geradlinigen sowohl wie der krummlinigen. Man hat: ebene, räumliche oder Raumkoordinaten, reelle, komplexe, imaginäre, isotrope, ideale, binäre, kontragrediente, projektive, orthogonale oder rechtwinklige, schiefwinklige oder schiefe, ganzzahlige, laufende, Parallel-, lineare oder Linien- oder Strahlenkoordinaten, cyklische, cyklidische, cylindrische, elliptische, hyperbolische, parabolische, lemniskatische, logarithmische, pleonastische, peripolare, symmetrische, homogene, isothermische, geodätische, absolute, transzendente, vektorielle, Zwischenkoordinaten; Cartesische oder gewöhnliche, BOOTHsche, HESSEsche, PLÜCKERsche, SCHWERINGsche, CLAUSIUSsche Koordinaten; Punkt-, Polar-, Dreipunkt-, Vierpunkt, bipolare oder Zweipol-, tripolare oder Dreipol-, quadripolare oder Vierpol-, multipolare oder Vielpol-, reziproke Polar-, tangentiale Polarkoordinaten; Ebenen oder Plan-, quadriplanare oder Vierebenen-, multiplanare oder Vielebenen-, baryzentrische oder Schwerpunkts-, bianguläre oder Zweiwinkel-, Achsen-, asymptotische, Dreiecks-, trilineare oder Dreilinien-, trilaterale oder Dreiseit-, polygonale oder Vielecks-, trimetrische, tetrametrische, Komplex-, tetracyklische oder Vierkreis-, sphärische oder Kugel-, pentasphärische oder Fünfkugel-, hexasphärische oder Sechskugel-, cylindrische, tetraedrale, polyedrische, Tangential-, Verhältnis-, Trägheitskoordinaten; und in der Astronomie und mathematischen Geographie: Himmels-, Orts-, Stern-, geographische, geocentrische, heliocentrische, Äquatorial-, Horizontal-, ekliptische, Stunden- und Winkel-Koordinaten. —

Wir kommen nun zu einem überaus reichhaltigen Abschnitte, zur Nomenklatur der mathematischen *Kurven*. Das alphabetische Verzeichnis der Kurven mit besonderen Namen, das Herr BROCARD[1]) zusammengestellt hat, enthält, wie wir schon oben (S. 294) bemerkt, 1022 Nummern. Wir führen hier nicht alle diese Namen an und gruppieren, um die Übersicht zu erleichtern, derart, dafs wir zuerst die Nomenklatur der Kurvengattungen zusammenstellen und dann die Kurven anführen, die bereits im Altertum bekannt waren, dann die der neueren Zeit und endlich die

1) H. BROCARD, l. c. Partie complémentaire, p. 217—243.

des letzten Jahrhunderts. Historisch-etymologisch habe ich mehrere der geometrischen Örter in meinem oben (S. 284) genannten Programme[1]) behandelt.

Man unterscheidet ebene und Raumkurven oder Kurven doppelter Krümmung, auch gewundene Kurven genannt, ferner im mehrdimensionalen Raume Kurven vielfacher Krümmung, Über- oder Hyperkurven; dann geometrische, analytische, rationale, algebraische, transcendente, organische, trigonometrische, exponential-, logarithmische, eindeutige, einläufige oder unicursale, doppelläufige oder bicursale; Kurven vom Geschlecht 0, 1, 2, . . ., vom Grade 2, 3, 4, . . . n, $n$ter Klasse, $n$ter Ordnung; geschlossene, konkave, konvexe, imaginäre, singuläre, irreduktible, quadrierbare, rektifizierbare, centrische oder Centralkurven; Schnitt- oder Durchschnitts- oder Durchdringungskurven, sphärische, topographische, Niveaukurven, Evoluten, Evolventen, Enveloppen, Nullkurven, Fufspunktenkurven, Trajektorien oder Bahnkurven, Fokal- oder Brennpunktenkurven, Tangential-, Berührungs-, Oskulations-, Basis-, Begleit-, Differential-, Schwerpunkts- oder barycentrische, Anti- oder Gegenkurven; Parallel- oder äquidistante, ähnliche, harmonische, homographische, homothetische, isologe, orthogonale, orthotomische, adjungierte, komplementäre, affine, korrelative, reziproke, transformierte, Arguesische Kurven.

Im Altertum kannte man aufser dem Kreise die Kegelschnitte, d. h. die Schnitte des spitzwinkligen, rechtwinkligen, stumpfwinkligen Kegels, die Spiralen des Archimedes, Konon, Platon und Pappus, das Salinon des Archimedes, die Helix oder Schraubenlinie, die Lunulae des Hippokrates, die Hippopede des Eudoxus, die Kampyle des Eudoxus, die Lemniskate, die Cissoide oder Epheulinie des Diokles, die Konchoide des Nikomedes, die Quadratrix des Dinostratus, die spirische Linie des Perseus, die Konchoide oder Muschellinie des Nikomedes. Der Name Ellipse kommt ebenso wie die Namen Hyperbel und Parabel zuerst bei Apollonius vor.

Abgesehen von gelegentlichen Erwähnungen der Kreiskonchoide durch Campanus und Nemorarius behandelt man im ganzen Mittelalter keine andere Kurve als den Kreis.[2]) Die Kegelschnitte wurden erst wieder in die Wissenschaft eingeführt durch Werners († 1528) *Libellus super viginti duobus elementis conicis.* Albrecht Dürer (1525) nennt die Ellipse, Hyperbel und Parabel resp. Eilinie, Gabellinie und Brennlinie; seine Spinnenlinie ist die Epicykloide, seine Fischblase ein Kreisbogenzweieck. Durch

1) Felix Müller, l. c. S. 24—32: Kegelschnitte und andere geometrische Örter

2) S. Günther, *War die Cykloide bereits im XVI. Jahrhundert bekannt?* Biblioth. Mathem. 1_2, 1887, S. 8.

Angabe einer genetischen Konstruktion der Cykloide wurde BOUVELLES (1501) Vorläufer von GALILEI, der ihr 1600 auch den Namen gab, während PASCAL, ROBERVAL u. a. sie Roulette, Rolllinie nannten. Die beiden Letztgenannten, sowie DESCARTES, TORRICELLI, PASCAL u. a. schufen eine Reihe neuer Kurven in der ersten Hälfte des XVII. Jahrhunderts, zu einer Zeit, wo das Tangentenproblem alle Mathematiker zu beschäftigen begann. Seit dieser Zeit gelten folgende Kurvennamen: CARTESische Ovale, CARTESisches Folium, FERMATS Lituus, PASCALS Limaçon, COTES' Spirale, GALILEIS Spirale, La Galante, NEILsche oder semikubische Parabel, ROBERVALS Kurve, BERNOULLIS Lemniskate, BALIANIS (richtiger GALILEIS) Schraubenlinie, Isochrone, Tautochrone, Brachistochrone, Sinnslinie, Begleiterin der Cykloide, logarithmische Kurve, parabolische Spirale, elastische Kurve, Kettenlinie oder Catenaria, logarithmische Spirale, isoperimetrische Linie, kürzeste Linie, kaustische Linien, Katakaustica, Diakaustica, Antikaustica, anakamptische und anaklastische Linie, TSCHIRNHAUSENS Quadratrix, SLUZES Konchoide, Kardioide oder Herzkurve, Clelia, Flos geometricus, Rhodonea, AGNESIsche Kurve, Versiera oder Visiera, Jasminkurve, Rosacea, Rosette, MAC LAURINS Trisektrix, Meridiankurve, Trajektorie, CASSINIsche Kurve oder Cassinoide.

Ehe wir die Namen der *Kurven* zusammenstellen, die in den letzten Dezennien des XVIII. Jahrhunderts und im Laufe des XIX. geschaffen sind, wollen wir an Kreisen und Kegelschnitten zeigen, wie grofs die Zahl der Spezies dieser Kurven geworden ist. Von Kreisen sei genannt: APOLLONIscher, TORRICELLIS, EULERS, MONGES, BOSCOVICHS, CHASLES', FEUERBACHS, BROCARDS, JOACHIMSTHALS, FUHRMANNS, LEMOINES, NEUBERGS, TUCKERS, LONGCHAMPS', LUCAS', MAC CAYS, MIQUELS, TAYLORS, SCHOUTES Kreis; ferner umschriebener oder Umkreis, eingeschriebener oder Inkreis, angeschriebener oder Ankreis, Höhen-, Radikal-, Antiradikal-, Haupt-, Hilfs-, Kehl-, Richtungs-, Diagonal-, Ähnlichkeits-, Fünfpunkte-, Siebenpunkte-, Neunpunkte-, berührender, doppeltberührender, dreifachberührender, Schmiegungs-, komplementärer, antikomplementärer, orthoptischer, isotomischer, orthogonaler, orthotomischer, orthocentroidaler, konjugierter, adjungierter und Inflexionskreis.

Ein *Kegelschnitt* ist ein ebener oder ein Raumkegelschnitt, sphärischer, kubischer, höheren Geschlechts, Hyperkegelschnitt, imaginärer, eingeschriebener, umschriebener, harmonisch eingeschriebener oder umschriebener, anharmonischer, adjungierter, konjugierter, absoluter, centraler oder Mittelpunktskegelschnitt, excentrischer, begleitender, erzeugender, berührender, überoskulierender, Schmiegungs-, Leit-, Kern-, Haupt-, Haupttangential-, Cuspidal-, Doppel-, Inflexions-, Pol-, Polar-, Diametral-, Richtungs-, Fokalkegelschnitt, komplementärer, anorthotomischer, DUPINS, CAYLEYS, BATTAGLINIS, BROCARDS, NEUBERGS, RIVALS, LEMOINES Kegelschnitt.

Ellipsen und *Parabeln* höherer Ordnung hiefsen früher Ellipsoide und Paraboloide; ferner haben wir Pseudoellipse, Kehlellipse, Cassinis, Steiners, Frégiers, Brocards, Lemoines, Longchamps', Mandarts, Simmons Ellipse; Knoten-, kubische, windschiefe, semikubische, Artztsche, Brocardsche, Mandartsche und Kiepertsche Parabel; gleichseitige, sphärische, ApolloniSche, Feuerbachsche, Kiepertsche, Jerabeksche Hyperbel und Hyperbel der *n* Punkte.

Aus der neueren Terminologie sind aufserdem folgende *Kurven* zu nennen: Bertrandsche, Delaunays, Lucas', Jerabeks, Lamés, Rolles, Salmons, Serrets, Talbots, Siebecks, Lissajous' Kurve, Poinsots Spirale, Steiners Hypocykloide, Geronos Lemniskate, Zahradniks Cissoide, ferner die zu einer gegebenen Kurve gehörige kovariante, Konkomitanten-, Diskriminanten-, Invarianten-, Tripel-, Cayleysche, Cayley-Hermitesche, Hessesche, Kern-, Steinersche, Jacobische, Zeuthensche Kurve, Pippiana oder P-Kurve, Quippiana oder Q-Kurve, Arguesische Kurve; ferner Devolute, Konvolute, Involute, Quasievolute, Antevolute, Koevolute, Developpoide, Astroide, Klothoide, Neoide, Cyknoide, Kochleoide, Cubocykloide, Anticykloide, Optoide, Pteroide, Nephroide, Radioide, Sinusoide, Strophoide, Toroide, Atriphthaloide, Axoide, Trochoide, Epitrochoide, Hypotrochoide, Alyssoide; endlich anallagmatische, charakteristische, konosphärische, logocyklische, orthognomonische, orthostereographische, orthoarchimedische, orthoflamsteedische, ortholambertische, stereomerkatorische Kurve; Bifolium, Trifolium, Quadrifolium, Antizome, Korblinie, Quersackkurve, Kappakurve, Kremphutkurve, Limitale, harmonische, geneigte, reziproke Polare, Polokonik, Strophoidale, Cykel, Hypercykel, Deferente, Didonia, Duplikatrix, Indikatrix, Ellipsimber, Cykloimber, Hyperbolimber, Kreuzkurve, Kukumäide, Schleifenkurve, Centroide, Mesochrone, Polhodie, Herpolhodie, Hodograph, Isobare, Isokline, Isanemone, Isodyname, Isochymene, Isanomale, Isorhachie, Isothere, Isotherme, Isopede, Isotime, Isophote, Isogreene.

Von *krummen Oberflächen* kannte man im Altertum aufser Kugel, Kegel und Cylinder nur die Konoide und Sphäroide, die durch Umdrehung der Parabel, Ellipse und Hyperbel erzeugt werden, die Spira, welche Hero als durch Drehung eines Kreises um eine nicht durch sein Centrum gehende Gerade erzeugt definiert, und die von Pappus erwähnte plektoidische Oberfläche, eine spezielle Schraubenfläche. Im Zusammenhang mit der Kugel betrachteten die Pythagoräer die 5 regelmäfsigen Körper, die kosmischen Körper. Archimedes, der das Buch von den Konoiden und Sphäroiden geschrieben, ersann die 13 halbregelmäfsigen Körper, die von regelmäfsigen Polygonen verschiedener Gattung begrenzt wurden. An ihn knüpfte nach einem Zwischenraume von mehr als 18 Jahrhunderten Kepler

an, der in seiner *Doliometria* den Inhalt von 92 neuen Umdrehungskörpern bestimmte, deren einzelne er als apfelförmige, citronenförmige, olivenförmige benannte. Parent nennt, in seinem Buche: *Des affections des superficies* (1700) wie schon früher (1669) Wren, das Umdrehungshyperboloid mit einer Mantelfläche Cylindroid. Monge schuf Namen für Flächenfamilien: allein die meisten Namen für besondere Flächen, die wir jetzt kennen, sind nicht viel älter als ein halbes Jahrhundert.

Wir beginnen bei unserer Aufzählung mit den verschiedenen Kugeln, kegelförmigen Körpern, Ellipsoiden, Hyperboloiden und Paraboloiden. Von *Kugeln* haben wir: die Euklidische, Mongesche, Punkt-, Grenz-, Nnll-, An-, In-, Um-, Hilfs-, Krümmungs-, Oskulations-, Schmiegungs-, Fokal-, Direktor-, Potenz-, Radikal-, orientierte, Afterkugel für Sphäroid, die Kugel der mittleren Krümmung, der Inversion, der 12 Punkte. Ferner Afterkugel oder Konoid, Chaslesscher, Kummerscher, Doppel-, eingeschriebener, umschriebener, Umhüllnngs-, Schmiegungs-, Komplex-, Richtungs-, Ergänzungs- oder Supplementar-, gerader, schiefer, Kreis-, elliptischer, Rotations-, gleichseitiger, abgestumpfter, Zwölfpunktkegel; Archimedisches, Plückersches, elliptisches, hyperbolisches, parabolisches, logarithmisches, Kreuzgewölbe-Konoid. Von *Ellipsoiden* sind folgende Spezies zu nennen: abgeplattetes, gestrecktes oder verlängertes, zweiachsiges oder Rotationsellipsoid, dreiachsiges, sphärisches, imaginäres, Trägheits-, astatisches, Fehler-, Haupt-, Leitungs-, Polarisations-, Bessels, Clarkes, Mac Laurins, Jacobis, Darboux', Lamés, Culmanns, Druck-, Elastizitäts-, Centralellipsoid und Ellipsoid gleicher Excentrizität; ferner das einschalige oder einfache Hyperboloid, das zweischalige, gleichseitige, Rotations-, elliptische, geradlinige, Oskulationshyperboloid; und das elliptische, hyperbolische, Rotations-, Verbindungs-Paraboloid und das Paraboloid der 8 Geraden.

Die *krummen Flächen* im Allgemeinen werden eingeteilt nach dem Grade, der Klasse, der Ordnung, dem Geschlecht. Sie gruppieren sich nach verschiedenen Familien. Von geradlinigen oder Regelflächen seien genannt die Bertrandsche und Cayleysche Regelfläche, Linien-, Strahlen-, Achsen-, Schrauben- oder Helikoid-, cylindrische, Brennpunkten-, Keil-, symmetrische, Haupt-, Quadri-, Quadricuspidal-, Quadrispinalflächen, algebraische Regelflächen. Ferner Minimalflächen, Minimalregel-, Umdrehungs- und algebraische Minimalflächen; Evolventen, Enveloppen, abgewickelte, abwickelnde, abwickelbare, Null-, Kugelhüll-, Selbsthüllflächen; Kanal-, Röhren-, Ring-, Rotationsflächen; konkave, nirgends konkave, konvexe, biegsame, unausdehnbare, anallagmatische, metrische, analytische, rationale, irrationale, algebraische, imaginäre, unikursale, cyklotomische, apsidale, Äquipotential-, Meridian-, Komplex-, Pseudo-, hemicyklidische Flächen, Flächen konstanter mittlerer, konstanter totaler, konstanter negativer

Krümmung; Flächen von n Dimensionen, Elementar-, Fundamental-, Hyperquadri-, Diskriminantenflächen, nicht-euklidische Minimalflächen. In Bezug auf eine gegebene Fläche, eine Schar von Kurven und Flächen, einen Komplex oder ein System haben wir folgende abhängige Flächen: Mittelpunkts- oder Centra-, Krümmungsmittelpunkts-, Fokal- oder Brennpunkten-, Fufspunkten, Normalen-, orthogonale, orthogonale Trajektorien-, Parallel-, Polar-, Quadripolar-, Reziprokal-, Satellit-, Direktor-, Hessesche, Jacobische, Determinanten-, rektifizierende, adjungierte, apsidale, Arguesische, homographische, reziproke, inverse, Knoten-, Referenz-, ähnliche, äquiharmonische, homologe, homothetische, antikaustische, apsidale, koaxiale, koncentrische, koncyklische, konfokale, diametrale, negative harmonisch zugeordnete, involutorische, isometrische, assoziierte, asymptotische, Tangential-, Binormalen-, Kern-, konjugierte Kern-, konjugierte Apsidal-, konjugierte Knoten-, Integral-, Singularitäten-, oskulatorische oder Schmiegungsfläche. Von Flächen zweiten Grades nennen wir: die ovale, nullteilige, ringförmige, autopolare, normopolare, Äquatorial und absolute Grenzfläche; von den kubischen Flächen: Diagonal-, Wieners, Brenn-, Kapillarfläche; von Flächen vierten Grades: Cyklide, und zwar die binodale, Cartesische, Dupinsche, Gyrocyklide, dianodale, cyklische, oktadische, Kummersche, Plückersche Komplexfläche, Steinersche oder Römerfläche, Dianome, Oktodianome, Enneadianome, Dekadianome. Andere spezielle Flächen sind: Balls und Cayleys Cylindroid, Enneпers, Joachimsthals, Weingartens, Cliffords, Lamés, Fresnels Wellenfläche, Liouvilles, Malus', Möbius', Riemannsche Fläche, Wallis' Konoid, Niveaufläche, topographische, elastische, hyperelliptische, hyperjacobische, kaustische, isotrope, modanierte, orientierte, projektive, prospektive, pseudosphärische, Eifläche oder Ovoid, Geoid, Nodoid, Unduloid, Konikoid, Monoid, Klinoide, Kunokuneus, Wölbfläche, Gesimsfläche, Elastizitäts-, Potential-, Schwerpunkts-, Translations-, Rückungs-, Kettenfläche oder Katenoid, Alysseide, Momentenfläche, Gleit-, Kiel-, Schiffskiel-, Isogyren-, isostatische, Isothermen-, parabolische, Isothermenfläche, Fläche kleinsten Widerstandes, Fläche gleicher Beleuchtung, Trajektorien-, Richtungs-, Tetraedralfläche.

§ 4. Arithmetische Gebilde: Zahlen, Formen, Funktionen, Gleichungen, Differentiale, Integrale, Reihen, Gruppen.

Die Alten unterschieden verschieden gestaltete Zahlen durch Namen, die jetzt nicht mehr gebraucht werden. Ein grofser Teil dieser Namen entspringt der rein geometrischen Versinnbildlichung der Zahlengröfsen.

Schon bei den Pythagoräern wurden gerade und ungerade, vollkommene, überschiefsende und mangelhafte Zahlen unterschieden. Ferner haben wir im Altertum ebene, Flächen- und Körperzahlen; heteromeke,

barlongische, oblonge, längliche, parallelogrammische, parallelepipedische, Zirkel- oder Kreis-, Kugel-, Keil- oder sphenische, Kolumnar- oder Säulen-, Brett-, Diametral-, Seiten-, Finger-, Gelenk- oder Glied-, Altar-, promeke, pronische oder Pronik-, ähnliche, kommensurable, inkommensurable Zahlen. Ferner die figurierten Zahlen: Dreiecks- oder Triangular- oder Trigonal-, Vierecks- oder Tetragonal-, Fünfecks- oder Pentagonal-, Sechsecks- oder Hexagonal-, Siebenecks- oder Heptagonal-, Achtecks- oder Oktogonal-, Neunecks- oder Enneagonal-, Zehnecks- oder Dekagonal-, Elfecks- oder Enneagonal-, Zwölfecks- oder Dodekagonal-, Vielecks- oder Polygonal-, Polyedral-, Tetraedral-, Pyramidal-, Pyrgoidal- oder Turmzahlen. Die Verhältnisse waren gröfsere und kleinere, vielfache oder vervielfältigte, überteilige oder überteilende und andere. Nach der Zerlegung in Faktoren unterschied man gerad-gerade, gerad-ungerade, ungerad-gerade, ungerad-ungerade, gleich-gleiche, gleich-gleich-mangelhafte, gleich-gleich-überschiefsende etc. etc. Zahlen. In der Geschichte haben wir Archimedes' Sandeszahl, Platons Heiratszahl, Pythagoräische und Euklidische Zahl.

Seit Einführung der Algebra rechnete man mit kossischen Zahlen; nun unterschied man: positive oder affirmative, negative oder absurde, rationale und irrationale, reelle und imaginäre, algebraische und transzendente, einfache und zusammengesetzte, Primzahlen, teilbare Zahlen; komplexe, konjugiert imaginäre, ideale Zahlen; absolute und relative Primzahlen, adjungierte, äquivalente, kongruente, korrespondierende, unabhängige, linear unabhängige, darstellbare, enthaltene, zusammengehörige Zahlen; ferner in der höheren Algebra formale, aktive, passive, alternierende, reduzierte, irreduktible, primitive, distributive, pseudosymmetrische, Grundzahl eines Zahlkörpers, Zahl einer endlichen Menge, endliche und unendliche, Ordinal- oder Ordnungs-, Cardinal-, transfinite, aktuelle, laterale, Phönix-, Richtungs-, Stufenzahl eines Gröfsensystems u. a. In der darstellenden Geometrie haben wir die Kotenzahl, in der analytischen Geometrie Grad-, Geschlechts-, Klassen-, invariante, Plückersche Zahl, in der Theorie der Differentialgleichungen konstante und charakteristische Zahl, in den Reihen Bernoullische, Eulersche, Eulersche höherer Ordnung, Ludolfsche, Laisantsche, Segnersche, Lamésche Zahl, in der Mechanik Galileische, Gausssche, Cauchysche, Schwingungszahl, in der Chronologie goldene Zahl und Römer-Zinszahl.

Die Theorie der *Formen*, zu der wir jetzt übergehen, hat eine überaus reiche Terminologie, obwohl die meisten der darin vorkommenden Kunstausdrücke nicht älter als ein halbes Jahrhundert sind. Die meisten dieser Namen verdanken wir den englischen Mathematikern Sylvester und Cayley. Die Formen, bei den Engländern „quantics" genannt, sind

ganze rationale homogene Funktionen zweier oder mehrerer Variabeln. Diese Formen wurden zuerst betrachtet in der Zahlentheorie, besonders seit Gauss; später in der Algebra, besonders in der Invariantentheorie. Daher unterscheidet man zahlentheoretische und algebraische Formen; nach dem Grade zerfallen sie in lineare, quadratische, kubische, biquadratische, etc., Formen *n*ten Grades, nach der Anzahl der Variabeln in binäre, ternäre, quaternäre, etc., Formen *n*ter Ordnung. Ferner hat man definite, semidefinite, indefinite, kanonische, normale, typische, algebraische Formen *r*ter Stufe, biternäre, ultrabinäre, bilineare, biquadrische, trilineare, quadrilineare, ordinäre bilineare, singuläre bilineare, multilineare, mehrfach lineare, abgesonderte, absolute, äquianharmonische, symmetrische, ursprüngliche, transformierte, harmonische Form. Die wichtigsten mit der Theorie der Formen zusammenhängenden Funktionen sind die Determinante, die Invariante, die Kovariante. Es giebt Determinanten einer quadratischen Form, einer linearen Form, einer Substitution, Transformation, Kombination, Gruppe. Die Determinante von *n* Elementen, deren Gesamtheit, in einem Quadrat angeordnet, eine quadratische Matrix bildet, heifst von der *n*ten Ordnung. Spezielle Namen für Determinanten sind: einfache, mehrfache, zusammengesetzte, einreihige, mehrreihige, reguläre, irreguläre, quadratische, kubische, algebraische, endliche, unendliche, symmetrische, halbsymmetrische, schiefe, centroschiefe, schiefsymmetrische oder überschlagene, persymmetrische, orthosymmetrische oder rekurrierende, doppeltorthosymmetrische oder Zirkulardeterminante oder Zirkulante, geränderte, komplementäre, Haupt-, Unterdeterminante oder Minor oder partielle, alternierende oder Alternante, Kettenbruchdeterminante oder Kontinuante, Fundamental-, Polar-, Potenz-, Hyper-, Reziprokal-, Funktional- oder Jacobische Determinante, Biegungs- oder Inflexions-, Hessesche, Cayleysche, Cayley-Aronholdsche, Pfaffsche, Vandermondesche Determinante. Invarianten einer Form (von Cayley anfänglich Hyperdeterminanten genannt) giebt es gerade oder von geradem Charakter und schiefe oder von ungeradem Charakter; spezielle Formen sind: ganze, algebraische, homogene, rationale, transzendente, quadratische, kubische, ternäre, absolute, halbabsolute, relative, projektive, evidente Invariante oder Konstante, Haupt-, Pen- oder Semiinvariante, Nullform, Perpetnante, syzygetische, asyzygetische, Polar-, Berührungs- oder Tangential- oder Taktinvariante, Oskulations- oder Schmiegungs-, Differential-, Integral-, Punkt-, Biegungsinvariante oder Inflektante, Funktional-, Fundamental-, Klasseninvariante; Invariante eines Büschels, eines Netzes, eines linearen Komplexes, konfokaler Kegelschnitte, eines Systems linearer Differentialgleichungen, einer Gruppe, der Inversion u. s. w.

Bei Kovarianten unterscheidet man ebenfalls gerade und schiefe, ganze, rationale, irrationale, algebraische, syzygetische, asyzygetische, assoziierte,

simultane, primäre, irreduktible, Elementar-, Biegungs-, Halb- oder Semi-, JACOBIsche, STEINERsche, gemischte Kovariante oder Divariante; Kovariante eines Büschels, einer Kurve, eines Kegelschnittes, eines Netzes, eines Systems von Formen.

Andere Namen für Formen sind: Resultante zweier Formen oder eines Gleichungssystems, Eliminante, CAUCHYS, SYLVESTERS, Formen-, Gesamt-Eliminante, typische Resultante, BÉZOUTiante, Resolvente, Koresolvente, GALOISsche, JACOBIsche, LAGRANGES, MALFATTIS, Differentialresolvente, Diskriminante, Subdiskriminante, Gattungsdiskriminante, Konkomitante, gemischte Konkomitaute oder Zwischenform oder Divariante, Kontravariante oder zugehörige Form, Kontrariante, Variante, Nivellante, Kombinante, Hauptkombinante, assoziierte Kombinante, Kommunikante, Kommutante, Evectante, Transevectante, Catalektikante, Kanonizante, Reziprokante, absolute, adjungierte, SCHWARZsche Reziprokante, Prinzipiante, Geminante oder Zwillingsform, Schwesterformen, konjugierte oder vereinigt liegende, apolare, harmonisch konjugierte, Harmonizante, zugehörige Formen, BRINGsche, JERRARDsche, HERMITEsche, BRIOSCHIsche, BRILLsche, MASCHKEsche Form, monomiale Form, Polyederformen: Dieder-, Tetraeder-, Oktaeder-, Dodekaeder-, Ikosaederform; Koinzidenzform, Gradiente, Denumerante, Involutante, Retrovariante, Syzygante, automorphe Form, kollineare Form, ursprüngliche oder Urform, transformierte, simultane Form, frühere Form, präparierte Form. Von Operationen, die die Invarianteneigenschaft nicht ändern, sind zu nennen der ARONHOLDsche Prozefs, Polaren-, Omega-, CAYLEYsche, CLEBSCHsche Prozefs, der GORDANsche oder Faltungsprozefs, Überschiebung oder Transvektion.

Wir gehen nun zur Terminologie der *Funktionentheorie*. Es giebt Funktionen einer und mehrerer Variabeln, ersten Grades oder lineare, quadratische, kubische, biquadratische, etc., *n*ten Grades, analytische, rationale, ganze rationale, gebrochene rationale, allgemeine rationale, algebraische, transzendente, irrationale, imaginäre, komplexe; zusammengesetzte oder Funktionsfunktionen, inverse, Umkehrungs-, explicite oder entwickelte, implicite oder unentwickelte, stetige oder kontinuierliche, unstetige oder diskontinuierliche, linear-, punktweise- und total unstetige, fluktuierende, unendlich oft oscillierende, Funktionen mit beschränkter Schwankung, differenziierbare oder orthoide und nicht differenziierbare, Funktionen einer komplexen Variabeln oder monogene, eindeutige analytische oder monodrome, monotrope, mehrdeutige analytische oder polydrome, einwertige und mehrwertige, meromorphe, monotone, gesetzmäfsige, legitime, illegitime, semidefinite, isotrope, polytrope, halbanalytische, nichtanalytische, holomorphe oder synektische oder vom Charakter einer ganzen Funktion, meromorphe oder asynektische oder vom Charakter einer gebrochenen

rationalen Funktion, entwickelbare, Haupt-, Potential- oder harmonische, mit natürlichen Grenzen oder Lückenfunktionen. Ferner: homogene, symmetrische, alternierende, adjungierte, konjugierte, ähnliche Interpolationsfunktionen 1., 2., . . ., *n*ter Ordnung, abgeleitete oder derivierte, metacyklische, halbmetacyklische, irreduktible, primitive, Prim-, Fundamentalfunktionen, kritische, invariante, resolvierende, transitive, verwandte, Sturmsche, Aleph-, numerische, Tchebychefs, Galoissche, Cauchys, d'Alemberts, Bernoullische, Jacob-Bernoullische, Clairautsche, Dirichletsche Funktion. Von transzendenten Funktionen nennen wir die goniometrische, cyklometrische, Arcusfunktion, trigonometrische, Sinus-, Cosinus-, Tangens-, Cotangens-, Exponential-, logarithmische, cyklische, Kreis-, Kreisteilungs- oder cyklotomische, longimetrische, hyperbolische oder Hyperbelfunktion, Hyperboloidfunktion, Eulersche 1. und 2. Art oder Beta- und Gammafunktion, unvollständige Eulersche, unvollständige Gamma-, Eulersche φ-Funktion, Binetsche, Prymsche, benachbarte, hypergeometrische, Gausssche, Riemannsche, Schwarzsche, Thomaesche, hyperalgebraische, hyperdistributive Funktion. Die periodischen Funktionen sind einfach-, doppelt-, vierfach-, 2 *m*-fach periodische; auch hat man halb- und pseudoperiodische; besondere periodische sind die Modulfunktion, die elliptische, hyperelliptische Modulfunktion, Modularfunktion, Modularfunktion höherer Ordnung, Hermitesche φ-Funktion, automorphe, doppelperiodische 1., 2. und 3. Art, elliptische 1., 2. und 3. Gattung, Jacobische oder Thetafunktion, Zetafunktion, hyperelliptische, Weierstrasssche Al-, σ- und $\wp$-Funktion, Rosenhainsche, Fuchssche, Kleinsche, thetafuchssche, thetakleinsche, elliptische Funktion *n*ter Stufe, Abelsche, hyperabelsche, hyperfuchssche, hyperelliptische Sigmafunktion; ferner Kugelfunktion 1. und 2. Art und *n*ter Ordnung, Legendresche und Laplacesche Kugelfunktion, Besselsche, Laméсhe, hypersphärische, Ringfunktion und Funktion des elliptischen und des parabolischen Cylinders. Endlich seien noch genannt als anderen Disziplinen als der Funktionentheorie angehörig die erzeugende Funktion, Abels, Borchardts, Laplaces erzeugende Funktion, Bestimmungs-, Ergänzungs-, Polyeder-, Oktaeder-, Ikosaeder-, iterierte, Linien-, anharmonische, polyharmonische, Biegungs-. Verschiebungs-, charakteristische der Dynamik, einer Substitution, der infinitesimalen Berührungstransformation, empirische, Fehler-, Vektorfunktion, Kräfte-, Potential-, Greensche, Strom-, Störungs-, Hamiltonsche, Spannungs-, toroidale, Wirkungs- und Zerstreuungsfunktion.

Im engsten Zusammenhange mit der Theorie der algebraischen Formen und der algebraischen Funktionen steht die Theorie der algebraischen *Gleichungen*. Denn eine algebraische Gleichung mit einer Unbekannten x ist eine gleich Null gesetzte, nach fallenden Potenzen von x geordnete

algebraische Funktion. Dadurch wird es gerechtfertigt erscheinen, wenn wir jetzt zur Terminologie der Gleichungen überhaupt übergehen. Denn wir beschränken uns dabei nicht auf die Algebra, sondern führen auch Gleichungen an, die in anderen mathematischen Disziplinen auftreten. Einige historisch wichtige Regeln und Methoden für die Auflösung der Gleichungen haben besondere Namen, so die Methode der Wagschalen oder regula lancinm, die Methode des falschen Ansatzes, die Methode der beiden falschen Substitutionen, die regula falsorum, die Transpositions-, die Substitutionsmethode, die regula infusa. Die Eliminationsmethoden späterer Zeit haben wir schon oben genannt, ebenso die Nährungsmethoden. Hier erwähnen wir noch die Methode der Behandlung des casus irreducibilis, die goniometrische Methode, LANDENS Methode der Integration, TSCHIRNHAUSENS, BRINGS, JERRARDS, HERMITES, DARBOUX' und die italienische Methode FERRARIS. Die Potenzen der Unbekannten waren: x, numerus oder cosa oder Ding oder Wurzel; x^2, census oder Quadrat, x^3, cubus, x^4, Biquadrat etc.; CARDANO nannte die positive Wurzel radix vera, die negative radix ficta. Wir führen nun die verschiedenen Arten von Gleichungen an, deren Namen meist modernen Ursprungs sind. Es giebt algebraische und transzendente Gleichungen, lineare oder 1. Grades, quadratische oder 2., kubische oder 3., biquadratische oder 4., ferner 5., etc., $n$ten Grades, Gleichungen mit $1, 2, 3, \ldots, r$ Unbekannten, reine, unreine, vollständige, unvollständige, Bestimmung-, porismatische, Buchstaben- oder litterale, numerische oder Zahlen-, auflösbare, algebraisch auflösbare, durch Wurzeln auflösbare, homogene, symmetrische, ähnliche, äquivalente, identische, reziproke, binomische, trinomische, quartinomische, polynomische, cyklische, metacyklische, reduktible, irreduktible, reduzierte, primitive, resolvierende, GALOISsche, JACOBIsche, Kreisteilungs-, Teilungs-, Polyeder-, Tetraeder-, Oktaeder-, Ikosaeder-, Modular-, Multiplikator-, Periodengleichungen; Gleichung der Wurzelsummen, Wurzeldifferenzen, quadratischen Differenzen, Wurzelprodukte, Wurzelquotienten, Wurzelpotenzen; ferner arithmetische, Pythagoräische, PELLsche, diophantische, unbestimmte, transzendente, goniometrische, trigonometrische, stereometrische, GAUSSsche, logarithmische, Exponential-, Funktional-, Endgleichung der Elimination, simultane Gleichungen, Differenzengleichung, endliche, gemischte und totale Differenzengleichung, Differentialgleichung.

Von *Differentialgleichungen* unterscheidet man totale oder vollständige, gewöhnliche und partielle, lineare oder 1. Grades, halblineare, quadratische oder 2., kubische oder 3. Grades, erster Ordnung, 2., 3., …, $n$ter Ordnung, mit konstanten, veränderlichen, periodischen, doppeltperiodischen Koeffizienten, binomische, harmonische, homogene, nicht homogene, reduktible, irreduktible, reduzierte, reguläre, irreguläre, reziproke, adjungierte, charak-

teristische, integrierbare, integrierende, algebraische, elliptische, hyperbolische, hyperelliptische, hypergeometrische, gleichverzweigte, simultane, assoziierte, allgemeine, allgemeine harmonische, Hilfs-, Integral-, Normalgleichung; ferner Bernoullische, Lamésche, Riccatische, Lagranges, Bessels, Legendres, Hamiltons, Laplaces, Clairauts, Monges, Picards, Pfaffs, Eulers, Ampères, Kummers Differentialgleichung.

In der *analytischen Geometrie* haben wir folgende Namen: Koordinatengleichung, Achsen-, Asymptoten-, lineare, quadratische, binäre, ternäre, multilineare, kanonische, Parameter-, Punkt-, Scheitel-, Tangenten-, Polar-, Fokal-, Fokalpolar-, sich selbst polare, barycentrische, Koinzidenz-, Korrespondenz-, Direktor-, spezifische, Bedingungsgleichung; und Gleichung eines geometrischen Ortes, einer Geraden, einer Linie, einer Kurve, einer Ebene, eines Kreises, einer Fläche, Hessesche nnd Mongesche Gleichung.

In der *Mechanik* sind zu nennen: Gleichungen der Dynamik, Bewegungs-, Beschleunigungs-, Störungs-, Pendel-, Potential-, Kontinuitäts-, Grenz-, Diffusions-, Hauptgleichung der mechanischen Wärmetheorie, Eulersche, Lagrangesche Gleichungen nnd eine andere Reihe von schon oben angeführten Differentialgleichungen; ferner Quaternionengleichung, unilaterale, bilaterale, monothetische, symbolische, Vektorgleichung.

Astronomische Gleichungen sind die Keplersche nnd Lambertsche, die Gleichung der Bahn, Mittelpunkts-, Zeit-, jährliche, säkulare, persönliche, die Gleichung der Sonne, des Mondes, der Planeten.

Wir wendeu uns nun zur Iufinitesimalrechnung und nennen besondere *Differentiale* und *Integrale.* In der infinitesimalen Geometrie leitet man das Differential eines Kurvenbogens, einer Oberfläche, eiues Sektors, eines Segmentes, einer Fläche oder eines Volumens her; in der Differentialrechnnng das einer Funktion von einer oder mehreren Variabeln. Daher die Bezeichnungen: algebraisches, rationales, irrationales, transzendentes, reelles, imaginäres, binomisches, elliptisches, hyperelliptisches, Abelsches, totales oder vollständiges, partielles, unvollständiges, exaktes Differential, und Differential 1., 2., 3., . . . , *n*. Ordnnng, höheres Differential.

Das *Integral* ist bestimmt oder unbestimmt, einfach, doppelt, dreifach, mehrfach oder vielfach, geschlossen, krummlinig, geradlinig, eindeutig, regulär, irregulär, stetig, unstetig, uneigentlich, singulär, absolut oder bedingt konvergent, endlich, vollständig, partikulär, intermediär oder Zwischenintegral, Fundamental-, Supplementar-, Restintegral, allgemein, algebraisch, binomisch, transzendent, trigonometrisch, logarithmisch, elliptisch, 1., 2. und 3. Gattung, hyperelliptisch, Abelsch, hypergeometrisch, Normal-, Fundamental-, Hauptintegral, darstellend, quadrierend, kombinatorisch, Randintegral; ferner Integral einer rationalen, irrationalen, algebraischen, transcendenten, cyklometrischen, trigonometrischen, Exponentialfunktion,

einer Differentialgleichung, Sinus-, Cosinus-, cylindrisches Integral, ABELsches Doppelintegral, FOURIERS, FOURIERS Doppelintegral, LAMÉS Doppelintegral, LEGENDRES Integral 1., 2., 3. Gattung (von LEGENDRE elliptische Funktionen genannt), CAUCHYS, EULERS 1. und 2. Gattnng, DIRICHLETS, LAGRANGES, LAPLACES, FRESNELS Integral, Integral der kleinsten Wirkung, der lebendigen Kräfte, Wirkungs-, Wahrscheinlichkeits-Integral.

In Bezug auf Reihen haben wir aufser einigen Namen für allgemeine Gattungen eine gröfsere Zahl von Personalbenennungen zu verzeichnen, die erst im letzten Jahrhundert entstanden sind. Es giebt folgende Arten von Reihen: endliche und unendliche, einfache, Doppelreihen, Reihen mit mehrfachem Eingang, konvergente, divergente, einfach-, absolut-, unbedingt-, bedingt und gleichmäfsig-, semi-konvergente, semi-divergente, summierbare, ganze, Potenz-, anfsteigende, absteigende, Differenzen-, asymptotische, Partial-, reziproke, rekurrente, arithmetische, geometrische, algebraische, numerische oder Zahlen-, Fakultätenreihen, oscillierende, geometrische, trigonometrische, FOURIERsche Reihen. Von speziellen Reihen nennen wir: die harmonische, binomische, polynomische, Exponential-, Sinus-, Cosinus-, Tangens-, Cotangens-, Arcussinus-, Arcustangens-, logarithmische, hypergeometrische, hypergeometrische $n$ter Ordnung, GAUSSsche Thetareihe, ABELsche, LEIBNIZsche, BERNOULLIsche, FAREYsche, SCHWABsche, BORDAS, MERCATORS, BROUNCKERS, BÜRMANNS, LAGRANGES, DIRICHLETS, RIEMANNS, EULERsche, STURMsche, TAYLORsche, MACLAURINsche, LAURENTsche, LAPLACEsche, LAMÉsche, HEINEsche, höhere HEINEsche, GORDANsche, LAMBERTsche, LEGENDREsche, MALMSTENsche, EISENSTEINsche, KRONECKERsche Reihe.

Wir schliefsen das Verzeichnis der mathematischen Knnstausdrücke mit dem Begriffe der *Gruppe*, der, wie LIE einst vorhergesagt, eine ganz hervorragende Stelle in der Mathematik einnimmt und das Bestreben hat, diese ganze Wissenschaft zu beherrschen. Da die Gruppe eine Gesamtheit von Substitntionen und Transformationen ist, so wollen wir zunächst die besonderen Arten der *Substitutionen* und *Transformationen* benennen. Je nachdem mit arithmetischen oder Raumelementen operiert wird, nennen wir die Substitutionen und Transformationen arithmetische oder geometrische; ferner unterscheidet man rationale, lineare, quadratische, kubische, biquadratische, cyklische, zirkulare, reziproke, umkehrbare, vertauschbare, kongruente, identische, adjungierte, konjugierte, perspektive, projektive, ähnliche, orthogonale, isogonale, konforme, elliptische, parabolische, loxodrome, infinitesimale. Von den Substitutionen nennen wir noch die gerade, ungerade, binäre, ternäre, quaternäre, elementare, eigentliche, uneigentliche, fundamentale, primitive, reduzierende, reduzierte, reguläre, irreguläre, ABELsche, HERMITEsche, LAPLACEsche; von Transformationen

die Berührungstransformation, die infinitesimale Berührungstransformation, Umhüllungs-, orthotangentiale, omaloidische, Arguesische, Jonquièressche, Cremonasche, Bäcklundsche, Möbiussche, Chasles', Laguerres, Roberts', Bonnets, die Transformation durch Halbgeraden und Halbebenen, durch reziproke Polaren, durch reziproke Radien oder Inversion.

Die *Gruppen* unterscheidet man in Ordnungen (nach der Anzahl der Substitutionen) und in Grade, in endliche und unendliche, binäre, ternäre, quaternäre, primitive und imprimitive, ein- und mehrstufige, isomorphe, holoedrische, meroedrische, ähnliche, ähnliche transformierte, konforme, homogene, einfach oder mehrfach transitive, intransitive, abgeleitete, adjungierte, konjugierte, äquivalente, reziproke, alternierende, konvergente, symmetrische, harmonische, anharmonische, äquianharmonische, korresiduale, entartete, reguläre, irreguläre, orthogonale, auflösbare, cyklische, nichtcyklische, metacyklische, Monodromie-, monomiale, polyedrische, Dieder-, Tetraeder-, Oktaeder-, Ikosaedergruppe; ferner Untergruppe oder Teiler einer Gruppe, invariante oder ausgezeichnete Untergruppe oder Normalteiler, Maximaluntergruppe oder gröfster Normalteiler, konjugierte Untergruppe, Nebengruppe, stetige oder kontinuierliche, unstetige oder diskontinuierliche, eigentlich oder uneigentlich unstetige; Abelsche, Galoissche, nichtabelsche, hypoabelsche, Hamiltonsche, periodische, Modulgruppe, Fuchssche, hyperfuchssche, Kleinsche, ausgezeichnete, beliebig nahe, Dual-, Gesammt-, Grenz-, Rest-, Zwischengruppe, integrierbare, nicht integrierbare, irreduktible, Haupt-, Faktor-, zerlegbare, zusammengesetzte Gruppe, perfekte, transformierbare, transformierte, Transformationsgruppe, Cremonasche, Hessesche, Jonquièressche, Steinersche, semikubische, systatische, asystatische; endlich Formen-, Zahlen-, Klassen-, Funktionen-, Gleichungs-, Operations-, Permutations-, Zerlegungs-, Verzweigungs-, Quaternionen-, Differentialgleichungs-, Punkt-, Spezial-, Umgebungs-, Geraden-, Strecken-, Elementen-, Kreis-, Kugel-, Komplex-, Kongruenz-, Hauptkongruenz-, Inflexions-, Kollineations-, Bewegungs-, Rotationsgruppe.

II. Abschnitt.

Sprachliche Eigentümlichkeiten der mathematischen Terminologie.

§ 1. Etymologisches.

Die in dem vorigen Abschnitt angeführten Beispiele von mathematischen Kunstausdrücken werden genügen, um dem Leser einen Begriff von der Reichhaltigkeit der mathematischen Nomenklatur zu geben.

Fragen wir uns nun, wie diese technischen Ausdrücke entstanden sind. Veranlassung zur Bildung von Kunstworten war doch wohl, wie in

jeder Wissenschaft so auch in der Mathematik, das häufige Vorkommen ein und derselben zusammengesetzten Begriffe. Um nicht jedesmal durch viele Wörter denselben Begriff darzustellen oder gleichsam zu umschreiben, schuf man für ihn einen besonderen kurzen Namen. Die Wahl dieser sogenannten technischen Ausdrücke war häufig eine rein willkürliche, und oft verschaffte mehr die Autorität des Wortschöpfers als die glückliche Bildung des Kunstausdruckes demselben weitere Verbreitung und dauernde Gültigkeit. Worte, deren ursprüngliche Bildung eine ganz beschränkte war, umgaben sich um so mehr, je länger sie als Kunstwort in Gebrauch waren, mit einer Fülle von Begriffen und gewannen so gleichsam durch das Alter Ansehen und Vollgültigkeit.

Aus der sprachlichen Zusammensetzung des Kunstwortes allein die Bedeutung des mit demselben verbundenen Begriffes zu erschliefsen, wird in vielen Fällen unmöglich sein. Die Kenntnis der Etymologie eines Wortes ist nicht immer ausreichend zum Verständnis des Begriffes. Daher darf man die Bedeutung der etymologischen Forschung für das Verständnis der Terminologie nicht zu hoch anschlagen. Man verlangt mit Recht von einem durchgebildeten Mathematiker die Kenntnis der griechischen Sprache, damit er die Schriften der griechischen Mathematiker im Urtext studiere. Wenn man aber sagt, der Mathematiker müsse griechisch lernen, um die Etymologie der wissenschaftlichen Kunstausdrücke zu verstehen, so ist das verkehrt. In manchen Fällen wird freilich das Erfassen eines Begriffes durch die Kenntnis der Etymologie erleichtert, doch ist die letztere auch entbehrlich. Giebt es doch eine ganze Reihe von Kunstwörtern, deren Begriff allgemein bekannt ist, über deren sprachlichen Ursprung aber sich die Gelehrten noch nicht zu einigen vermochten.

Sobald wir eine Wissenschaft von einer fremden Nation erlernen, entlehnen wir derselben auch die Namen der Kunstausdrücke. Wir geben diesen entweder so wie sie lauten das deutsche Bürgerrecht, oder wir versehen den fremdsprachlichen Stamm des entlehnten Wortes mit deutschen Endungen. In der Mathematik waren Griechen, Römer, Araber, Italiener, Franzosen und Engländer unsre Lehrer; daher kommen in der mathematischen Terminologie viele Wörter vor, deren Ursprung auf die Sprache der genannten Völker zurückzuführen ist. Die Zahl der sogenannten Fremdwörter ist sehr grofs.

Aus dem *Arabischen* stammen beispielsweise die Worte: Algebra, Algorithmus, Ziffer, Zenith, Alhidade, Azimut, Tara, Hasard. Almagest ist bekanntlich ein griechisches Wort, *μέγιστος*, mit dem arabischen Artikel al. *Griechischen* Ursprungs sind die Ausdrücke: Mathematik, Arithmetik, Geometrie, Geodäsie, Mechanik, Astronomie, Stereometrie, Trigonometrie, Physik, Statik, Dynamik, Methode, Analysis, Theorem, System,

Axiom, Ellipse, Hyperbel, Parabel, Polygon, Polynom, Polyeder, Diameter, Parameter, Asymptote, Cissoide, Konchoide, Brachistochrone, Tautochrone, homogen, parallel, sphärisch, harmonisch, homolog, symmetrisch und viele andere. Dem *Lateinischen* entnommen sind: Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Summe, Produkt, Quotient, Quadrat, Definition, Determination, Permutation, Kombination, Variation, Exhaustion, Rektifikation, Linie, Punkt, Regel, Aggregat, Argument, Radius, Faktor, Abscisse, Ordinate, Koeffizient, Determinante, Proportion, Progression, Minute, Sekunde, Funktion, Mantisse, positiv, negativ, decimal, kommensurabel, rational, binär, konkav, konvex, kongruent, konfokal, rekurrent und viele andere. Das Wort Pyramide entstammt dem ägyptischen Worte Piremus. Zum teil lateinisch, zum teil griechisch sind Binom, Bakulometrie, biharmonisch, Betafunktion, Gammafunktion und andere. *Italienischen* Ursprungs sind: Potenz, Tarif, Konto, Kofs, Netto, Million etc. *Französische* Worte sind: Milliarde, Calcul, Calotte, Alignement, Niveau, Nivellement, Arbitrage, Rabatt, Rente, identisch u. a.

Ein vollständiges mathematisches Wörterbuch würde auch die Etymologie der mathematischen Kunstwörter anzuführen haben; wir begnügen uns hier, einige charakteristische Endungen zu nennen, die für die Bedeutung der Ausdrücke bezeichnend sind.

Die Namen einer grofsen Reihe von mathematischen *Disziplinen* sind aus griechischen Adjektiven auf -τική, zu denen das Hauptwort τέχνη, Kunst, zu ergänzen ist, entstanden. Sprach man doch noch im Mittelalter von den Disziplinen als von freien *Künsten*, artibus liberalibus, z. B. Mathematik, Arithmetik, Logistik, Optik, Akustik, Statik, Kinetik, Kinematik, Praktik, Ballistik, Atomistik, Energetik, Gromatik, Syntaktik. Ebenfalls Endungen auf -ik (-ική) haben Technik, Gnonomik, Mechanik, Dynamik, Kombinatorik, Dioptrik etc. Andere Disziplinen endigen auf -nomie, von νόμος, Gesetz, Lehre: Astronomie, Phoronomie, Daktylonomie, Chironomie; oder auf -logie, von λόγος, Lehre: Astrologie, Arithmologie, Methodologie, Metrologie, Chronologie, Klimatologie. Eine weitere Reihe mathematischer Disziplinen endigt auf -metrie, von μετρεῖν, messen, entsprechend dem deutschen Mefskunst. Z. B. Geometrie, Planimetrie, Goniometrie, Stereometrie, Trigonometrie, Cyklometrie, Euthymetrie, Polygonometrie, Tetragonometrie, Tetraedrometrie, Polyedrometrie, Doliometrie, Axonometrie, Arithmometrie, Archimetrie, Pantometrie, Tachymetrie, Chronometrie, Anthropometrie, Hygrometrie u. s. w. Wieder andere endigen mit -graphie, von γράφειν, schreiben, also Beschreibung: Cyklographie, Chronographie, Ichnographie, Kosmographie, Nomographie, Pantographie, Chorographie, Geographie, Geometrographie, Kalendariographie, Krystallographie, Pasigraphie u. a.

Den genannten Endungen der Hauptworte entsprechen die Adjektivendungen: -tisch: mathematisch, arithmetisch, etc., -metrisch: geometrisch, planimetrisch etc., -nomisch: astronomisch etc., -logisch: astrologisch etc., -graphisch: cyklographisch etc.

Mit dem Worte -meter (Messer) schliefsen aufser Diameter, Parameter Namen von Mefsinstrumenten oder Mefsapparaten, wie: Goniometer, Planimeter, Kathetometer, Klinometer, Mikrometer, Pantometer, Akribometer, Embadometer, Chronometer, Aktinometer, Barometer, Dynamometer, Tachymeter, Manometer etc. Eine Reihe von Zeichenapparaten trägt die Endsilbe -graph: Pantograph, Ellipsograph, Hyperbolograph, Diagraph, Kinograph, Konograph, Hodograph, Perspektograph, Traktoriograph u. a.

Die beliebte Endung auf -oide, griechisch -οειδής, von εἶδος, Gestalt, ist charakteristisch für eine grofse Zahl von krummen Linien. Sie drückt aus, dafs die Kurve Ähnlichkeit hat mit der Form eines bekannten Gebildes, einer Muschel, eines Epheublattes, eines Herzens u. s. w. Solche Kurven-Namen sind: Konchoide, Cissoide, Kardioide, Cykloide, Astroide, Trochoide, Alyssoide, Developpoide, Klothoide, Keradoide, Atriphtaloide, Centroide, Evolutoide, Klinoide, Kochloide, Radioide, Sinusoide, Katenoide, Axoide, Cyknoide etc. Seltsam ist das Wort Cassinoide, das wohl von jemandem konstruiert ist, der sich der Bedeutung der Endigung -oide nicht bewufst war, da er doch wohl nicht eine Kurve bezeichnen wollte, die mit dem Astronomen Cassini Ähnlichkeit hat.

Entsprechend diesen Kurven auf -oide giebt es eine Reihe von Flächen und Körpern, die auf -oid endigen, deren Namen also auch ihre Ähnlichkeit mit anderen Gebilden ausdrückt. Z. B. Cylindroid, Konoid, Sphäroid, Ovoid, Geoid, Unduloid, Neoid, Katenoid, Galenoid, Helikoid, Axoid, Konikoid, Prismoid, Prismatoid, Polyedroid, Oktaedroid, Pentaedroid, Prismatoid u. a. Die Bildung der Namen Ellipsoid, Hyperboloid, die sich erst im XVII. Jahrhundert finden, ist nach der angeführten Bedeutung nicht gerechtfertigt, da diese Körper nicht ähnlich den Kegelschnitten genannt werden können. Passender waren die Bezeichnungen Elliptoide, Hyberboloide, Paraboloide für Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln höherer Ordnung, wie sie im XVII. Jahrhundert vorkommen.

Die Endsilbe -gon, von γωνία, Winkel, entspricht dem deutschen Eck und ist bezeichnend für die fremden Namen der Vielecke. Z. B. Pentagon, Hexagon, Oktogon, Polygon, Chiliogon etc. Durch Linien dargestellte Figuren haben auch in ihrem Namen die Endsilbe -gramm, von γραμμή, Linie, wie Parallelogramm, Pentagramm, Hexagramm, Diagramm, Anagramm. Von ebenen Flächen begrenzte Körper endigen bisweilen auf -eder, von ἕδρα, Fläche, z. B. Polyeder, Tetraeder, Pentaeder, Hexaeder Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder, Rhomboeder, Trapezoeder etc.

In der Arithmetik treten mehrere Worte auf, die männlich auf -tor endigen; zu ergänzen ist vielleicht das Wort numerus; z. B. Multiplikator, Faktor, Indikator, Annihilator, Vektor, Integrator, Operator etc., während die Geometrie mehrere Ausdrücke mit der weiblichen Endung -trix aufweist, zu denen das Wort linea ergänzt werden kann, z. B. Direktrix, Quadratrix, Sektrix, Trisektrix, Generatrix, Indikatrix, Projektrix, Traktrix u. a.

Die modernen Bezeichnungen für algebraische Formen endigen in der Regel auf -ante, lateinisch -ans scil. forma, z. B. Determinante, Invariante, Covariante, Diskriminante, Konkomitante, Eliminante, Resultante, Bézoutiante, Reziprokante, Perpetuante, Binariante, Cirkulante, Kombinante, Kommunikante, Kommutante, Kontravariante, Emanante, Evektante, Syzygante und viele andere.

Eine sehr grofse Zahl mathematischer Termini endigt mit den Silben -ität; es drücken diese Worte in der Regel eine besondere Eigenschaft sowohl arithmetischer als geometrischer Gebilde aus, die sich aus der gegenseitigen Vergleichung derselben ergiebt. Als Beispiele führen wir hier die Worte an: Affinität, Perspektivität, Reziprozität, Projektivität, Kollinearität, Kommensurabilität, Orthogonalität, Proportionalität, Polarität, Kommutativität, Distributivität, Reduktibilität, Homogeneität, Rationalität, etc. etc. In der Physik treffen wir ja bei der Bezeichnung der Eigenschaften von Körpern auf Worte mit derselben Endigung: Capillarität, Elastizität, Stabilität u. a.

Viele Kunstausdrücke, die fremden Sprachen entnommen sind, würden wir gar nicht als Fremdwörter empfinden, wenn sie nicht die undeutschen Endungen -tion, -sion, -ieren, iert u. a. trügen. Wäre es der deutschen Sprache gelungen, die fremden Stämme mit deutschen Endungen zu versehen, so hätte sie sich auf leichte Weise durch eine grofse Zahl von Lehnworten bereichern können. Von der Verdeutschung der Fremdwörter werden wir weiter unten zu reden haben.

§ 2. **Zusammengesetzte Kunstausdrücke. Adjektive. Nominalbenennungen.**

Nicht nur die einzelnen Kunstwörter sondern mehr noch die *zusammengesetzten Kunstausdrücke* sind für die Nomenklatur einer Wissenschaft bezeichnend. Wir haben in dem vorigen Abschnitte an zahlreichen Beispielen gesehen, in wie viele verschiedene Arten oder Spezies einzelne mathematischen Gröfsen oder Gebilde sich sondern, wie viele besondere Methoden, Operationen, Sätze u. s. w. es giebt. Diese Besonderheiten werden durch geeignete *Adjektiva* unterschieden. Die mathematische Terminologie ist aufserordentlich reich an charakteristischen Eigenschaftswörtern.

Nach der Häufigkeit des Vorkommens geordnet nennen wir folgende: harmonisch, konjugiert, sphärisch, elliptisch, geometrisch, polar, reziprok, imaginär, linear, doppelt, logarithmisch, quadratisch, absolut, parabolisch, kubisch, elementar, normal, hyperbolisch, orthogonal, eben, projektiv, schief, rational, fundamental, regulär, asymptotisch, geodätisch, zusammengesetzt, allgemein, konisch, einfach, analytisch, central, simultan, adjungiert, algebraisch, cyklisch, cylindrisch, fokal, symmetrisch, mechanisch, relativ, trigonometrisch, geradlinig, invers, mathematisch, graphisch, reell, komplex, äquivalent, perspektiv, charakteristisch, numerisch, involutorisch, irrational, transzendent, metrisch, parallel, stetig, kollinear, partiell, primitiv, periodisch, singulär, rechtwinklig, tetraedral, binär, eindeutig, unendlich, stationär und eine Reihe anderer, die in unserem Vokabularium mit weniger als 10 Substantiven verbunden zu werden pflegen. Es folgen hier beispielsweise die 56 Hauptwörter, mit denen das am häufigsten vorkommende Adjektiv *harmonisch* vereinigt mathematische Kunstausdrücke bildet: Achse, Analyse, Bewegung, Büschel, Centralelement, Centrum, Konfiguration, Konstante, Kurve, Doppelverhältnis, Dreieck, Dyname, Ebene, Element, Elementengruppe, Fläche, Form, Funktion, Gebilde, Gerade, Gruppe, Hexaeder, Kegelschnitt, Kreis, Kugelfunktion, Lage, Lösung, Mittel, Mittelpunkt, Oberreihe, Oktaeder, Pol, Polare, Polarebene, Polyeder, Polygon, Proportion, Proportionale, Punkt, Punktepaar, Rechteck, Reihe, Sekantenpaar, Spirale, Strahl, Strahlenbüschel, System, Tangente, Teilpunkt, Teilung, Trennung, Verbindung, Verhältnis, Viereck, Vierseit, Winkel.

Gleichwertig den Adjektiven sind gewisse *Vorsilben*, die im Deutschen mit dem Hauptwort zu einem Adverb verbunden werden, in anderen Sprachen aber durch Adjektiva ausgedrückt werden, z. B. Haupt- (französisch „principal“), Kreis-, Flächen-, Gegen- oder Anti-, Berührungs-, Kugel-, Winkel-, Ergänzungs-, Neben-, Punkt-, Differential-, Integral- und andere.

Einige der oben genannten Adjektiva sind sofort verständlich, weil sie eindeutig bestimmt sind, wie: mathematisch, geometrisch, numerisch, quadratisch, kubisch, eben, geradlinig, parallel, periodisch, sphärisch, trigonometrisch u. s. w. Mehrere derselben haben aber eine mannigfaltige Bedeutung, je nachdem sie mit dem einen oder dem anderen Hauptwort verbunden werden. Nehmen wir z. B. das Eigenschaftswort *absolut*, so sehen wir die Mehrdeutigkeit desselben sofort in folgenden Kunstausdrücken: absolute Zahl, absolute Geometrie, absolute Berührung, absolute Form, absolute Polare, absolute Höhe, absoluter Kegelschnitt, absolute Invariante, absolute Krümmung, absolute Wahrscheinlichkeit. Es ist unmöglich, das Wort *absolut* so zu definieren, dafs die Definition für alle diese Verbindungen pafst. Ähnlich vieldeutig sind folgende Adjektiva:

charakteristisch, reziprok, elementar, elliptisch, hyperbolisch, parabolisch, harmonisch, äquivalent, imaginär, rational, linear, adjungiert, mechanisch, normal, schief u. a.

Auf den neueren Ursprung gewisser Adjektiva hinzuweisen hatten wir schon im ersten Abschnitt Gelegenheit. Ein großer Teil derselben ist nicht älter als hundert Jahre, z. B. absolut, adjungiert, konjugiert, asymptotisch, äquivalent, homographisch, kollinear, involutorisch, orthogonal, perspektiv, projektiv, stationär, kontinuierlich, metrisch, primitiv, fokal, konfokal, polar, graphisch, binär, ternär, charakteristisch, barycentrisch, äquipollent etc. etc.

Zu den zusammengesetzten Kunstausdrücken gehören ferner die *Personalbenennungen*. Es ist in neuerer Zeit, besonders erst in der zweiten Häfte des XIX. Jahrhunderts, Mode geworden, mathematische Gebilde und mathematische Sätze nach ihren wahren oder vermeintlichen Entdeckern zu benennen. Punkte, Gerade, Figuren, Kurven, Flächen, Körper, Koordinaten, Transformationen, Systeme, Ausdrücke, Koeffizienten, Summen, Produkte, Polynome, Reihen, Zahlen, Konstanten, Regeln, Formeln, Symbole, Integrale, Funktionen, Formen, Gruppen, Operationen, Sätze, Probleme, Lösungen, Prinzipien, Methoden, Theorieen, Gesetze, Apparate werden mit Namen von Mathematikern, Astronomen, Philosophen, Physikern bezeichnet. Am zahlreichsten sind natürlich die neueren Mathematiker. Aus dem Altertum finden wir nur: Pythagoras, Plato, Euklid, Apollonius, Archimedes, Hippokrates, Hero, Meton, Diophant und Pappus. Von den neueren Mathematikern sind am häufigsten vertreten Euler, Gauss und Steiner. Es wird nicht ohne Interesse sein, hier beispielsweise anzuführen, was als Eulerisch bezeichnet wird: Additionstheorem, Bewegungsgleichungen, Konstante, Differentialgleichung, Eliminationsmethode, Faktor, Formel, Funktion, Gerade, Integral, interpoliertes Produkt, Kettenbruch, Kreis, Linie, Lösung, Methode, Polyeder, Problem, Reihe, Satz, Störung, Symbol, Zahl. Nach Gauss sind benannt: Abbildung, absolutes Maß, Konstante der Gravitation, Ebene der komplexen Zahlen, Fundamentalsatz der Axonometrie, Fundamentaltheorem der Zahlentheorie, Funktion, Gleichung, Interpolationsformel, Krümmungsmaß, Logarithmus, Mittelwertsatz der Potentialtheorie, Pendel, Pentagramm, Periode, Prinzip, Quadraturmethode, Raum, Reihe, Summe, Zahl. Mit dem Namen Steiner sind verbunden: Korrespondenz, Kovariante, Kurve, Ellipse, Fläche, Gegenpunkte, geometrische Konstruktionen, Gerade, Gruppe, Hypocykloide, Kernfläche, Pentaeder, Polygon, Punkt, Punktepaar, Römerfläche, Sechseck, Verwandtschaft.

Nach Euler, Gauss und Steiner werden am häufigsten genannt: Lamé, Plücker, Jacobi, Abel, Descartes, Newton, Cauchy, Dirichlet, Hesse, Lagrange, Laplace, Legendre, Brocard. Von andern

häufiger vorkommenden Mathematikern nennen wir: Kepler, Pascal, Desargues, Maclaurin, Bernoulli, Cayley, Chasles, Feuerbach, Kummer, Poncelet, Bessel, Fourier, Galois, Pfaff, Sturm, Hamilton, Hermite, Riemann.

Mit Doppelnamen sind bezeichnet folgende Kunstausdrücke: Cayley-Aronholdsche Determinante, Cayley-Hermitesche Kurve, Jacobi-Hamiltonsche Integrationsmethode, Euler-Maclaurinsche Summenformel, Riemann-Rochscher Satz, Poisson-Jacobischer Satz, Mariotte-Gay-Lussacsches Gesetz, Fourier-Besselsche Funktion, Quetelet-Dandelinscher Satz, Bobilier-Chaslesscher Satz, Budan-Fourierscher Satz.

Wir dürfen hier nicht die aus Eigennamen gebildeten zusammengesetzten Adjektive zu erwähnen vergessen, wie nichteuklidisch, pseudobernoullisch, thetafuchsisch, zetafuchsisch, thetakleinisch, hyperjacobisch, hyperfuchsisch. Geradezu sprachliche Monstra sind die von den Franzosen gebildeten Adjektive: ortholambertienne (vorn griechisch, in der Mitte ein deutscher Eigenname, hinten französische Endnng) und orthoflamstédienne.

Wir sagten oben, die Personalbenennungen seien nach den wirklichen oder vermeintlichen Entdeckern des betreffenden Gebildes oder Satzes gewählt. Es ist bekannt, dafs mit mehreren dieser Bezeichnungen die historische Gerechtigkeit nicht immer gewahrt ist. Es ist nicht unsere Aufgabe, alle diese Ausdrücke kritisch-historisch zu betrachten. Wir begnügen uns damit, einige historische Daten einzuführen, die mehrere Personalbezeichnungen als ungerechtfertigt erscheinen lassen könnten. Die Gaussschen Gleichungen der sphärischen Trigonometrie sind schon vorher von Mollweide und Delambre aufgestellt. Gausssche Logarithmen nennt man die Additions- und Subtraktionslogarithmen, die von Leonelli 1802, also zehn Jahre vor Gauss, gefunden wurden. Eulers Satz über die Polyeder findet sich schon bei Descartes. Guldins Regel über den Schwerpunkt der Rotationskörper (1652) ist schon von Pappus (gegen 300) angegeben. Ivorys Satz über die Entfernung konfokaler Flächen war schon Sturm (1670) bekannt. Hadamards Satz über Konvergenz (1892) wird besser nach Cauchy benannt, der ihn 1821 aufstellte. Besonders viele solcher Personalbenennungen, die anfechtbar sind, schuf die neuere elementare Dreiecksgeometrie der Franzosen. In dieser Hinsicht klagte schon Schlömilch über den Brocard-Enthusiasmus. Brocardsche Punkte gehören Crelle (*Über einige Eigenschaften des ebenen geradlinigten Dreiecks*, 1816). Der Lemoinesche Punkt wird von Crelle in derselben Arbeit behandelt. Derselbe wird von anderen Grebescher Punkt oder auch Symmedianpunkt genannt; er soll übrigens

schon 1803 gefunden sein. Die Simson-Linie ist nicht von Robert Simson, sondern von Wallace (1798) entdeckt. Stewarts Satz dagegen über die Seitentransversalen im Dreieck (1746) wurde früher (1741) von Rob. Simson gefunden.

Um die Willkür, mit der die Dreiecksgeometrie ihre Personalbenennungen schuf, zu kennzeichnen, erzählt Herr C. A. Laisant[1]) folgende Geschichte. Ein Mathematiker trifft wiederholt in geometrischen Abhandlungen die Bezeichnung „N.scher Punkt“. Da er die Definition nirgends findet, glaubt er nichts Besseres thun zu können, als sich direkt an Herrn N., einen hervorragenden Mathematiker, zu wenden. Herr N. sieht sich darauf genötigt, folgendes zu antworten: „Ich habe mich früher mit den Eigenschaften des Dreiecks beschäftigt und auch gehört, dafs einige Schriftsteller einem merkwürdigen Punkte meinen Namen gegeben haben, bin aber leider aufser Stande Ihnen anzugeben, welches mein Punkt ist.“

§ 3. Veraltete Kunstausdrücke. Verdeutschungen.

Wie in jeder exakten Wissenschaft, so giebt es auch in der Mathematik eine grofse Zahl von Kunstausdrücken, die veraltet sind, d. h. jetzt nicht mehr gebraucht werden. Wenn man irgend ein Problem von einem neuen Gesichtspunkte aus betrachtet, so verdrängen neue Kunstausdrücke die alten. Bisweilen werden auch die Namen beibehalten, bekommen aber durch die neue Auffassung der Sache eine andere Bedeutung.

Die verschiedenen Benennungen der Zahlen, je nach ihrer Zusammensetzung, wie: gerad-gerade Zahl, ungerad-gerade Zahl, ungerad-ungerade Zahl, gleich-gleiche Zahl, gleich-gleich-gleiche Zahl, gleich-gleich-mangelhafte Zahl, gleich-gleich-überflüssige Zahl und andere, die zum teil von den Pythagoräern stammen, sind nicht mehr gebräuchlich, da sie für die Zahlentheorie wertlos sind. Ebenso haben die Bezeichnungen barlongische Zahl, längliche Zahl, parallelogrammische Zahl, parallelopipedische Zahl, Pronikzahl, Brettzahl, Fingerzahl, Kugelzahl, Keilzahl, Cirkulzahl, Linien- Flächen-, Körper-, Flächenkörperzahl ihre Bedeutung verloren. Euklid gab den verschiedenen Arten der Irrationalzahlen besondere Namen; er unterschied die 1., 2., 3., 4., 5. und 6. Apotome; und bei Ozanam und Chr. Wolff findet man noch die Bezeichnungen 1., 2., 3., 4., 5. und 6. Binom. Die Cossisten gaben jeder Dignität oder Potenz der Unbekannten einen besonderen Namen: Radix, Census, Kubus, Zensizensus, Surdesolidum u. s. w. Wir erinnern ferner an die verschiedenen Namen der figurierten Zahlen, besonders der Polygonalzahlen, die von Euklid, Nikomachus, Theon von Smyrna, Hypsikles u. a. stammen.

1) C. A. Laisant, *Les questions de terminologie*; L'enseignement mathématique 1, 1899, 22—28.

Eines der ältesten Beispiele dafür, dafs bei anderer Auffassung des Gegenstandes sich andere Bezeichnungen ergeben, bilden die Namen der Kegelschnitte. Während ihr Erfinder MENÄCHMUS sie als Schnitt des rechtwinkligen, des spitzwinkligen, des stumpfwinkligen Kegels bezeichnet hatte, gab ihnen APOLLONIUS, nachdem er gezeigt, dafs sie alle drei aus einem und demselben Kegel entstehen können, die Namen Ellipse, Hyperbel, Parabel. Die aus dem Altertum stammende Bezeichnung der geometrischen Örter als ebene, körperliche, lineare, mechanische ist jetzt unhaltbar. Winkel als geradlinige, krummlinige, gemischtlinige, hornförmige, Berührungswinkel zu bezeichnen, ist nicht mehr zu rechtfertigen.

Überflüssig werden oft Namen für einfache Operationen und Methoden, wenn diese durch neue, sachgemäfsere ersetzt werden. In dieser Beziehung erinnern wir an die VIETAschen Ausdrücke für Operationen mit Gleichungen: Antithesis, Exegetice, Rhetice etc. etc. Die vielfachen Regeln der praktischen Rechenkunst, die sich bei WIDMANN, APIAN u. a. fanden und ihre Namen ganz speziellen Aufgaben zu verdanken hatten, werden jetzt nicht mehr von einander unterschieden. Ebenso überflüssig sind die Namen der verschiedenen Verhältnisse geworden. Da hatte man ähnliche, zusammengesetzte, verwechselte, vervielfältigte, teilige, überteilige, überteilende Verhältnisse, ratio multiplex, submultiplex, superparticularis, superpartiens, mit vielen Unterarten.

Viele dieser aufser Kurs gesetzten Kunstwörter haben nur noch einen historischen Wert. Aber weil sie dem Geschichtschreiber der Mathematik von grofsem Nutzen sind, soll man sie nicht aus dem mathematischen Wortschatze ganz und gar streichen. Veraltete Ausdrücke gehören in das mathematische Wörterbuch, sagt KLÜGEL, gleichsam wie in ein Archiv.

Wir Deutsche haben, mehr als jede andere Nation, eine grofse Klasse von mathematischen Kunstwörtern, die nicht mehr gebräuchlich sind, zu verzeichnen, die *Verdeutschungen von Fremdwörtern.* Ich habe in einem früheren Aufsatze[1]) gezeigt, dafs die Versuche, fremdsprachliche mathematische Kunstwörter durch deutsche zu ersetzen, sehr alt sind. Sie reichen bis zum Jahre 1400 zurück. Auch wiederholten sich diese Versuche von Zeit zu Zeit. Allerdings waren viele dieser Schriften nicht für Gelehrte bestimmt. CHRISTOFF RUDOLFF, HOLTZMANN, DÜRER, KEPLER, SCHWENTER, JOH. CHR. STURM u. a. schrieben nicht für gelehrte Schulen, sondern, wie sie ausdrücklich hervorheben, für solche Künstler, Fachleute, Handwerker etc., die der lateinischen und griechischen Sprache

1) FELIX MÜLLER. *Zur Terminologie der ältesten mathematischen Schriften in deutscher Sprache.* Abh. zur Gesch. der Mathem. 9, 1899, 301—333.

nicht kundig sind, aber der mathematischen Kenntnisse bedürfen. Nun ist es bemerkenswert, dafs sich nur ein verschwindend kleiner Teil dieser Verdeutschungen längere Zeit hindurch im Gebrauch erhalten hat. Die meisten dieser Übersetzungen, die bisweilen recht passend waren, sind veraltet. Anstatt hier Beispiele anzuführen, verweise ich auf die oben genannte Abhandlung. Es ist in derselben die Litteratur bis in den Anfang des XVIII. Jahrhunderts benutzt.

Bei Beginn des XIX. Jahrhunderts wurde wieder einmal ein recht energischer, aber gänzlich mifsglückter Versuch gemacht, alle Fremdwörter aus der mathematischen Sprache auszumerzen. Abel Bürja veröffentlichte eine *Sprachenkunde der Gröfsenlehre oder Übersicht der ganzen Gröfsenlehre mit lauter deutschen Kunstwörtern* (Berlin 1799), mit einer *Wörtersammlung* (ib. 1802), die 143 Seiten umfafst. Es wird genügen, einige dieser Verdeutschungen anzuführen: calculus differentialis: Ansatzrechnung, calculus integralis: Erfüllungsrechnung, functio: Erzeugnis, analysis: Auflösekunst, flexio: Ansatz, potentia: Würde, cubus: dritte Würde biquadratum: vierte Würde, exponens potentiae: Würdenanzeiger, logarithmus: Anweiser, characteristica: Verweiser, quantitas rationalis: Wurzelgröfse, schlichte Gröfse, progressio: Schreitung, sinus: Stütze, coefficiens: Mitmehrer, ellipsis: Querzug, hyperbola: Überzug, parabola: Nebenzug. Sapienti sat!

In einigen Lehrbüchern der Elementarmathematik haben sich deutsche Übersetzungen lediglich in Rücksicht auf eine bestimmte Autorität, welche diese Ausdrücke in die Lehrbücher eingeführt hatte, eine Zeit lang erhalten, bis sie wieder durch das Fremdwort ersetzt wurden. In dieser Beziehung sei an die Crellesche Übersetzung von Legendres *Eléments de géométrie* (1827) erinnert. Jetzt steht auch in den Lehrbüchern der Elementarmathematik Dimension für Abmessung, Exzefs für Überschufs, Addition für Vermehrung, Subtraktion für Verminderung, Multiplikation für Vervielfältigung, Division für Teilung, u. s. w.

Leider hat in allerneuester Zeit die Sprachreinigungswut auch unsere Mathematik nicht verschont. Allenfalls kann man diese Verdeutschungen für den Unterricht in der Volksschule rechtfertigen; in den höheren Schulen richten sie nur Verwirrung an. Für die Wissenschaft ist das Bestreben, fremdsprachliche Kunstausdrücke verdeutschen zu wollen, überflüssig, wenn nicht gar schädlich. Es giebt zum Glück nur sehr wenige wissenschaftliche Werke, deren Verfasser, von der Puristenseuche befallen, prinzipiell alle Fremdwörter vermeiden. Als mehrwürdiges Beispiel führe ich an R. Grassmanns Buch: *Die Formlehre oder Mathematik* (1872). Hierin wird für Element — Stift, Addition — Fügen, Multiplikation — Weben, Kombinationslehre — Bindelehre etc. gebraucht. Bei der Schwierigkeit, sich

mit diesen neuen Terminis zurechtzufinden, darf sich der Verfasser nicht wundern, wenn seinen Schriften weniger Anerkennung zu teil wird, als sie ihrem Inhalte nach verdienen.

Wer die in dem vorigen Abschnitte angeführten Beispiele besonders mit Rücksicht auf ihre Etymologie betrachtet, der wird den *internationalen* Charakter der mathematischen Terminologie nicht wegleugnen können. Diese Terminologie durch eine rein nationale ersetzen zu wollen, wäre verkehrt und erfolglos. Wissenschaftliche Ausdrücke, die Jahrhunderte bestehen und jedem Fachmann geläufig sind, lassen sich nicht mit einem Male, auch nicht allmählich eliminieren. Sie durch gleichwertige neue zu ersetzen, ist unmöglich.

Schlufs. Über eine Reform der mathematischen Terminologie.

In den letzten Jahren ist in Journalen und Mathematiker-Versammlungen mehrfach die Notwendigkeit einer *Revision der mathematischen Nomenklatur* zur Sprache gebracht worden. Man hat derselben eine beklagenswerte Willkür und Gesetzlosigkeit zum Vorwurf gemacht. Ganz allgemein kann dieser Vorwurf wohl nicht aufrecht erhalten werden; zu seiner Begründung hat man auch immer nur spezielle Kategorieen von mathematischen Begriffen herangezogen. Vor allen Dingen wäre eine möglichst einheitliche Benennung für denselben Begriff zu erstreben. Dafs diese mehrfach zu wünschen übrig läfst, zeigen die Synonyma, die in der mathematischen Sprache sehr zahlreich sind. Nicht alle Schriftsteller begrenzen scharf die Begriffe: Affinität, Korrelation, Korrespondenz, Verwandtschaft, Projektivität, Reziprozität, Dualität, Homologie, Homographie, Kollineation, Kollinearität. Der Eine bezeichnet mit homographisch, was ein Anderer projektiv, ein Dritter kollinear verwandt nennen würde. So werden willkürlich abwechselnd gebraucht die Worte: Art, Gattung, Geschlecht, Klasse, Ordnung, Gradzahl, Defekt, Rang, Defizient. Grofses Schwanken herrscht in den Bezeichnungen: Büschel, Bündel, Gebüsch, Schar, Netz, System, Familie, Gewebe, Konnex. Die Singularitäten von Kurven und Flächen, die Knoten, Spitzen, singulären Punkte und Ebenen entbehren vielfach der einheitlichen Bezeichnung. Von den Synonymen: Chordale und Radikalachse, geradlinige Fläche und Regelfläche, Funktionaldeterminante und Jacobische Determinante, Römerfläche und Steinersche Fläche, Determinantenfläche und Hessesche Fläche, Evolvente und Involute, Cyklometrie und Cyklotechnik und vielen anderen könnte wohl mancher Ausdruck ganz überflüssig erscheinen. Besonders in jungen Disziplinen fehlt die Sicherheit und Einheitlichkeit der Bezeichnung. Wir erinnern hier an die Gruppentheorie. Was der Eine Untergruppe nennt, ist dem andern Teiler einer Gruppe; invariante Gruppe heifst bei einem Zweiten

ausgezeichnete Gruppe, bei einem Dritten Normalteiler u. s. f. Hier könnten sich vielleicht die Fachgenossen mit der Zeit über eine einheitliche Bezeichnung verständigen und dadurch eine wesentliche Vereinfachung der Nomenklatur erzielen.

Das Umgekehrte, daſs ein und dasselbe Wort mehrere ganz verschiedene Bedeutungen hat, würde ich der Sprache der Mathematik nicht zum Vorwurf machen, wie es Herr LAISANT in dem genannten Aufsatze thut. Wir haben allerdings eine groſse Zahl von Worten, die mehrdeutig sind, z. B. Modul, Charakteristik, Kongruenz, Cyklus, Rest, Körper, Höhe, Länge, Potenz, Spitze, Ecke, Dimension, Form, Element, Exponent, Grad, Index, Mittel, Moment, Pol, Polare, Resultante, Parameter, Inversion, System, Variation, Transformation, absolut, konjugiert, harmonisch, linear, adjungiert, charakteristisch u. a. Aber solche mehrdeutigen Ausdrücke finden sich in der Sprache aller Wissenschaften.

Eine genauere, strengere und einfachere Nomenklatur wäre allerdings für manche mathematische Disziplin, schon im Interesse des Unterrichtes, zu wünschen. Eine Erörterung dieser Fragen war bereits auf dem Programm für den internationalen Mathematiker-Kongreſs zu Zürich 1897 in Aussicht genommen. Gemeinsame Beschlüsse scheinen daselbst nicht gefaſst zu sein. Es ist eine Diskussion über die mathematische Terminologie auch sehr schwierig, zumal wenn das Material vorher nicht gesammelt und gesichtet ist. Um die Beratung über diese Fragen dem internationalen Mathematiker-Kongreſs zu Paris i. J. 1900 zu erleichtern, beeilte ich mich, den ersten Teil meines mathematischen Vokabulariums bis zur Eröffnung des Kongresses zu veröffentlichen und widmete diesem Pariser Kongresse die erste französisch-deutsche Hälfte meines Vokabulariums. Leider wurde während der Beratungen die Reform der mathematischen Terminologie gar nicht zur Sprache gebracht. Ich hoffe durch das inzwischen vollendete Vokabularium sowie durch den vorstehenden Aufsatz späteren etwaigen Beratungen über die mathematische Terminologie vorgearbeitet zu haben.

Herr LAISANT schlägt vor, eine internationale Kommission von Mathematikern, die auch historisch, philologisch und philosophisch gebildet sind, zu ernennen, welche die Berathungen über eine Reform der mathematischen Terminologie für den nächsten internationalen Mathematiker-Kongreſs vorbereiten soll, indem sie das einschlägige Material sammelt, dasselbe sichtet und Vorschläge zu Verbesserungen formuliert. Ferner macht Herr LAISANT den Vorschlag, ein vergleichendes *mathematisches Vokabularium* anzulegen, vielleicht in französischer, deutscher, englischer, italienischer und spanischer Sprache. Daſs solche mehrsprachlichen Verzeichnisse mathematischer Kunstwörter schon früher geplant und bereits

in Angriff genommen sind, habe ich bereits in dem Vorwort zu meinem Vokabularium (l. c. Seite VIII) erwähnt.

Daselbst spreche ich zugleich den Wunsch aus, — und damit komme ich auf den Eingang meiner Abhandlung zurück, — es möchten sich bald mehrere Fachgenossen zur Herstellung und Herausgabe eines *mathematischen Wörterbuches* vereinigen.

Über den Plan eines solchen werde ich in einem folgenden Aufsatze meine Gedanken entwickeln.

Bio-bibliographie der 1881—1900 verstorbenen Mathematiker.

Von G. Eneström in Stockholm.

Wer oft in die Lage versetzt worden ist, ausführlichere Notizen über die Lebensumstände und Schriften kürzlich verstorbener Mathematiker zu brauchen, mufs erfahren haben, wie schwer es im allgemeinen ist, solche aufzufinden. Bezüglich der Mathematiker ersten Ranges sind natürlich diese Schwierigkeiten nicht vorhanden, denn ihre Todesjahre können leicht ermittelt werden und mit Zuhilfenahme der Fortschritte der Mathematik oder auf andere Weise wird man dann ohne grofse Mühe die erwünschten Notizen sich verschaffen können. In übrigen Fällen kann man den 3. Band von Poggendorffs *Biographisch-litterarischem Handwörterbuch* zu Rate ziehen, aber teils umfafst dieser Band nur die Zeit bis 1883 inkl., teils sind die rein biographischen Notizen dort sehr kurz, theils endlich fehlen ganz und gar viele jüngere Mathematiker, die in den letzten Jahren verstorben sind.

Da nunmehr auch unter den Mathematikern, die sich nicht mit eigentlichen historischen Untersuchungen beschäftigen, das Interesse für biographische Darstellung mehr und mehr rege geworden ist, wäre es ohne Zweifel nützlich, wenn man eine Arbeit zur Verfügung hätte, wo man Aufschlüsse über vorhandene Nekrologe verstorbener Fachgenossen finden könnte, und um eine solche Arbeit anzuregen, habe ich mir vorgenommen, ein Verzeichnis von Nachrufen auf Mathematiker, die während der Jahre 1881—1900 verstorben sind, zusammenzustellen. Ich habe mich dabei auf solche Verfasser beschränkt, die wenigstens zum Teil auf dem Gebiete der reinen Mathematik thätig gewesen sind oder mathematisch-historische Schriften verfafst haben, und die Nekrologe notiert, die ich entweder selbst gesehen oder in anderen Schriften zitiert gefunden habe; ich habe dabei, soweit möglich, immer das Geburts- und Todesjahr hinzugefügt, sowie vorhandene Porträts und Schriftverzeichnisse besonders hervorgehoben. Da das Verzeichnis nur beabsichtigt, eine ausführlichere Arbeit anzuregen, macht es keinen Anspruch auf Vollständigkeit, und inbetreff solcher Gelehrten, die nur beiläufig rein mathematische Gegenstände behandelt haben, z. B. H. von Helmholtz, habe ich nicht einmal

alle mir bekannten Nekrologe verzeichnet. Die Zahl der hier genannten Mathematiker beträgt etwa 260[1]), aber noch beinahe 50 während der Jahre 1881—1900 verstorbene Fachgenossen habe ich notiert, für welche ich in den mir zugänglichen Schriften keine Nachrufe auffand.

Abdank-Abakanowitz, Bruno (1852—1900).
Wiadomości matem. **5**, 1901, 137—138. (S. D.)

Adams, John Couch (1819—1892).
Edinburgh, Royal soc., Proceedings **20**, 1895, I—V. (Copeland.) — Nature **44**, 1891, 565; **45**, 1892, 301—302, 401—402. — The observatory **15**, 1892, 173—189 [mit Porträt]. (Glaisher.) — Adams, *Scientific papers*, Bd. I (1896), XV—XLVIII. (Glaisher.) — FdM[2]) **23** (1891), 28. (Gbs.)

Airy, George Biddell (1801—1892).
Boston, Americ. acad., Proceedings **19**$_2$, 1892, 446—448. (A. Searle.) — *Edinburgh*, Royal soc., Proceedings **19**, 1892, III—VIII. (Copeland.) — *Paris*, Acad. d. sc., Comptes rendus **114**, 1892, 91—93 (Faye); **115**, 1892, 1117—1118 (d'Abbadie). — Ann. der Physik **45**, 1892, 601—604. (E. Budde.) — Nature **45**, 1892, 232—233. — Naturwiss. Rundschau **7**, 1892, 114—115. (A. B.) — Popular science monthly **3**, 1893, 101—104. — The observatory **15**, 1892, 73—94 [mit Porträt]. (E. Dunkin.) — FdM **24** (1892), 27. (Lp.)
Autobiography. Edited by W. Airy. London 1896. 8°, 12 + 414 S. + Porträt.

Albeggiani, Giuseppe (1820?—1892).
Palermo, Circolo matem., Rendiconti **7**, 1893, 39—47. (M. Gebbia.) — *Palermo*, Collegio degli ingegn., Atti **16**, 1893, 61—71.

Ameseder, Adolf (1858—1891).
Monatsh. für Mathem. **2**, 1891, 479. — FdM **23** (1891), 31. (Lp.)

Aronhold, Siegfried Heinrich (1819—1884).
E. Lampe, *Die reine Mathematik in den Jahren 1884—1899* (Berlin 1899), S. 33—48 [mit Porträt].

Azzarelli, Mattia (1811—1897).
Roma, Accad. d. N. Lincei, Atti **51**, 1898, 49—55 [mit Schriftverzeichnis]. (M. S. de Rossi.) — FdM **29** (1898), 18—19. (M.)

Baehr, George Frederik Willem (1822—1898).
Amsterdam, Akad. van Wetensch., Verslagen **7**, 1898, 131—132. (H. G. van de Sande Bakhuyzen.)

Baltzer, Richard (1818—1887).
Neue Jahrbücher für Philol. **138**, 1888, 676—678. (A. Thaer.) — Zeitschr. für mathem. Unterr. **19**, 1888, 394—396; **20**, 1889, 312—314. (A. Thaer.)

Baraniecki, Marian Alexander (1848—1895).
Wszechswiat **14**, 1895, 145—149. (S. Dickstein.)

Bardey, Ernst (1828—1897).
Zeitschr. für mathem. Unterr. **28**, 1897, 310, 392—395 (G. Bardey); **29**, 1898, 241—259, 321—323 (J. C. V. Hoffmann). — FdM **28** (1897), 26; **29** (1898), 12 (Lp.).

---

1) Von diesen fehlen in Poggendorffs *Biographisch-litterarischem Handwörterbuch* 78, unter den übrigen sind daselbst nur 99 als verstorben angegeben.
2) FdM = Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.

Battaglini, Giuseppe (1826—1894).

Napoli, Accad. d. sc., Rendiconto 8_2, 1894, 49—54. (L. Pinto.) — *Palermo*, Circolo matem., Rendiconti 8, 1894, 180—186. (G. Torelli.) — *Roma*, Accad. d. Lincei, Memorie 1_4, 1895, 558—610. (E. d'Ovidio; mit Schriftverzeichnis von G. Torelli.) — *Torino*, Accad. d. sc., Atti **29**, 1894, 678—679. (E. d'Ovidio.) — *Venezia*, Istituto Veneto, Atti 5_7, 1894, 1419—1420. (P. Fambri.) — El progreso matem. **4**, 1894, 195—196. (Z. G. de Galdeano.) — Giorn. di matem. 1_2, 1894, 205—208. (A. Capelli.) — Rivista di matem. **4**, 1894, 91—96. (E. Pascal.) — Unione universale **1**, 1894, 259—261. (F. V.) — FdM **25** (1893/94), 44 (Tn.); **26** (1895), 29—30 (La.).

Baur, Carl Wilhelm von (1820—1894).

Korrespondenzbl. für das Realschulw. Württembergs **1**, 1894, 485—498. (C. Cranz.) — Zeitschr. für mathem. Unterr. **25**, 1894, 388—392. — Zeitschr. für Vermessungswesen **23**, 1894, 423—427. (Schl.) — FdM **25** (1893/94), 44. (Lp.)

Beltrami, Eugenio (1835—1900).

Bologna, Accad. d. sc. dell' istituto, Rendiconto 4_2, 1900, 91—99. (S. Pincherle.) — *Kazan*, Fiz.-matem. obchtch., Isvjestia 10_2, 1900, 32—35 (russische Übersetzung [von I. Aristoff] des Nekrologes von M. Lévy.) — *London*, Mathem. soc., Proceedings **32**, 1900, 436—439. (G. H. Bryan.) — *Milano*, Istituto Lombardo, Rendiconti **33**, 1900, 241—245 (G. Celoria, C. Somigliana); Discorso nell' adunanza solenne del 10 gennajo 1901, 52 S. (E. Pascal). — *München*, Akad. d. Wissensch., Sitzungsber. **30**, 1900, 345—348. (C. Voit.) — *Napoli*, Accad. d. sc., Rendiconto 6_3, 1900, 74—80 [mit Schriftverzeichnis]. (L. Pinto.) — *Paris*, Acad. d. sc., Comptes rendus **130**, 1900, 677—681; **131**, 1900, 1037—1038. (M. Lévy.) — *Palermo*, Circolo matem., Rendiconti **14**, 1900, 275—289. (Abdruck des Nekrologes von L. Cremona.) — *Roma*, Accad. dei Lincei, Rendiconto 9_5 : 1, 1900, 139—141 (Cerruti); Rendiconto dell' adunanza solenne 1900, 462—477 [mit Schriftverzeichnis] (L. Cremona). — *Torino*, Accad. d. sc., Atti 1900, 541—546. (E. d'Ovidio.) — Annali di matem. 4_3, 1900, 151—160 [mit Schriftverzeichnis]. (U. Dini.) — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1900, 52—62. (Abdruck des Nekrologes von d'Ovidio mit Schriftverzeichnis von G. Loria.) — Giorn. di matem. **38**, 1900, 355—375. (Abdruck des Nekrologes von L. Cremona.) — L'enseignement mathém. **2**, 1900, 144—145; 173—179 (französische Übersetzung des Nekrologes von G. Frattini). — Il Pitagora **6**, 1900, 86—87. — Nature **61**, 1900, 568—569. (G. H. Bryan.) — Periodico di matem. 2_2, 1900, 185—190 [mit Schriftverzeichnis]. (G. Frattini.) — Supplem. al Periodico di matem. **3**, 1900, 65. — Wiadomości matem. **4**, 1900, 266—267.

Città di Cremona: Solenne commemorazione del professore Eugenio Beltrami. Cremona 1900. 8°, 31 S. [mit Porträt]. (Rede von F. Porro, S. 7—31.)

Bertrand, Joseph (1822—1900).

Paris, Acad. d. sc., Comptes rendus **130**, 1900, 961—978. (J. Lemaitre, M. Lévy, Berthelot, G. Darboux, A. Cornu, Duclaux, G. Paris, G. Perrot.) — *Torino*, Accad. d. sc., Atti **35**, 1900, 690—691. —Bullet. d. sc. mathém. 24_2, 1900, 69—75. (Abdruck des Nekrologes von M. Lévy.) — Giorn. di matem. **28**, 1900, 171—176. (Übersetzung des Nekrologes von G. H. Bryan.) — Journ. d. sav. 1900, 257—259. 312—315. — Nature **61**, 1900, 614—616 [mit Porträt]. (G. H. Bryan.) — Naturwiss. Rundschau **15**, 1900, 320—323. (E. Lampe.) — Periodico di matem. 2_2, 1900, 280. — Revue encycloped. Larousse **10**, 1900, 336—338 [mit Porträt]. (J. Boyer.) — Wiadomości matem. **4**, 1900, 267—268.

Betti, Enrico (1823—1892).
Napoli, Accad. d. sc., Rendiconto 6_2, 1892, 143—144. (L. Pinto.) — *Palermo*, Circolo matem., Rendiconti **6**, 1892, 245—246 (E. Beltrami); **8**, 1894, 161—165 (V. Cerruti). — *Torino*, Accad. d. sc., Atti **28**, 1892, 3—6. (G. Basso.) — *Venezia*, Istituto Veneto, Atti 4_7, 1893, 609—621. (E. Padova.) — Annali di matem. 20_2, 1892, 256. (F. Brioschi.) — El progreso matem. **3**, 1893, 30—32. (Übersetzung des Nekrologes von Beltrami.) — Rivista di matem. **2**, 1892, 151—153. (E. Pascal.) — FdM **24** (1892), 28—29. (Tn., Vi.)

Bierens de Haan, David (1822—1895).
Amsterdam, Wisk. Genootsch., Nieuw Archief 2_2, 1896, I—XXVIII [mit Schriftverzeichnis]. (J. C. Kluyver, D. J. Korteweg, P. H. Schoute.)

Bobek, Karl (1855—1899).
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. **9**: 1, 1901, 27—33 [mit Porträt und Schriftverzeichnis]. (G. Pick, W. Weiss.) — Monatsh. für Mathem. **11**, 1900, 97—101 [mit Schriftverzeichnis]. (G. Pick.)

Böklen, Otto (1821—1900).
Stuttgart, Mathem. Verein, Mitteilungen 3_2, 1901, 1—16 [mit Porträt und Schriftverzeichnis]. (E. Wölffing.) — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1901, 58.

Boncompagni, Baldassarre (1821—1894).
Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient. 7_2, 1895, 262—264. (P. Mansion.) — *Roma*, Accad. d. N. Lincei, Atti **47**, 1894, 131—134 (M. S. de Rossi); 161—186 (I. Galli). — *Venezia*, Istituto Veneto, Atti 6_7, 1895, 509—521. (A. Favaro.) — Centralbl. für Bibliotheksw. **9**, 1894, 537—544. (M. Cantor.) — Zeitschr. für Mathem. **39**, 1894; Hist. Abth. 201—203. (M. Cantor.) — FdM **25** (1893/94), 45 (M.); **26** (1895), 30—31 (M.).

Bonnet, Ossian (1819—1892).
Paris, Acad. d. sc., Comptes rendus **114**, 1892, 1509; **115**, 1892, 1115—1117 (d'Abbadie); **117**, 1893, 1014—1024 (P. Appell). — *Paris*, Bureau des long., Annuaire 1893. (Tisserand, Faye, Bouquet de la Grye, Loewy.) — FdM **24** (1892), 28—29 (Lp.); **25** (1893/94), 37 (Tn.).

Boschi, Pietro (1833—1887).
Bologna, Scuola d'applic. per gli ingegn., Programma 1887—1888. — FdM **19** (1887), 21. (Vi.)

Bouniakowskij, Victor (1804—1889).
Charkow, Matem. obchtch., Soobchtch. 2_2, 1890, 149—162. (K. A. Andrejeff.) — FdM **22** (1890), 30. (Wi.)
Liste des travaux mathématiques de Victor Bouniakowskij. St. Pétersbourg 1883.

Bouquet, Jean Claude (1819—1885).
Paris, Acad. d. sc., Comptes rendus **101**, 1885, 585—588 (J. Bertrand, Ch. Hermite, J. Tannery); **102**, 1886, 1267—1273 (G. H. Halphen). — Bullet. d. sc. mathém. **9**, 1885, 301—305. (J. Bertrand, Ch. Hermite, J. Tannery, vgl. oben.) — Fiziko-matem. naouki **2**, 1886, B: 9—11. (V. V. Bobynin.) — Journ. de mathém. élém. **9**, 1885, 258—261. (G. de Longchamps.) — La nature **13**: 2, 1885, 255. — FdM **17** (1885), 20 (Hch.); **18** (1886), 21 (Lp.).

Bourget, Justin (1822—1887).
Journ. de mathém. élém. **11**, 1887, 241. (L. Lévy.) — Vjestnik elem. matem. **4**, 1888, 39—40. (Sch.)

Brassinne, Emile (1805—1884).
Paris, Acad. d. sc., Comptes rendus **98**, 1884, 1242. (F. Tisserand.) — *Toulouse*, Acad. d. sc. Mémoires 6_8 : 2, 1884, 293 (Duméril); 7_8 : 2, 1885, 25—45 (Ch. Forestier).

Bresse, Jacques Antoine Charles (1822—1883).
Paris, Acad. d. sc., Comptes rendus **96**, 1883, 1518—1520. (Phillips.)

Brioschi, Francesco (1824—1897).
Bologna, Accad. d. sc., dell' istituto, Rendiconti 2_2, 1898, 93—94. (F. Ruffini.) — *Kazan*, Fiz.-matem. obchtch., Isvjestia 8_2, 1898, B : 4—6. (Russische Übersetzung des Nekrologes von Ch. Hermite.) — *London*, Mathem. soc., Proceedings **29**, 1899, 721—726. (L. Cremona, E. Beltrami.) — *Manchester*, Liter. soc., Memoirs **42**, 1898, XXXIX. (H L.) — *Milano*, Istituto Lombardo, Rendiconti 32_2, 1899, 108—125. (F. Aschieri.) — *München*, Akad. d. Wissensch., Sitzungsber. **28**, 1898, 449—452. (C. Voit.) — *Napoli*, Accad. d. sc., Rendiconto 4_3, 1898, 3—4. (F. Siacci.) — *Palermo*, Circolo matem., Rendiconti **14**, 1900, 262—274. (Abdruck des Nekrologes von E. Beltrami.) — *Paris*, Acad. d. sc., Comptes rendus **125**, 1897, 1139—1141. (Ch. Hermite.) — *Pavia*, Università, Annuario 1898—1899. 6 S. (E. Pascal.) — *Roma*, Accad. d. Lincei, Rendiconti 6_5 : 2, 1897, 353—355. (A. Messedaglia.) — *Venezia*, Istituto Veneto, Atti 9_7, 1898, 144—145. (G. Veronese.) — Annali di matem. 26_2, 1897, 343 (L. Cremona); 343—347 (E. Beltrami). — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1898, 62—73. (Italienische Übersetzung des Nekrologes von Ch. Hermite mit Schriftverzeichnis von G. Loria.) — Die Umschau **2**, 1898, 15. (E. Wölffing.) — Giorn. di matem. **36**, 1898, 51—54. (A. Capelli.) — Journ. für Mathem. **119**, 1898, 259. (L. Fuchs.) — Mathem. Ann. **50**, 1898, 477—491. (M. Noether.) — Mathesis 10_2, 1900, 112—113. — Nature **57**, 1898, 279. — Periodico di matem. **13**, 1898, 33—36. (E. Beltrami.) — Revue génér. d. sciences **9**, 1898, 49. — FdM. **28** (1897), 26—27; **29** (1898), 12—14. (M.)

Briot, Charles Auguste Albert (1817—1882).
Journ. de mathém. élém. **6**, 1882, 260—264. (G. de Longchamps.) — La nature **10** : 2, 1882, 286.

Brisse, Charles Michel (1843—1898).
New-York, Americ. mathem. soc., Bulletin 5_2, 1899, 211—212. — Journ. de physique 1898. — Nouv. ann. de mathém. 17_3, 1898, 533.

Broch, Ole Jacob (1818—1889).
Christiania, Videnskabsselsk., Oversigt 1889, 13—35. (C. A. Bjerknes.) — Acta Mathem. **12**, 1889. 1 S. (G. Mittag-Leffler.) — Norsk teknisk Tidsskr. **7**, 1889, 33—34. — FdM **21** (1889), 24. (Lp.)

Brockmann, F. J. (1836—1896).
Zeitschr. für mathem. Unterr. **27**, 1896, 395—397. (T.) — FdM **27** (1896), 23. (Lp.)

Brooksmith, John (1824—1888).
London, Mathem. soc., Proceedings **19**, 1888, 591—592. (R. Tucker.) — FdM **20** (1888), 23. (Lp.)

Brunel, Georges (1856—1900).
L'enseignement mathém. **3**, 1901, 237—239. (P. Barbarin.)
P. Duhem, *Georges Brunel*. Bordeaux 1900. 8°, 30 S. [mit Porträt und Schriftverzeichnis].

Bruno, Giuseppe (1828—1893).
Torino, Università, Annali 1893. 16 S. (C. Segre.) — FdM **25** (1893/94), 40—41. (M.)

Bucca, Fortunato (1874—1900).
Palermo, Circolo matem., Rendiconti **14**, 1900, 303—304. (M. de Franchis.)

Buchheim, Arthur (1859—1888).
London, Mathem. soc., Proceedings **19**, 1889, 592—594. (R. Tucker.) — Nature **38**, 1888, 515—516. (J. J. Sylvester.)

Buka, Felix (1852—1896).
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. **6**, 1898, 23—25 [mit Schriftverzeichnis]. (G. Hauck.) — FdM **30** (1899), 17. (M.)

Burg, Adam von (1797—1882).
Wien, Akad. d. Wissensch., Almanach **32**, 1882, 254—265. (J. Stefan.) — *Wien*, Akad. d. Wissensch., Sitzungsber. 1882, 118—129. (J. Stefan.) — *Wien*, Naturwissensch. Verein, Schriften **17**, 1877, I—XLVIII [mit Porträt]. (J. von Nahlik.)

Campbell, John Robert (1827?—1897).
London, Mathem. soc., Proceedings **28**, 1897, 587—588. — FdM **28** (1897), 27. (Lp.)

Caporali, Ettore (1855—1886).
Napoli, Università, Annuario 1886. (D. Padelletti.) — Giorn. di matem. **27**, 1889, 1—32. (G. Loria.) — FdM **18** (1886), 23 (La.); **21** (1889), 20 (Lp.).

Carbonnelle, Ignace (1829—1889).
Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient. **25**, 1889, I—VIII.

Casey, John (1820—1891).
London, Mathem. soc., Proceedings **22**, 1891, 477—479. — *London*, Royal soc., Proceedings **49**, 1891, XXIV—XXV. — Mathesis 1_2, 1891, 13. (P. M. et J. N.) — FdM **23** (1891), 29. (Gbs, Lp.)

Casorati, Felice (1835—1890).
Milano, Istituto Lombardo, Rendiconti 25_2, 1892, 1206—1236. (E. Bertini.) — *Palermo*, Circolo matem. Rendiconti **5**, 1891, 236—251. (Abdruck des Nekrologes von G. Loria.) — *Pavia*, Università, Annuario 1893/94. 9 S. (E. Pascal.) — *Torino*, Accad. d. sc., Atti **26**, 1890, 3—4. (E. d'Ovidio.) — Annali di matem. 18_2, 1890, 264. (F. Brioschi.) — Biblioth. Mathem. 1891, 1—12 [mit Schriftverzeichnis]. (G. Loria.) — El progreso matem. **1**, 1891, 22—24. (Z. G. de Galdeano.) — FdM **23** (1891), 24—25. (Tn., E.)
Discorsi pronunciati ai funerali di F. Casorati. Pavia 1880. 4°, 15 S.

Catalan, Eugène Charles (1814—1894).
Bruxelles, Acad. de Belgique, Annuaire **62**, 1896. 60 + 2 S. + Porträt. (P. Mansion.) — *Bruxelles*, Acad. d. sc., Bulletin 27_3, 1894, 326—327 (Mourlon); 330—332 (P. de Heen). — *Kazan*, Fiz.-matem. obchtch., Isvjestia 4_2, 1894, B: 84. (A. Vasilieff.) — *Liège*, Soc. d. sc., Mémoires 12_2, 1885, 37 + (1) p. (P. Mansion.) — El progreso matem. **4**, 1894, 58—60. (Z. G. d. G.) — Journ. de mathém. spéc. **18**, 1894, 49—53. (G. de Longchamps.) — Mathesis 4_2, 1894, 33. (P. M. et J. N.) — Revue génér. d. sciences **5**, 1894, 228. (J. Boyer.) — FdM **25** (1893/94), 45 (Mn.); **27** (1896), 19—20 (Lp.).

Caverni, Raffaello (1837—1900).
Venezia, Istituto Veneto, Atti **59**, 1900, 377—379. (A. Favaro.) — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1900, 125—126. (G. Bellacchi.)

Cayley, Arthur (1821—1895).
Kazan, Fiz.-matem. obchtch., Isvjestia 5_2, 1895, B: 29—32. (A. Vasilieff.) —

London, Mathem. soc., Proceedings **26**, 1895, 546—551. (S. Roberts.) — *London*, Royal soc., Proceedings **58**, 1895, I—XLIII [mit Porträt]. (A. R. Forsyth.) — *Manchester*, Liter. Soc., Memoirs $\mathbf{9}_4$, 1895, 235—237. — *New York*, Americ. mathem. soc. $\mathbf{1}_2$, 1895, 133—141. (Charlotte A. Scott.) — *Paris*, Acad. d. sc., Comptes rendus **120**, 1895, 233—234. (Ch. Hermite.) — *Roma*, Accad. d. Lincei, Rendiconti $\mathbf{4}_5$: 1, 1895, 177—185. (F. Brioschi.) — Bullet. d. sc. mathém. $\mathbf{19}_2$, 1895, 189—200 (Übersetzung des Nekrologes von F. Brioschi). — Journ. für Mathem. **115**, 1895, 349—350. (L. Fuchs.) — La nature **24** : 2, 1896, 174. — Mathem. Ann. **46**, 1895, 462—480. (M. Noether.) — Mathesis $\mathbf{5}_2$, 1895, 84—85. (P. M.) — Nature **51**, 1895, 323. — Naturwiss. Rundschau **12**, 1897, 359—361. (E. Lampe.) — Science $\mathbf{1}_2$, 1895, 450—451. (G. B. Halsted.) — The observatory **18**, 1895, 112—113 [mit Porträt]. (F. W. Dyson.) — Zeitschr. für mathem. Unterr. **26**, 1895, 394—395. — FdM **26** (1895), 34—36. (Tn., M., Lp.)

Challis, James (1803—1882).

London, Astron. soc., Monthly notices **43**, 1883, 160—174. (J. W. L. Glaisher.) — Astron. Nachr. **104**, 1883, 129—130. (A.) — The observatory **6**, 1883, 23. (W. H. M. C.) — FdM **15** (1883), 17. (Glr.)

Christoffel, Elwin Bruno (1829—1900).

Mathem. Ann. **54**, 1901, 329—346 [mit Schriftverzeichnis]. (C. F. Geiser, L. Maurer, W. Windelband.) — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1901, 57. — Wiadomości matem. **5**, 1901, 135—136. (S. D.)

Cockle, James (1819—1895).

London, Mathem. soc., Proceedings **26**, 1895, 551—554. — *London*, Royal soc., Proceedings **59**, 1896, XXX—XXXIX [mit Porträt]. (R. H.) — *Manchester*, Liter. soc., Memoirs $\mathbf{9}_4$, 1895, 235—237. — FdM **26** (1895), 36. (Lp.)

Cotterill, T. (1808?—1881).

London, Mathem. soc., Proceedings **12**, 1881, 217—218. (R. T.) — FdM **13** (1881), 24. (O.)

Craig, Thomas (1855—1900).

New-York, Americ. mathem. soc., Bulletin $\mathbf{6}_2$, 1900, 410—411. — L'enseignement mathém. **2**, 1900, 362.

Daug, Herman Theodor (1828—1888).

Acta Mathem. **11**, 1888. 1 S. (G. Mittag-Leffler.)

Dauge, Félix (1829—1899).

Mathésis $\mathbf{9}_2$, 1899, 177—178. (P. M. et J. N.) — FdM **30** (1899), 21. (Mn.)

Davidoff, August (1823—1885).

Moskwa, Matem. obchtch., Sbornik **13**, 1886. 1 S.; **15**, 1890, 1—56. (N. E. Sucowskij, P. A. Nekrasoff, P. M. Pokrowskij.) — Fiziko-matem. naouki **2**, 1886, B : 12—22, 39—43, 64—69. (V. V. Bobynin.) — FdM **22** (1890), 29. (Wi.)

De la Gournerie, Jules Maillard (1814—1883).

Paris, Acad. d. sc., Comptes rendus **97**, 1883, 6—9. (J. Bertrand.) — *Paris*, Acad. d. sc., Mémoires **44**, 1888, CXXXVII—CXLVIII. (J. Bertrand.) — FdM **15** (1883), 17—18. (O.)

Dienger, Josef (1818—1894).

Arch. der Mathem. $\mathbf{13}_2$, 1894. 2 S. (K. Dienger.) — Journ. für Mathem. **115**, 1895, 350. (L. Fuchs.) — FdM **25** (1893/94), 45. (M.)

Dodgson, Charles Lutwidge (1832—1898).
New-York, Americ. mathem. soc., Bulletin 5_2, 1899, 241. — Natnre 57, 1898, 279 —280. — FdM **29** (1898), 14—15. (Lp.)
S. D. Collingwood, *The life and letters of Lewis Carrol* [*C. L. Dodgson*]. London 1898. 8°.

Drobisch, Moritz Wilhelm (1802—1896).
Leipzig, Sächs. Gesellsch. d. Wissensch., Sitzungsber. (Math. Cl.) **48**, 1896, 695 —719. (M. Heinze.) — Rivista ital. di filosofia 1897. 21 S. (L. Credaro.) — Zeitschr. für mathem. Unterr. **27**, 1896, 626—631. — FdM **27** (1896), 23—24 (Lp., Tn.); **28** (1897), 21—22 (Vi.).

Du Bois-Reymond, Paul (1831—1889).
München, Akad. d. Wissensch., Sitzungsber. **20**, 1890, 415—418. (C. Voit.) — *Paris*, Acad. d. sc., Comptes rendus **108**, 1889, 887—888. (Hermite.) — Journ. für Mathem. **104**, 1889, 352—354. (L. Kronecker.) — Mathem. Ann. **35**, 1890, 457 —469. (H. Weber.) — Mathem.-naturw. Mitteil. **3**, 1890, 1—4. (O. Böklen.) — FdM **21** (1889), 23. (Lp.)

Durège, Jakob Heinrich Karl (1821—1893).
Wien, Akad. d. Wissensch., Almanach **43**, 1893, 264—265. (E. Süss.)

Ellis, Alexander John (1814—1890).
London, Mathem. soc., Proceedings **21**, 1890, 457—461 [mit Schriftverzeichnis]. — *London*, Royal soc., Proceedings **49**, 1891, I—IV. (W. P.) — FdM **22** (1890), 29. (Lp.)

Emsmann, August Hugo (1810—1889).
Zeitschr. für mathem. Unterr. **21**, 1890, 155—156. — FdM **22** (1890), 26. (Lp.)

Faà di Bruno, Francesco (1825—1888).
Torino, Università, Annuario 1888/89. (E. d'Ovidio.) — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1898, 94—98. (La.) — FdM **20** (1888), 19; **29** (1898), 10. (La.)
A. Berteu, *Vita dell' abate Francesco Faà di Bruno.* Torino 1897. 8°, 436 S.

Fink, Karl (1851—1898).
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. **7**, 1899, 33—35 [mit Schriftverzeichnis]. (L. Fleischmann.) — FdM **30** (1899), 19. (M.)

Frost, Percival (1817—1898).
London, Mathem. soc., Proceedings **29**, 1898, 726—727. (H. M. T.) — *London*, Royal soc., Proceedings **64**, 1899, VII—IX. — *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 5_2, 1898, 557. — The Americ. mathem. monthly **6**, 1899 [mit Porträt]. — FdM **29** (1898), 19. (Lp.)

Gascó, Luis Gonzaga (1844—1899).
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. **8**: 1, 1900, 26—27. — Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, 225—226. (A. Gutzmer.) — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1900, 63.

Gasparis, Annibale de (1819—1892).
Napoli, Accad. d. sc., Rendiconto 6_2, 1892, 65—66. (E. Fergola.) — *Napoli*, Accad. Pontaniana, Atti **22**, 1892, 37—82. (Mancini.) — *Torino*, Accad. d. sc., Atti **27**, 1892, 658—659. (E. d'Ovidio.) — FdM **24** (1892), 29—30. (Lp.)

Genocchi, Angelo (1817—1889).
Napoli, Accad. d. sc., Rendiconto 3_2, 1889, 79. (G. Battaglini.) — *Torino*, Accad. d. sc., Memorie 39_2, 1889, 463—495. (F. Siacci.) — *Torino*, Accad. d. sc., Atti

27, 1892, 1090—1106. (E. d'Ovidio.) — *Torino*, Università, Annuario 1889/90, 195—202. (G. Peano.) — FdM 21 (1889), 21—22. (La.)

Gerhardt, Karl Immanuel (1816—1899).
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 8: 1, 1900, 28—30 [mit Porträt]. (M. Cantor.) — Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, 205—216 [mit Porträt]. (F. Müller.) — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem., 1900, 63. — Zeitschr. für mathem. Unterr. 30, 1899, 399.

Gérono, Camille (1799—1891).
El progreso matem. 3, 1893, 28—30. (Z. G. de G.) — Nouv. ann. de mathém. 11_3, 1892, 538—542. (E. Rouché.)

Gierster, Joseph (1854—1893).
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 2, 1893, 44—45. (R. Fricke.) — FdM 25 (1893/94), 41. (Lp.)

Gilbert, Louis Philippe (1832—1892).
Bruxelles, Soc. scient., Annales 16, 1892, A: 102—110. (P. Mansion.) — *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 1_2, 1892, 620—641. (Abdruck des Nekrologes von P. Mansion.) — *Paris*, Soc. philomath., Bulletin 4_8, 1892, 138—146. (C. A. Laisant.) — Mathesis 2_2, 1892, 57. (P. M. et J. N.) — FdM 24 (1892), 30; 25 (1893/94), 37—38. (Mm.)
P. Mansion, *Notice sur les travaux scientifiques de L. Ph. Gilbert.* Paris, Gauthiers-Villars 1893. 8°, 86 p. + Porträt.

Godefroy, Abraham Nikolaas (1822—1899).
Amsterdam, Wisk. Genoots., Nieuw Archief 4_2, 1900, 353—358. (P. H. Schoute.)

Govi, Gilberto (1826—1890).
Mantova, Accad. Virgil., Atti 1889/90, 101—153. (E. N. Legnazzi.) — *Torino*, Accad. d. sc., Atti 25, 1890, 10—29. (G. Basso.) — FdM 22 (1890), 24—25. (La.)

Graindorge, Joseph (1843—1896).
Mathesis 6_2, 1896, 48. (P. M. et J. N.) — FdM 27 (1896), 24. (Mn.)

Gretschel, Heinrich (1830—1892)
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 2, 1893, 42—43. (E. Papperitz.) — FdM 25 (1893/94), 39. (Lp.)

Griess, J. (1857—1899).
L'enseignement mathém. 1, 1899, 303.

Grinwis, Cornelius Hubertus Carolus (1831—1899).
Amsterdam, Akad. van Wetensch., Verslagen 8, 1900, 326.

Grofe, Gustav von (1848—1895).
Dorpat, Naturf.-Gesellsch., Sitzungsber. 11, 1896, 186—187. (A. Kneser.)

Gronau, Johann Friedrich Wilhelm (1803—1887).
Danzig, Realgymnasium, Programm 1888, 1—10. (E. Schumann.) — Zeitschr für mathem. Unterr. 19, 1888, 72—74. (E. Schumann.)

Günther, Paul (1867—1891).
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 1, 1892, 10. — Zeitschr. für Mathem. 37, 1892; Hist. Abth. 46—49. (A. Gutzmer.)

Gyldén, Hugo (1841—1896).
Helsingfors, Soc. sc. fenn., Acta 23, 1897. 29 S. [mit Porträt]. (A. Donner.) — *Kazan*, Fiz.-matem. obchtch., Isvjestia 7_2, 1897, B: 58—59. (D. J. Dourbiago.) —

Leipzig, Astron. Gesellsch., Vierteljahrsschr. **32**, 1897, 8—32 [mit Porträt]. (O. Backlund, mit Schriftverzeichnis von V. Carlheim-Gyllensköld). — *München*, Akad. d. Wissensch., Sitzungsber. **27**, 1897, 409—413. (C. Voit.) — *Paris*, Acad. d. sc., Comptes rendus **123**, 1896, 771—772. (O. Callandreau.) — Acta Mathem. **20**, 1897, 397—404. (K. Bohlin.) — Bullet. astron. **14**, 1897, 289—293 [mit Porträt]. (O. Callandreau, mit Schriftverzeichnis von V. Carlheim-Gyllensköld.) — Nature **55**, 1897, 198. — Wiadomości matem. **1**, 1897, 31—32 [mit Porträt]. (M. Ernst.) — FdM **27** (1896), 24 (M.); **28** (1897), 22—24 (Lp., M., Tn.).

Halphen, Georges Henri (1844—1889).

Palermo, Circolo matem. **3**, 1888, 210—222 [mit Schriftverzeichnis]. (G. B. G.) — *Paris*, Acad. d. sc., Comptes rendus **108**, 1889, 1079—1081; **109**, 1889, 994—996 (Ch. Hermite); **110**, 1890, 489—497 (E. Picard). — *Paris*, Ecole polytechn., Journal **60**, 1890, 137—161. (H. Poincaré.) — *Roma*, Accad. d. Lincei, Rendiconti 5_4: 1, 1889, 815—823. (F. Brioschi.) — Bullet. d. sc. mathém. 14_2, 1889, 62—72. (Übersetzung des Nekrologes von F. Brioschi.) — Journ. de mathém. 5_4, 1889, 343—359. (C. Jordan.) — La nature **17**: 2, 1889, 14. — FdM **21** (1889), 24. (Lp.)

Harnack, Carl Gustav Axel (1851—1888).

Dresden, Gesellsch. Isis, Abhandl. 1888, 3—8. (K. Rohn.) — Mathem. Ann. **32**, 1888, 161—174. (A. Voss.) — Zeitschr. für Mathem. **33**, 1888; Hist. Abth. 121 —124. (M. Noether.) — FdM **20** (1888), 21. (Tn.)

Heilermann, Hermann (1820—1899).

Zeitschr. für Mathem. **45**, 1900; Hist. Abth. 57. (J. Diekmann.)

Heine, Heinrich Eduard (1821—1881).

München, Akad. d. Wissensch., Sitzungsber. **12**, 1882, 263. (Kobell.)

Helmholtz, Hermann von (1821—1894).

Berlin, Akad. d. Wissensch., Abhandl. 1896. 50 S. (E. du Bois-Reymond.) — *Berlin*, Akad. d. Wissensch., Sitzungsber. 1892, 905—909. — *Charkoff*, Mathem. obchtch., Soobchtch. 5_2, 1896, 16—59. (A. P. Grusintzeff.) — *Königsberg*, Physik.-ökonom. Gesellsch., Abhandl. **35**, 1894, 63—84. (L. Hermann, P. Volkmann.) — *London*, Royal soc., Proceedings **59**, 1896, XVII—XXX. (A. W. R.) — *Manchester*, Liter. soc., Memoirs 9_4, 1895, 230—232. — *München*, Akad. d. Wissensch., Sitzungsber. **25**, 1895, 185—196. (C. Voit.) — *Washington*, Smithson. Instit., Annual report 1895 (Washington 1896), 787—793. (T. C. Mendenhall.) — *Washington*, Smithson. Instit., Report 1894 (Washington 1896), 709—718. (A. W. Rücker.) — Ann. der Physik **54**, 1895. 24 S. (G. Wiedemann.) — Journ. für Mathem. **114**, 1895, 353. (L. Fuchs.) — Nature **50**, 1894, 479—480; **51**, 1895, 472—474, 493—495. (A. W. Rücker.) — Revue génér. d. sciences **5**, 1894, 771—772. (L. Poincaré.) — Revue scient. 8_4, 1897, 321—328, 360—367. (Übersetzung des Nekrologes von E. du Bois-Reymond.) — Zeitschr. für physik. Unterr. 8, 1895, 160—162. (F. Poske.) — FdM **25** (1893/94), 46. (Lp.)

Henoch, Max (1841—1890).

FdM **20** (1888). 6 S. (E. Lampe.)

Hirst, Thomas Archer (1830—1892).

London, Royal soc., Proceedings **52**, 1893, XII—XVIII. — Nature **45**, 1892, 399 — 400. — FdM **25** (1893/94), 39. (Gz.)

Holmgren, Hjalmar (1822—1885).

Acta Mathem. **7**, 1886. 1 S. (G. Mittag-Leffler.)

Hopkinson, John (1849—1898).
London, Mathem. soc., Proceedings **29**, 1899, 727—731. (R. T. Glazebrook.) — *London*, Royal soc., Proceedings **64**, 1899, XVII—XXIV. (J. A. E.) — Nature **58**, 1898, 419—420. — FdM **29** (1898), 19. (Lp.)

Hoppe, Reinhold (1816—1900).
Berlin, Deutsche Physik. Gesellsch., Verhandl. **2**, 1900, 183—201. (E. Lampe.) — Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. **9**:1, 1901, 33—58 [Abdruck des Nekrologes von E. Lampe mit hinzugefügtem Porträt nnd Schriftverzeichnis]. — Arch. der Mathem. 1_3, 1901, 4—19 [mit Porträt]. (Abdruck des Nekrologes von E. Lampe.) — Bollett. di bibliogr. d. sc. mathem. 1900, 126—127. — Wiadomości matem. **5**, 1901, 136—137.

Hornstein, Karl (1824—1882).
Wien, Akad. d. Wissensch., Almanach **33**, 1883, 203—210. (J. Stefan.) — *Wien*, Akad. d. Wissensch., Sitzungsber. 1883, 65—72. (J. Stefan.) — Astron. Nachr **104**, 1883, 207. (E. Weiss.)

Horta, Francisco da Ponte (1818—1899).
Jornal de sc. mathem. **14**, 1900, 3—9. (G. Teixeira.) — FdM **30** (1899), 25. (Tx.)

Hoüel, Guillaume Jules (1823—1886).
Bordeaux, Soc. d. sc., Mémoires 4_3, 1887, 1—78 [mit Porträt]. (G. Brunel.) — *Christiania*, Videnskabsselsk., Oversigt 1886, 17—21. (C. A. Bjerknes.) — *Leipzig*, Astron. Gesellsch., Vierteljahrsschr. **21**, 1886, 153—154. — Bullet. astron. **4**, 1887, 19. — Bullet. d. sc. mathém. 10_2, 1886, 145. (G. D.) — FdM **20** (1888), 18—19. (Lp.)

Houzeau, Jean Charles (1820—1888).
Bruxelles, Acad. de Belgique, Annuaire **56**, 1890, 207—310 [mit Porträt]. (J Liagre.) — *Bruxelles*, Acad. de Belgique, Bulletin 16_3, 1888, 141—147. (J. Liagre.) — *Bruxelles*, Observatoire, Annnaire **57**, 1890, 236—281 [mit Porträt]. (F. F.) — Astron. Nachr. **119**, 1888, 305—308. (F. Folie.) — La nature **16**:2, 1888, 206. — FdM **20** (1888), 22; **22** (1890), 24. (Mn.)

Ide, Heinrich (1851—1887).
Zeitschr. für mathem. Unterr. **19**, 1888, 74—75. (A.)

Imschenetzkij, Wassilij (1832—1892).
Charkow, Mathem. obchtch., Soobchtch. 3_2, 1892, 291—295. (K. A. Andrejeff.) — *Kasan*, Fiz.-matem. obchtch. Isvjestia 2_2, 1882, B:15—18 (Th. M. Suworoff); 3_2, 1893, 37—44 (J. A. Isnoskoff). — *Moskwa*, Mathem. obchtch., Sbornik 18, 1896, 347—467. (K. A. Andrejeff, P. A. Nekrasoff, N. E. Shukowskij.) — FdM **27** (1896), 19. (Wi.)

P. C. Porjetzkij, *Novaja naouka i akademik Imschenetzkij*. Kowno 1897. 8°, 19 p.

Janni, Vincenzo (1819—1891).
Napoli, Accad. Pontaniana, Atti **22**:2, 1892, 83—91. (B. de Benedictis.)

Jeffery, Henry Martyn (1826—1891).
London, Mathem. soc., Proceedings **22**, 1891, 479—481.

Jellett, John Hewitt (1817—1888).
Nature **38**, 1888, 396—397. — FdM **20** (1888), 21. (Lp.)

Jordan, Wilhelm (1842—1899).
Astron. Nachr. **149**, 1899, 319—320. (C. Runge.) — Zeitschr. für Vermessungswesen **28**, 1899, 265 (L. Winckel, C. Steppes, A. Hüser), 322—328 [mit Porträt] (Helmert).

Kirkman, Thomas Penyngton (1806—1895).
Manchester, Liter. soc., Memoirs 9_4, 1895, 238—243 [mit Schriftverzeichnis]. (W. W. K.)

Kleiber, Josiff (?—1892).
Vjestnik elem. matem. **12**, 1892, 134—136. (E. K. Schpatschinskij.)

Klein, Benno (1846—1891).
Deutsche Mathem.-Verein, Jahresber. **1**, 1892, 9.

Koehler, J. (?—1889).
Journ. de mathém. spéc. 3_3, 1889, 68—70. (L. Lévy.) — FdM **21** (1889), 23—24. (Lp.)

Kovalevski, Sonja (1850—1891).
Christiania, Videnskabsselsk., Oversigt 1891, 7—20. (C. A. Bjerknes.) — *Moskwa*, Matem. obchtch., Sbornik **16**, 1891, 1—38. (A. Stoljetoff, N. Shukowskij, P. Nekrasoff.) — *Palermo*, Circolo matem., Rendiconti **5**, 1891, 121—128. (E. de Kerbetz.) — Acta Mathem. **16**, 1893, 385—392 [mit Porträt]. (G. Mittag-Leffler.) — Annali di matem. 19_2, 1891, 201—211. (A. Ch. Leffler.) — Bullet. d. sc. mathém. 15_2, 1891, 212—220. (Abdruck des Nekrologes von E. de Kerbetz.) — El progreso matem. **1**, 1891, 88—90. (Z. G. de Galdeano.) — Journ. für Mathem. **108**, 1891, 88. (L. Kronecker.) — Nature **43**, 1891, 375—376. (P. K.) — Revue catholique des revues **5**, 1897, 18—29. (J. Boyer.) — Rivista di matem. **1**, 1891, 21—22. (E. Novarese.) — FdM **23** (1891), 26—27. (Tn., Wi., Bdn.)

Kraus, Ludwig (1857—1886).
Časopis pro pěstov. matem. **15**, 1886, 49—52 [mit Porträt]. (Ed. Weyr.) — FdM **18** (1886), 22. (Std.)

Kronecker, Leopold (1823—1891).
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. **2**, 1893, 5—31. (Abdruck des Nekrologes von H. Weber.) — *Berlin*, Akad. d. Wissensch., Abhandl. 1893. 22 S. (G. Frobenius.) — *New York*, Mathem. soc., Bulletin **1**, 1892, 173—184. (H. B. Fine.) — *Paris*, Acad. d. sc., Comptes rendus **114**, 1892, 19—21. (Ch. Hermite.) — *Tokyo*, Sugaku butsurigaku kwai, Kiji **5**, 1892 [mit Porträt]. 1 S. — Ann. der Physik **45**, 1892, 595—601. (Abdruck des Nekrologes von E. Lampe.) — El progreso matem. **2**, 1892, 60. — Leopoldina **27**, 1892, 207. — Mathem. Ann. **43**, 1893, 1—25. (H. Weber.) — Mathesis 2_2, 1892, 19, 136—137. (P. M. et J. N.) — Naturwiss. Rundschau **7**, 1892, 128—129. (E. Lampe.) — Naturwiss. Wochenschr. **8**, 1892, 591—593. — Zeitschr. für mathem. Unterr. **24**, 1893, 313; **25**, 1894, 225—233 (E. Lampe). — FdM **25** (1893/94), 33—34. (Lp.)

Kummer, Ernst Edvard (1810—1893).
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. **3**, 1894, 13—28. (Abdruck des Nekrologes von E. Lampe mit hinzugefügtem Schriftverzeichnis.) — *München*, Akad. d. Wissensch., Sitzungsber. **24**, 1894, 140—141. (C. Voit.) — *Paris*, Acad. d. sc., Comptes rendus **116**, 1893, 1163—1164. (Ch. Hermite.) — El progreso matem. **3**, 1893, 234—236. (Z. G. de Galdeano.) — Mathesis 4_2, 1894, 40—42. — Naturwiss. Rundschau **8**, 1893, 361—364. (E. Lampe.) — Zeitschr. für mathem. Unterr. **24**, 1893, 310—313. (O. N. H.) — FdM **25** (1893/94), 41—42. (Tn.)

Kunze, Ludvig (1805—1890).
Leopoldina **27**, 1891, 78—79, 94—97. (Autobiographie, ergänzt durch D. T. L.) — Zeitschr. für mathem. Unterr. **22**, 1891, 314—316. (O. Schieck.) — FdM **23** (1891), 32. (Lp.)

Lagout, Edouard (?—1884?).
Le cosmos **1**, 1885, 28—30.

Laguerre, Edmond (1834—1886).
Paris, Acad. d. sc., Comptes rendus **103**, 1886, 407, 424—425 (J. Bertrand, G. H. Halphen); **104**, 1887, 1643—1650 (H. Poincaré). — *Paris*, Ec. polytechn., Journ. **56**, 1887, 213—277. (E. Rouché.) — Nouv. ann. de mathém. 5_3, 1886, 494—496 (Abdruck des Nekrologes von J. Bertrand und G. H. Halphen); 6_3, 1887, 105—173 (Abdruck des Nekrologes von E. Rouché). — FdM **18** (1886), 23; **19** (1887), 21. (Lp.)
Notice sur les travaux scientifiques de M. Laguerre. Paris, Gauthier-Villars 1884 4°, 47 p.

Lalanne, Léon (1811—1892).
Paris, Acad. d. sc., Comptes rendus **114**, 1892, 569—570 (J. Bertrand); **115**, 1892, 1118—1119.

Letnikoff, Aleksej (1837—1888).
Moskwa, Mathem. obchtch., Sbornik **14**, 1889, I—XXXIII. (Th. Sludsky.) — FdM **21** (1889), 21. (Wi.)
N. A. Shapochnikoff, *Pamjati* [Erinnerungen]. Moskwa 1888.

Liagre, Jean Baptiste Joseph (1815—1891).
Besançon, Acad., Séance publ. 1891, XXXV—XXXVI. (Sire.) — *Bruxelles*, Acad. de Belgique, Bulletin 21_3, 1891, 84—102. (J. de Tilly, E. Bannino, Hennequin.) — *Bruxelles*, Acad. de Belgique, Annuaire **58**, 1892, 323—376 [mit Porträt]. (A. Brialmont.) — FdM **24** (1892), 33. (Mn.)

Lie, Sophus (1842—1899).
Deutsche Mathem.-Verein, Jahresber. **8**: 1, 1900, 30—46 [mit Porträt]. (F. Engel.) — *Kazan*, Fiz.-matem. obchtch., Isvjestia **9**, 1899. 32 S. [mit Schriftverzeichnis]. (D. Sintzoff.) — *Leipzig*, Sächs. Ges. d. Wissensch., Berichte (Mathem. Cl.) **51**, 1899, XI—LXI. (F. Engel.) — *London*, Mathem. soc., Proceedings **30**, 1899, 334—336. (W. Burnside.) — *Manchester*, Liter. soc., Memoirs **43**, 1899, XXXIII—XXXIV. — *München*, Akad. d. Wissensch., Sitzungsber. **30**, 1900, 339—345. (C. Voit.) — *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 5_2, 1899, 367—370. (Übersetzung des Nekrologes von G. Darboux.) — *Paris*, Acad. d. sc., Comptes rendus **128**, 1899, 525—529. (G. Darboux.) — *Roma*, Accad. d. Lincei, Rendiconti 8 : 1, 1899, 281—282, 360—366. (E. Beltrami, L. Cremona, L. Bianchi.) — *Torino*, Accad. d. sc., Atti **34**, 1899, 363—366. (C. Segre.) — Acta Mathem. **22**, 1899. 2 S. — Americ. mathem. monthly **6**, 1899, 97—99 [mit Porträt]. (G. B. Halsted.) — Arch. for Mathem. og Naturv. **21**, 1899, 1—22 [mit Porträt und Schriftverzeichnis]. (L. Sylow.) — Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, 166—204 [mit Porträt und ausführlichem Schriftverzeichnis]. (F. Engel.) — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1899, 68—75. (Abdruck des Nekrologes von C. Segre, mit Schriftverzeichnis von G. Loria.) — Die Umschau **3**, 1899, 359—362. (E. Holst, übers. von Elsbeth Schering.) — Mathem. Ann. **53**, 1900, 1—41. (M. Noether.) — Mathesis 10_2, 1900, 228—229. (P. M.) — Nature **59**, 1899, 445—446. (A. R. F.) — Naturwiss. Rundschau **14**, 1899, 216—218. (E. Lampe.) — Periodico di matem. 1_2, 1899, 268. — Skilling-Magazin (Kristiania) **57**, 1891, 781—783 [mit Porträt]. (E. Holst.) — Wiadomości matem. **3**, 1899, 85—119 [mit Porträt]. (K. Zorawski.) — Zeitschr. für mathem. Unterr. **30**, 1899, 237; **31**, 1900, 319—322 [L. als Pädagog]. (W. Ahrens.) — FdM **30** (1899), 22—24. (M.)

Lieber, Heinrich (1835—1896).
Zeitschr. für mathem. Unterr. **28**, 1897, 224—228. (F. v. Lühmann.) — FdM **28** (1897), 24. (Lp.)

Ligowski, Wilhelm (1821—1893).
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. **4**, 1897, 46. — FdM **28** (1897), 20. (M.)

Lionnet, François Joseph (1805—1884).
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **18**, 1885, 424—440 [mit Schriftverzeichnis]. (A. Marre.) — Nouv. ann. de mathém. 4_3, 1885, 56. — FdM **18** (1886), 20. (Tn.)

Liouville, Joseph (1809—1882).
Boston, Americ. acad., Proceedings 10_2, 1883, 460. — *Edinburgh*, Royal soc., Proceedings **14**, 1887, 83. (Chrystal.) — *Paris*, Acad. d. sc., Comptes rendus **95**, 1882, 468—471. (Faye, Laboulaye.) — *Paris*, Bureau des long., Annuaire 1883, 821. (Faye.) — *Toulouse*, Acad. d. sc., Mémoires 5_8 : 2, 1883, 257. (David.) — — *Wien*, Akad. d. Wissensch., Sitzungsber. 1883, 75—76. (J. Stefan.) — La nature **10** : 2, 1882, 246.

Lommel, Eugen von (1837—1899).
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. **8** : 1, 1900, 47—58 [mit Porträt und Schriftverzeichnis]. (L. Boltzmann.) — *München*, Akad. d. Wissensch., Sitzungsber. **30**, 1900, 324—339. (C. Voit.)

Loomis, Elias (1811—1889).
Washington, Smithson instit., Report 1890, 741—770. (H. A. Newton.) — FdM **23** (1891), 24. (Lp.)

Lucas, Edouard (1842—1891).
El progreso matem. **1**, 1891, 291. (Z. G. de Galdeano.) — Mathesis 1_2, 1891, 217. (P. Mansion et J. Neuberg.) — La nature **19** : 2, 1891, 302.

Lugli, Aurelio (1853—1896).
Periodico di matem. **11**, 1896, 77—80. (G. Frattini, E. Millosevich.) — FdM **27** (1896), 25. (Lp.)

Lühmann, F. von (?—1899).
Zeitschr. für mathem. Unterr. **30**, 1899, 318—319. (Grassmann.) — FdM **30** (1899), 25. (Lp.)

Luther, Eduard (1816—1887).
Astron. Nachr. **118**, 1888, 31. (I. Franz.) — Zeitschr. für mathem. Unterr. **19**, 1888, 76.

Machovec, Franz (1855—1892).
Monatsh. für Mathem. **3**, 1892, 403. (E. Czuber.)

Malinin, Aleksandr (?—1888).
Vjestnik elem. matem. **4**, 1888, 203—208. (Th. E.)

Malmsten, Karl Johan (1814—1886).
Göteborg, Vetenskapssamf., Handlingar **29**, 1891, 67—75. (J. Biörklund.) — Acta Mathem. **7**, 1886. 1 S. (G. Mittag-Leffler.) — FdM **18** (1886), 19—20. (E.)

Martins da Silva, J. A. (1858—1885).
Jornal de sc. matem. **6**, 1885, 194—196. (G. Teixeira.) — FdM **17** (1885), 19. (Tx.)

Marie, Maximilien (1819—1891).
La nature **19** : 1, 1891, 366.

Mathieu, Emile Léonard (1835—1890).
Nancy, Soc. sc., Bulletin 11_2 : 1, 1891, 1—34. (G. Floquet.) — *New York*, Mathem. soc., Bulletin 1, 1892, 156—168. (P. Duhem.) — FdM 24 (1892), 33—34. (Lp.)

Maximowitsch, Wladimir (1850—1889).
Kazan, Fiz.-matem. obchtch., Isvjestia 8, 1890, 53—56. (A. Wasilieff.) — FdM 22 (1890), 30. (Wi.)

Mehler, Gustav Ferdinand (1835—1895).
Mathem. Ann. 48, 1897, 603—606. (M. Krause.) — Zeitschr. für mathem. Unterr. 27, 1896, 392—395. (M. Krause.) — FdM 27 (1896), 22. (Lp.)

Merrifield, Charles Watkins (1827—1884).
London, Mathem. soc., Proceedings 15, 1884, 281—284 [mit Schriftverzeichnis]. (R. T.)

Meyer, Arnold (1844—1896).
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 5, 1897, 18—20 [mit Schriftverzeichnis]. (Abdruck des Nekrologes von A. Lang.) — *Zürich*, Naturforsch. Gesellsch., Vierteljahrsschr. 42, 1897, 65—69. (A. Lang.)

Meyer, Friedrich (1842—1898).
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 8 : 1, 1900, 59—61 [mit Porträt und Schriftverzeichnis]. (G. Riehm.) — Zeitschr. für mathem. Unterr. 30, 1899, 476, 551—553. (G. Riehm.) — FdM 30 (1899), 19—20. (Lp.)

Minich, Serafino Raffaele (1808—1883).
Roma, Accad. d. Lincei, Transunti 7_3, 1883, 250—251, 384—390. — *Venezia*, Istituto Veneto, Atti 1_6. 1884, 1095—1173. (A. Favaro.) — FdM 16 (1884), 28—29. (M.)
F. d'Arcais, *Della vita e delle opere del prof. S. R. Minich.* Verona 1884. 8°.

Minnigerode, Bernhard (1837—1896).
Leopoldina 32, 1896, 143—144. — Zeitschr. für mathem. Unterr. 27, 1896, 631. — FdM 27 (1896), 25. (Lp.)

Mister, Jean Nicolas (1832—1898).
Mathesis 8_2, 1898, 241. (P. M. et J. N.)

Mitchell, Oscar Howard (1851—1889).
London, Mathem. soc., Proceedings 20, 1889, 426—427.

Moigno, François Napoléon Marie (1804—1884).
Venezia, Ateneo Veneto, Atti 8 : 2, 1884, 148—149. (G. de L.) — Génie civile 5, 1884, 218. — La nature 12 : 2, 1884, 126. — Le moniteur scient. 21, 1879, 127—128. (Autobiographie.) — Les mondes 1878, 608—609 (Abdruck der Autobiographie); 64, 1884, 443—456 [mit Porträt]. (H. Valette.)

Monro, Cecil James (1833—1882).
London, Mathem. soc., Proceedings 14, 1883, 323—324 [mit Schriftverzeichnis]. (R. T.)

Moret-Blanc, A. (?—1886?).
Nouv. ann. de mathém. 5_3, 1886, 160.

Nagel, Christian Heinrich von (1803—1882).
Correspondenzbl. für das Realschulw. Württembergs 1884. 18 S. (O. Krimmel.) — Mathesis 7, 1887, 114—115.

Narducci, Enrico (1832—1893).
Torino, Accad. d. sc., Atti 28, 1893, 811. (F. Siacci.)

Catalogo delle pubblicazioni di ENRICO NARDUCCI. Roma 1887. 4°, (4) + 16 S.
B. BONCOMPAGNI, *Catalogo dei lavori di* ENRICO NARDUCCI. Roma 1893. 4°, II + 18 S.

Nash, Alfred Moses (1850?—1895).
London, Mathem. soc., Proceedings **26**, 1895, 557—558. (E. B. ELLIOTT.)

Neumann, Franz Ernst (1798—1895).
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. **4**, 1897, 54—68. (A. WANGERIN.) — *Göttingen*, Gesellsch. d. Wissensch., Nachr. (Mathem. Cl.) 1895, 248—265. (W. VOIGT.) — *London*, Royal soc., Proceedings **60**, 1897, VIII—XI. (A. S.) — *München*, Akad. d. Wissensch., Sitzungsber. **26**, 1896, 338—343. (C. VOIT.) — *Paris*, Acad. d. sc., Comptes rendus **120**, 1895, 1189—1190. (J. BERTRAND.) — Centralzeitung für Optik **16**, 1895, 130. (L. A.) — Leopoldina **32**, 1897, 51—54, 63—66. (A. WANGERIN.) — Nature **52**, 1895, 176. — Naturwiss. Rundschau **10**, 1895, 374—375. (A. OVERBECK.) — FdM **26**, 1895, 37—38. (Lp., Tn.)
P. VOLKMANN, *Franz Neumann*. Leipzig, Teubner 1896. 8°, VII + 68 S. + Porträt.

Newton, Herbert Anson (1830—1896).
London, Royal soc., Proceedings **63**, 1898, I—VI. — *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin $\mathbf{3}_2$, 1896, 169—173. (A. W. PHILLIPS.) — Americ. journ. of science $\mathbf{3}_4$, 1896, 359—378. (J. W. GIBBS.) — Nature **54**, 1896, 394. (W. E. P.) — FdM **27** (1896), 25; **28** (1897), 24. (Lp.)

Novarese, Enrico (1858—1892).
Rivista di matem. **2**, 1892, 35. (G. PEANO.)

Ofterdinger, Ludvig (1810—1896).
Biblioth. Mathem. 1896, 50—52. (H. KÜNSSBERG.) — FdM **27** (1896), 26. (E.)

Ohrtmann, Karl (1839—1885).
FdM **14** (1882). 2 S. (F. MÜLLER, A. WANGERIN.)
E. LÖW, *Gedächtnisrede*. Berlin, Hayn 1885. 4°, 10 S.

Oppermann, Ludvig Henrik Ferdinand (1817—1883).
Nordisk tidsskr. for filol. $\mathbf{6}_2$, 1884, 248—251. (J. L. HEIBERG.) — Tidsskr. for Mathem. $\mathbf{1}_5$, 1884, 137—144. (J. P. GRAM.) — Nyt Tidsskr. for Mathem. **10**, 1899, A: 33—45. (H. G. ZEUTHEN.)

Padelletti, Dino (1852—1892).
Napoli, Accad. d. sc., Rendiconto $\mathbf{6}_2$, 1892, 49—50. (L. PINTO.) — *Napoli*, Accad. Pontaniana, Atti **25**, 1895. 10 S. [mit Schriftverzeichnis]. (P. DEL PEZZO.) — *Palermo*, Circolo matem., Rendiconti **6**, 1892, 68—72 [mit Schriftverzeichnis]. (G. TORELLI.) — FdM **24** (1892), 35. (Lp.)

Padova, Ernesto (1845—1896).
Roma, Accad. d. Lincei, Rendiconti $\mathbf{5}_5$: 1, 1896, 284—285. — FdM **28** (1897), 24—25. (La.)
G. RICCI, *Commemorazione letto il giorno 30 maggio 1897*. Padova 1897. 8°, 41 S.

Padula, Fortunato (1815—1881).
Napoli, Accad. d. sc., Rendiconto **20**, 1881, 181—198. (R. RUBINI.) — *Roma*, Accad. d. Lincei, Transunti $\mathbf{6}_3$, 1882, 30—31. (SELLA.) — FdM **13** (1881), 24. (O.)

Pankiewicz, Jan (1816—1899).
Wiadomości matem. **3**, 1899, 302.

Paolis, Riccardo de (1854—1892).
Palermo, Circolo matem., Rendiconti **6**, 1892, 208—224. (C. Segre.) — FdM **24** (1892), 34—35. (Tn.)

Perigal, Henry (1801—1898).
London, Mathem. soc., Proceedings **29**, 1899, 732—735. — FdM **29** (1898), 19. (Lp.)

Peterson, Karl (1828—1881).
Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, 122—132 [mit Porträt]. (P. Stäckel.)

Petzval, Josef (1807—1891).
Wien, Akad. d. Wissensch., Almanach **42**, 1892, 182—184 [mit Porträt]. (E. Süss.) — Monatsh. für Mathem. **2**, 1891, 480. (G. von Escherich, Em. Weyr.)

Plarr, Gustave (1819—1892).
Nature **45**, 1892, 419. — FdM **24** (1892), 35. (Lp.)

Prediger, Johann Carl (1822—1895).
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. **4**, 1897, 51—52. (Fr. Meyer.) — FdM **26** (1895), 38—39. (M.)

Price, Bartholomew (1818—1898).
London, Mathem. soc., Proceedings **30**, 1899, 332—334. (E. B. Elliott.) — Nature **59**, 1899, 229—230. — FdM **30** (1899), 20. (M.)

Prowe, Leopold Friedrich (1821—1887).
Thorn, Gymnasium, Programm 1888, I—VI. (M. Curtze.) — Zeitschr. für Mathem. **33**, 1888; Hist. Abth. 89—96. (M. Curtze.)

Puchewicz, Wladyslaw (1849—1899).
Wiadomości matem. **3**, 1899, 302.

Puiseux, Victor Alexandre (1820—1883).
Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient., **15**, 1884, 5—37. (Ph. Gilbert.) — *Paris*, Acad. d. sc., Mémoires **44**, 1888, LXVII—LXXVIII. (J. Bertrand.) — Bullet. d. sc. mathém. 8_2, 1884, 227—234 (J. Bertrand); 234—245 (F. Tisserand). — Journ. de mathém. élém. 8_3, 1884, 66—71. — FdM **16** (1884), 29. (M.) Drohojowska, *Les savants modernes et leurs oeuvres. Cassini, Arago, Le Verrier, Puiseux.* Lille 1887. 8°, 192 S.

Ranyard, Arthur Cowper (1845—1894).
London, Mathem. soc., Proceedings **26**, 1895, 554—557.

Razzaboni, Cesare (1827—1899).
F. Cavani, *Elogio storico.* Bologna 1899. 4°, 126 S. [Schriftverzeichnis S. 113—121] + Porträt.

Realis, Savino (1818—1886).
Torino, Accad. d. sc., **21**, 1886, 549—551. (A. Genocchi.) — Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **19**, 1886, 55—58. (A. Genocchi.) — Giorn. di matem. **24**, 1886, 56 — Journ. de mathém. élém. 10_2, 1886, 87—91. (G. de Longchamps.) — Nouv. ann. de mathém. 5_3, 1886, 200—203. (E. Catalan.) — FdM **18** (1886), 23. (Lp.)

Rebière, Alphonse Michel (1832?—1900).
L'enseignement mathém. **2**, 1900, 144. (C. A. L.)

Resal, Henri Aimé (1828—1896).
Manchester, Liter. soc., Memoirs **41**, 1897, LIII. (H. Lamb.) — *Paris*, Acad. d. sc., Comptes rendus **123**, 1896, 435—440. (M. Lévy.) — Journ. de mathém. 2_5, 1896,

453 (C. Jordan), 455—460 (Abdruck des Nekrologes von M. Lévy). — Revue génér. d. sc. 7, 1896, 893—894. (C. Cailler.) — FdM 27 (1896), 26. (M.)

Reusch, Friedrich Eduard (1812—1891).
Stuttgart, Mathem.-Verein., Mitteil. 5, 1892, 1—18 [mit Porträt]. (O. Böklen) — FdM 24 (1892), 35. (Tn.)

Ribaucour, Albert (1845—1893).
Mathesis 3_2, 1893, 270—272. (P. M.)

Riccardi, Pietro (1828—1898).
Bologna, Scuola d'applicazione, Atti 1898—1899. 66 S. [mit Schriftverzeichnis]. (F. Cavani.) — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1899, 23—29 [mit Schriftverzeichnis]. (D. Pantanelli.) — FdM 30 (1899), 20. (Vi.)

Ritter, Ernst (1867—1895).
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 4, 1897, 52—54. (F. Klein.) — FdM 28 (1897), 21. (M.)

Roberts, Samuel Oliver (1859—1899).
London, Mathem. soc., Proceedings 31, 1900, 282—283 [mit Schriftverzeichnis]. (F. S. Macaulay.)

Rosenberger, Ferdinand (1845—1899).
Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, 217—224 [mit Porträt]. (S. Günther.) — Wiadomości matem. 4, 1900, 134. — Zeitschr. für mathem. Unterr. 31, 1900, 78—79.

Rosenhain, Georg (1816—1887).
Paris, Acad. d. sc., Comptes rendus 104, 1887, 891. (Ch. Hermite.)

Rossi, Vincenzo de (1834—1888).
Roma, Accad. d. N. Lincei, Atti 42, 1889, 83—88 [mit Schriftverzeichnis]. (G. Lais.) — FdM 22 (1890), 23. (Tn.)

Rowe, Richard Charles (?—1884).
London, Mathem. soc., Proceedings 15, 1884, 287—288 (R. T.); 16, 1885, 1—2 (Henrici).

Rubini, Rafaelle (1817—1890).
Napoli, Accad. d. sc., Rendiconto 4_2, 1890, 134—135. (G. Torelli.) — *Napoli*, Accad. Pontaniana, Atti 21, 1891, 275—281. (A. Capelli.) — FdM 22 (1890), 27 (Tn.); 23 (1891), 25—26 (La.).

Saint-Venant, Adhémar Jean Claude Barré de (1797—1886).
Paris, Acad. d. sc., Comptes rendus 102, 1886, 141—147. (E. Phillips.) — Annales des ponts et chaussées 12_6, 1886, 557—595. (J. Boussinesq et Flamant.) — Ingegn. civil. 12, 1886, 30—31. (G. Sacheri.) — FdM 18, (1886), 21—22. (Hch.)

Sang, Edward (1805—1896).
Edinburgh, Royal soc., Proceedings 21, 1897, XVII—XXXII [mit Schriftverzeichnis]. (D. B. Peebles.)

Sannia, Achille (1823—1892).
Napoli, Accad. Pontaniana, Atti 24, 1894. 6 S. (U. Masoni.) — *Napoli*, Istituto d'incoragg., Rendiconto 5, 1892, 20—23. (Fr. Milone.) — *Palermo*, Circolo matem., Rendiconti 6, 1892, 48—51. (G. Torelli.) — Bollett. degli ingegn. (Napoli) 10, 1892, 17—18 [mit Porträt]. (Pepe.) — FdM 24 (1892), 36. (Lp.)

Schapira, Hermann (1840—1898).
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 8 : 1, 1900, 61—66 [mit Porträt und Schrift-

verzeichnis]. (C. Koehler.) — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1898, 106—109. (M. Cantor.) — FdM 29 (1898), 20. (Lp.)

Scheeffer, Ludvig (1859—1885).

Biblioth. Mathem. 1885, 197—199. (G. Cantor.) — Zeitschr. für Mathem. 31, 1886; Hist. Abth. 50—55. (W. Dyck.) — FdM 17 (1885), 19—20. (E.)

Schellbach, Karl Heinrich (1805—1892).

Leopoldina 29, 1893, 49—50, 75—76, 90—92, 104—106, 125—127. (F. Müller.) — Zeitschr. für den physik. Unterr. 5, 1892, 301—303. (F. Poske.) — Zeitschr. für mathem. Unterr. 23, 1892, 315—317, 637—638. — FdM 24 (1892), 36. (Tn.) F. Müller, *Gedächtnisrede gehalten am 29. Oktober 1892*. Berlin 1893. 8°, 35 S. [mit Porträt].

Schellen, Heinrich (1818—1884).

Zeitschr. für mathem. Unterr. 15, 1884, 567—568.

Schering, Ernst Christian Julius (1833—1897).

Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 6, 1898, 25—27 [mit Schriftverzeichnis]. (F. Klein.) — *Leipzig*, Astron. Gesellsch., Vierteljahrsschr. 33, 1898, 2—5 [mit Porträt]. (W. Schur.) — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1898, 26—29. (G. L.) — Journ. für Mathem. 119, 1897, 86. (L. Fuchs.) — Nature 57, 1898, 416. (W. H. Young and Grace Chisholm Young.) — FdM 29 (1898), 16 (Lp., M.); 30 (1899), 19 (M.).

Schjellerup, Hans Carl Frederik Christian (1827—1887).

Astron. Nachr. 118, 1888, 95—96. (Thiele.) — Nature 37, 1888, 154—155. (J. L. E. Dreyer.) — FdM 20 (1888), 22. (Lp.)

Schläfli, Ludwig (1814—1895).

Bern, Naturforsch. Gesellsch., Mittheil. 1896, 120—203 [mit Porträt]. (J. H. Graf.) — *Roma*, Accad. d. Lincei, Rendiconti 4_5: 1; 1895, 310—312. (F. Brioschi.) — Journ. für Mathem. 115, 1895, 350. (L. Fuchs.) — FdM 26 (1895), 39 (M.); 27 (1896), 22—23 (Lp.).

Schober, Karl (1859—1899).

Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 8: 1, 1900, 66—68 [mit Porträt und Schriftverzeichnis]. (W. Wirtinger.)

Schols, Charles Mathieu (1849—1897).

Amsterdam, Akad. van Wetensch., Verslagen 5, 1897, 415—418. — Zeitschr. für Vermessungswesen 26, 1897, 250—253. (W. J.)

Schrentzel, Wilhelm (1861—1896).

Zeitschr. für Mathem. 42, 1897; Hist. Abth. 1—5. (L. Schlesinger.) — FdM 28 (1897), 25. (M.)

Schröter, Heinrich (1829—1892).

Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 2, 1893, 32—41. (Abdruck des ausführlicheren Nekrologes von R. Sturm.) — *Breslau*, Universität, Chronik 1891/92. 10 S. (R. Sturm.) — Journ. für Mathem. 109, 1892, 358—360. (R. Sturm.) — Zeitschr. für mathem. Unterr. 23, 1892, 230—232. (H. Vogt.) — FdM 24 (1892), 37. (Tn.)

Seidel, Ludwig (1821—1896).

Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 7, 1899, 23—33. (Auszug aus dem Nekrologe von F. Lindemann.) — FdM 30 (1899), 17—18. (M.)
F. Lindemann, *Gedächtnisrede*. München 1898. 4°, 84 S.

Seitz, Enoch B. (1846—1883).
London, Mathem. soc., Proceedings **14**, 1883, 325. (R. T.)

Serret, Joseph Alfred (1819—1885).
Paris, Acad. d. sc., Comptes rendus **100**, 1885, 673—682. (Bouley, C. Jordan, O. Bonnet, H. Faye, E. Renan.) — *Paris*, Bureau des long., Annuaire 1886, 882—889. (O. Bonnet, H. Faye.) — Bullet. d. sc. mathém. 9_2, 1885, 123—132. (Abdruck der soeben angeführten Nekrologe.) — Fiziko-matem. naonki **1**, 1885, B : 97—103. (V. V. Bobynin.) — La nature **13** : 1, 1885, 238. — FdM **17** (1885), 20. (Lp.)

Serret, Paul (1827—1898).
Paris, Acad. d. sc., Comptes rendus **127**, 1898, 37—38. (G. Darboux.) — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1898, 157. (G. Loria.) — FdM **29** (1898), 20. (M.)

Seydler, August (1849—1891).
Časopis pro pěstov. mathem. **21**, 1892, 193—217 [mit Porträt]. (V. Strouhal, F. Koláček, G. Gruss.) — FdM **24** (1892), 37. (Std.)

Shanks, William (1812—1882).
Zeitschr. für mathem. Unterr. **26**, 1895, 261—264. (J. C. V. Hoffmann.) — FdM **26** (1895), 55. (Lp.)

Sharp, William Joseph Curran (1854?—1891?).
London, Mathem. soc., Proceedings **22**, 1891, 481.

Shbikowskij, Alexandr (1829—1900).
Kazan, Fiz.-matem. obchtch., Isvjestia 10_2, 1900, B : 39—46. (N. Netchajeff.) — Wiadomości matem. **4**, 1900, 268.

Šimerka, Wenzel (1819—1887).
Časopis pro pěstov. matem. **17**, 1888, 143—144, 253—256; **19**, 1890, 273—277. (A. Pánek.) — FdM **20** (1888), 19—20. (Std.)

Sinram, Heinrich Theodor (1840—1895).
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. **5**, 1897, 17—18. (A. Gutzmer.) — FdM **28** (1897), 21. (M.)

Sluginoff, Nikolai (1854—1897).
Kazan, Fiz.-matem. obchtch., Isvjestia 7_2, 1897, B : 79—84. (N. P. Kasankin.)

Smith, Henry John Stephen (1826—1883).
Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient. **43**, 1896, 219—227. (P. Mansion.) — *Cambridge*, Philos. soc., Proceedings **4**, 1883, 319—321. (J. W. L. Glaisher.) — *London*, Astron. soc., Monthly notices **44**, 1884, 138—149. (Glaisher.) — *London*, Mathem. soc., Proceedings **14**, 1883, 322—323. (R. T.) — *Roma*, Accad. d. Lincei, Transnnti 7_3, 1883, 162—163. (L. Cremona.) — Nature **27**, 1883, 381. (W. Spottiswoode.) — The observatory **6**, 1883, 91—92.
The collected mathematical papers of H. J. S. Smith. Edited by J. W. L. Glaisher, 1 (Oxford 1894), I—XCV [mit Porträt]. (Ch. H. Pearson.)

Snell, Karl (1806—1886).
Zeitschr. für mathem. Unterr. **19**, 1888, 396—397. (J. Hahn.)

Sohncke, Leonhard (1842—1897).
München, Akad. d. Wissensch., Sitzungsber. **28**, 1898, 440—449. (C. Voit.) — Leopoldina **33**, 1897, 162. — Zeitschr. für Luftschiffahrt **16**, 1897, 249—251. (Assmann.) — FdM **28** (1897), 30 (Lp.); **29** (1898), 17 (M.).

Sousa Pinto, Rodrigo Ribeiro de (1811—1893).
Jornal de sc. mathem. **12**, 1894, 3—10. (A. J. Teixeira.) — FdM **25** (1893/94), 42. (Tx.)

Spottiswoode, William (1825—1883).
London, Mathem. soc., Proceedings **14**, 1883, 321—322 (R. T.); **31**, 1899, 283—285 [nur Schriftverzeichnis]. — *London*, Royal soc., Proceedings **38**, 1885, XXXIV—XXXIX. (A. B. K.) — *Paris*, Acad. d. sc., Comptes rendus **97**, 1883, 9—10. (Dumas.) — *Roma*, Accad. d. Lincei, Transunti 7_3, 1883, 308—309. (Cremona.) — Dublin univ. mag. 2_2, 1878, 666—678 [mit Porträt]. — Nature **27**, 1883, 597—601 — The observatory **6**, 1883, 231—232.

Stahl, Wilhelm (1846—1894).
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. **4**, 1897, 36—45. (Th. Reye und A. Brill.) — Journ. für Mathem. **114**, 1894, 45—46. (Th. Reye.) — Zeitschr. für mathem. Unterr. **25**, 1894, 393. — FdM **26** (1895), 31—32. (M.)

Staudigl, Rudolf (1838—1891).
Monatsh. für Mathem. **2**, 1891, 479. (G. von Escherich, Em. Weyr.) — FdM **23** (1891), 31. (Lp.)

Steen, Adolph (1816—1886).
Tidsskr. for Mathem. 4_5, 1886, 65—70. (H. G. Zeuthen.) — Nyt Tidsskr. for Mathem. **10**, 1899, A: 33—45. (H. G. Zeuthen.)

Stefan, Josef (1835—1893).
Wien, Akad. d. Wissensch., Almanach **43**, 1893, 252—257 [mit Porträt]. (E. Suess.)

Steichen, Michel (1804—1891).
Bruxelles, Acad. de Belgique, Bulletin 21_3, 1891, 308—311.

Stern, Moritz Abraham (1807—1894).
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. **4**, 1897, 34—36. (Résumé des Nekrologes von F. Rudio.) — *München*, Acad. d. Wissensch., Sitzungsber. **24**, 1894, 142. (C. Voit.) — *Zürich*, Naturforsch. Gesellsch., Vierteljahrsschr. **39**, 1894, 133—143 [mit Schriftverzeichnis]. (F. Rudio.) — Zeitschr. für mathem. Unterr. **26**, 1895, 392—394. (F. Rudio.) — FdM **25** (1893/94), 48. (M.)

Stieltjes, Tomas Johannes (1856—1894).
Toulouse, Fac. d. sc., Annales **9**, 1895. 64 S. (E. Cosserat.) — FdM **26** (1895), 40. (M).

Stoljetoff, Aleksandr (1839—1897).
Kazan, Fiz.-matem. obchtch., Isvjestia 7_2, 1897; B: 39—54. (D. A. Goldhammer.) — *Kiew*, Univ., Isvjestia 1896. 12 + 10 S. (P. M. Pokrowskij, N. N. Schiller.)

Storchi, Felice (1821—1890).
Modena, Accad. d. sc., Memorie 8_2, 1891. 6 S. (P. Riccardi.)

Strack, Otto (1848—1899).
Zeitschr. für mathem. Unterr. **30**, 1899, 316—318. (Treutlein.) — FdM **30** (1899), 25. (Lp.)

Strasser, Gabriel (1824—1882).
Leipzig, Astron. Gesellsch., Vierteljahrsschr. **17**, 1882, 237—238. (W.) — Astron. Nachr. **103**, 1882, 209—210. (W.)

Sylvester, James Joseph (1814—1897).
Baltimore, Johns Hopkins univ., Circulars **16**, 1897, 25—27 (P. A. Mac Mahon;

18 (1898), 29 (P. E. Matheson, E. B. Elliott). — *Edinburgh*, Royal soc., Proceedings **22**, 1898, 9—10. (Kelvin.) — *Kazan*, Fiz.-matem. obchtch., Isvjestia 7_2, 1897, B: 89—91. (A. Wasilieff.) — *London*, Mathem. soc., Proceedings **28**, 1897, 581—586. (J. J. Walker.) — *London*, Royal soc., Proceedings **63**, 1898, IX—XXV. (P. A. M.) — *Manchester*, Liter. soc., Proceedings **41**, 1897, 53—55. (H. Lamb.) — *Napoli*, Accad. d. sc., Rendiconto **36**, 1897, 165—168. (A. Capelli.) — *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 3_2, 1897, 299—309. (F. Franklin.) — Americ. journ. of mathem. **19**, 1897. 1 S. — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1897, 16. (G. L.) — Mathem. Ann. **50**, 1897, 133—156. (M. Noether.) — Mathesis 7_2, 1897, 245—246. (P. Mansion.) — Nature **39**, 1888, 217—219 [mit Porträt] (A. Cayley); **55**, 1897, 492—494 (P. A. Mac Mahon). — Naturwiss. Rundschau **12**, 1897, 361—363. (E. Lampe.) — Revue génér. d. sc. 8, 1897, 689—690. (E. Picard.) — Science (New York) **5**, 1897, 597—604. (G. B. Halsted.) — Wiadomości matem. **1**, 1897, 175—177 [mit Porträt]. (S. Dickstein.) — Zeitschr. für mathem. Unterr. **28**, 1897, 309. — FdM **28** (1897), 30—32. (Lp., Tn., M.)

Tartinville, A. (?—1896).

Revue de mathém. spéc. **6**, 1896, 369. (E. H.)

Tchebycheff, Pafnutij (1821—1894).

Bologna, Accad. d. sc. dell' istituto, Rendiconti 1894/95, 33—34. (G. Capellini.) — *Charkow*, Matem. obchtch., Soobchtch. 4_4, 1895, 263—280 [mit Schriftverzeichnis]. (A. M. Liapunoff.) — *St. Pétersbourg*, Acad. d. sc., Bulletin 2_5, 1895, 189—194 [nur Schriftverzeichnis]. — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1898, 33—45, 81—92, 113—139. (A. Wasilieff.) — Časopis pro pěstov. matem. **25**, 1896, 38—41. (Übersetzung des Nekrologes von A. Wasilieff.) — Nature **52**, 1895, 345. — Schkola matem. (St. Petersburg) **1**, 1885, 57—60 [nur Schriftverzeichnis]. (N. Senigoff.) — Science 1_2, 1895, 129—131. (G. B. Halsted.) — FdM **29** (1898), 11 (Lp.); **30** (1899), 15—16 (Si.).

A. Vasilief, *P. L. Tchébychef et son oeuvre scientifique.* Turin, Clausen 1898. 8°, 56 S. [Abdruck aus dem Bollett. di bibliogr. d. sc. matem.] + Porträt.

A. Wasilieff *und* N. Delaunay, *P. L. Tschebycheff.* Leipzig, Teubner 1900. 8°, (3) + 70 S. + Porträt.

Temperley, Ernest (1849—1889).

London, Mathem. soc., Proceedings **20**, 1889, 424—425.

Tisserand, François Félix (1845—1896).

Leipzig, Astron. Gesellsch., Vierteljahrsschr. **32**, 1897, 3—8. (O. Callandreau.) — *Paris*, Acad. d. sc., Comptes rendus **123**, 1896, 623—625. (A. Cornu.) — *Paris*, Bureau des long., Annuaire 1897, 1—18. (J. Janssen, M. Loewy, H. Poincaré.) — Bullet. astron. **13**, 1896, 417—439 [mit Porträt]. (A. Rambaud, Janssen, Loewy, Poincaré, Wolf, Bakhuyzen, Gariel, Lécrivain, A. Cornu.) — La nature **23**: 1, 1895, 337—338 [mit Porträt]. — Leopoldina **32**, 1896, 184—185. — Nature **54**, 1896, 628. (W. E. P.) — Revue génér. d. sc. **7**, 1896, 1230—1233. (H. Poincaré.) — FdM **27** (1896), 26; **28** (1897), 25—26. (Lp.)

Todhunter, Isaac (1820—1884).

London, Mathem. soc., Proceedings **15**, 1884, 284—287 [mit Schriftverzeichnis]. (R. T.) — *London*, Royal soc., Proceedings **37**, 1884, XXVII—XXXII. (E. J. R.)

Townsend, Richard (1821—1884).

London, Mathem soc., Proceedings **15**, 1884, 288—289 (R. T.); **16**, 1885, 2 (Henrici).

Trudi, Nicola (1811—1884).

Napoli, Accad. d. sc., Rendiconto **23**, 1884, 149—150. (E. Fergola.) — *Napoli*, Accad. Pontaniana, Atti **16**, 1885, 243—248. (G. Torelli.) — Giorn. di matem. **22**, 1884, 304—307. (G. Torelli.) — FdM **16** (1884), 29—30. (M.)

Turazza, Domenico (1813—1892).

Venezia, Istituto Veneto, Atti **58**, 1899, 69—78. — Il Politecnico **40**, 1892, 170—180. (E. Paladini.) — FdM **24** (1892), 38—39. (La.)

A. Favaro, *Commemorazione letta addì 27 Maggio 1892*. Padova 1892. 8°, 82 S. + Porträt.

Unverzagt, Wilhelm (1830—1885).

Zeitschr. für Mathem. **31**, 1886; Hist. Abth. 41—50. (A. Schmidt.) — FdM **18** (1886), 21. (Lp.)

Uth, Karl (1842—1890).

Zeitschr. für mathem. Unterr. **21**, 1890, 395—396. (M.) — FdM **22** (1890), 26. (Lp.)

Van den Berg, Franciscus Johannes (1833—1892).

Amsterdam, Akad. van Wetensch., Jaarboek 1897, 97—145 [mit Schriftverzeichnis]. (P. H. Schoute.) — *Amsterdam*, Wisk. Genoots., Nieuw Archief 1_2, 1894, 1—10 [mit Schriftverzeichnis]. (D. B. de H.)

Venable, Charles Scott (1817?—1900).

New York, Americ. mathem. soc., Bulletin 7_2, 1900, 47.

Vicuña, Gumersindo (1840—1890).

Biblioth. Mathem. 1891, 33—34. (G. Eneström.) — FdM **23** (1891), 25. (E.)

Walker, John James (1825—1900).

London, Mathem. soc., Proceedings **32**, 1900, 439—442. (R. T.)

Wappler, Emil (1852—1899).

Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, 225 [mit Porträt]. (G. Eneström.)

Weierstrass, Karl (1815—1897).

Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. **6**, 1898, 27—44. (Abdruck des Nekrologes von E. Lampe.) — *Berlin*, Physik. Gesellsch., Verhandl. **16**, 1897, 50—71. (E. Lampe.) — *Bologna*, Accad. d. sc., Rendiconti 1_2, 1897, 101—104. (S. Pincherle.) — *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 1897, 484—507. (M. d'Ocagne.) — *Charkoff*, Matem. obchtch., Soobchtch. 6_2, 1897, 35—56 [mit Porträt]. (M. Tichomandritzkij.) — *Göttingen*, Gesellsch. d. Wissensch., Nachr. 1897, Geschäftl. Mitteil. 60—69. (D. Hilbert.) — *Kazan*, Fiz.-matem. obchtch., Isvjestia 7_2, 1897, 85—88. (Übersetzung des Nekrologes von Ch. Hermite.) — *Kiew*, Univ., Isvjestia 1898, 63—78. (P. M. Pokrowskij.) — *München*, Akad. d. Wissensch., Sitzungsber. **27**, 1897, 402—409. (C. Voit.) — *Napoli*, Accad. d. sc., Rendiconto 3_3, 1897, 63—64. (F. Siacci.) — *Paris*, Acad. d. sc., Comptes rendus **124**, 1897, 430—433. (Ch. Hermite.) — *St. Pétersbourg*, Acad. d. sc., Bulletin 6_5, 1897, XXXV—XXXVI. (Sonine.) — *Torino*, Accad. d. sc., Atti **32**, 1897, 562—563. (E. d'Ovidio.) — Acta Mathem. **21**, 1897, 79—82 (G. Mittag-Leffler); **22**, 1898, 1—18 (H. Poincaré). — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1897, 7. (G. L.) — Die Umschau **1**, 1897, 199. (E. W.) — Journ. für Mathem. **117**, 1897, 357. — Natur und Offenbarung **43**, 1897. (W. Killing.) — Mathesis **15**, 1895, 273; **17**, 1897, 62. (P. M.) — Nature **55**, 1897, 443. (A. R. F.) — Naturwiss. Rundschau **12**, 1897, 218—220, 232—234. (Résumé des Nekrologes von E. Lampe.) — Revue génér. d. sc **8**, 1897, 173—174. (E. Picard.) — Wiadomości matem. **1**, 1897, 53—58. (S. Dick-

STEIN.) — Vjestnik elem. matem. **22**, 1897, 59—66. (I. SLECHINSKIJ, P. M. POKROWSKIJ.) — Zeitschr. für mathem. Unterr. **28**, 1897, 157—158, 228—231, 304—305. (H. SCHUBERT.) — FdM **28** (1897), 32—35 (TH., Lp., M.); **29** (1898), 17—18 (M.).

Weyer, Georg Daniel Eduard (1818—1896).

Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. **6**, 1898, 44—45. (L. POCHHAMMER.) — Leopoldina **33**, 1897, 49. — Nature **55**, 1897, 299. — FdM **28** (1897), 26 (Lp.); **30** (1899), 18 (M.).

Weyr, Emil (1848—1894).

Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. **4**, 1897, 24—33. (Abdruck des Nekrologes von G. KOHN mit hinzugefügtem Schriftverzeichnis.) — *Palermo*, Circolo matem., Rendiconti **9**, 1895, 260—262. (Übersetzung des Nekrologes von G. KOHN.) — *Wien*, Akad. d. Wissensch., Almanach **44**, 1894, 244—250 [mit Porträt]. (I. HANN.) — Časopis pro pěstov. matem. **24**, 1895, 163—224. (A. PÁNEK.) — Monatsh. für Mathem. **6**, 1895, 1—4. (G. KOHN.) — FdM **26** (1895), 32—33. (Std.)

Wiener, Christian (1826—1896).

Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. **6**, 1898, 46—69. (A. BRILL und L. SOHNCKE.) — FdM **30** (1899), 18—19. (M.)

Wiltheiss, Eduard (1855—1900).

Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. **9**: 1, 1901, 59—63 [mit Porträt und Schriftverzeichnis]. (W. WIRTINGER.)

Winckler, Anton (1821—1892).

Wien, Akad. d. Wissensch., Almanach **43**, 1893, 257—260 [mit Porträt]. (E. SÜSS.) — Monatsh. für Mathem. **3**, 1892, 403—406. (E. CZUBER.) — FdM **24** (1892), 33. (Lp.)

Wolf, Rudolf (1816—1893).

Schweizerische Naturf. Gesellsch., Verhandl. **77**, 1894, 237—249. (R. BILLWILLER.) — *Bern*, Naturforsch. Gesellsch., Mitteil. 1894, 193—231; 1895, 294—295. (J. H. GRAF.) — *Leipzig*, Astron. Gesellsch., Vierteljahrsschr. **29**, 1894, 2—15 [mit Porträt]. (A. WOLFERS.) — *Zürich*, Naturforsch. Gesellsch., Vierteljahrsschr. **39**, 1894, 1—64 [mit Porträt]. (A. WEILENMANN.) — Astron. journ. **13**, 1894, 181—182. — Gaea **30**, 1894, 239—243 [mit Porträt]. (MESSERSCHMIDT.) — Mem. d. spettroscopisti **22**, 1893, 205. — Nature **49**, 1894, 266—267. (W. J. L.) — FdM **25** (1893/94), 43. (M.)

Woolhouse, Westley Stoker Barker (1809—1893).

London, Mathem. soc., Proceedings **25**, 1894, 1—4. (A. B. KEMPE.) — Assurance magazine **31**, 1895, 362—365. (G. H. R.)

Worpitzky, Julius (1835—1895).

Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. **4**, 1897, 47—51. (Abdruck des Nekrologes von E. LAMPE.) — *Berlin*, Physik. Gesellsch., Verhandl. **14**, 1895, 33—39. (E. LAMPE.) — Zeitschr. für mathem. Unterr. **27**, 1896, 153—156. (Abdruck des Nekrologes von E. LAMPE.) — FdM **26** (1895), 40—41. (M.)

Zajaczkowski, Wladyslaw (1837—1898).

Wiadomości matem. **2**, 1898, 258—259. (S. D.)

Zebrawski, Teofil (1800—1887).

Wszechswiat 1887, 210—214. (A. BARANIECKI.)

Zelbr, Karl (1854—1900).

Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. **9**: 1, 1901, 63—64. (E. WÄLSCH.)

Zeller, Christian Julius Johannes (1824—1899).
Stuttgart, Mathem.-Verein., Mittheil. **1**$_2$, 1899, 52—53. (Wölffing.)

Zetzsche, Karl Eduard (1830—1894).
Mittheil. aus dem Osterlande (Altenburg) **6**$_2$, 1894, 199—220. (M. Vorretzsch.)

Zillmer, August (1831—1893).
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. **4**, 1897, 23—24. — Vereinsbl. deutscher Versicherungsges. **21**, 1893, 33—38. — FdM **28** (1897) 20. (M.)

Zmurko, Wawrzyniec (1824—1889).
Praze matem.-fiz. **2**, 1890, 433—448. (P. Dziwinski.)

Zurria, Giuseppe (1810—1896).
Catania, Accad. gioenia, Bullettino **46**, 1897, 32—39. (G. Pennachietti.)

Kleine Mitteilungen.

Kleine Bemerkungen zur zweiten Auflage von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik“.

Die erste (fette) Zahl bezeichnet den Band, die zweite die Seite der „Vorlesungen“. BM = Bibliotheca Mathematica.

1:12, 22, 29, 34, 103. 135, 190, 197, 202, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 265—266. — **1:283,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 499. — **1:284, 321,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 266—267. — **1:370,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 319. — **1:383, 400, 432, 437, 440, 467, 469, 475, 476,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 267—268. — **1:510,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 314. — **1:537, 540, 542,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 268. — **1:622,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 143. — **1:661, 662, 671,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 499. — **1:687—688,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 143—144. — **1:694, 704, 706, 708, 714, 735, 736, 744, 748,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 499—500. — **1 : 749,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 268. — **1 : 756, 757, 767,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 500—501. — **1:804, 805, 807, 808, 812, 823, 852,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 268—269. — **1:853, 854, 855,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 501.

---

2 : 7. In Bezug auf die Anmerkung 2) mag darauf hingewiesen werden, dafs B. Boncompagni schon 1852 in den Atti dell' accad. pontif. dei Nuovi Lincei **5**, S. 73, vier Handschriften des *Liber Abbaci* verzeichnete, worin ausdrücklich angegeben ist, dafs Leonardo Pisano seine Arbeit im Jahre 1228 verbesserte. Von diesen Handschriften sind die zwei ersten mit den von Herrn Cantor durch *b* und *c* bezeichneten identisch; die zwei übrigen sind: Cod. Riccard. No. 783 in Florenz und Cod. Magliabecch. III, 125 in Florenz.

G. Eneström.

2:8, 10, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 501—502. — **2:14—15,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 144. — **2:20,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 502. — **2:25,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 274.

---

2 : 31. Aus dem Umstande, dafs Leonardo Pisano sowohl in dem *Liber Abbaci* als in der *Practica geometriae* eine besondere Methode der Kubikwurzelausziehung als seine Erfindung ausgiebt, folgert Herr Cantor, dafs solche arabische Schriften, aus welchen Leonardo Kubikwurzelausziehungen hätte erlernen können, ihm unbekannt geblieben waren. Hierbei scheint aber Herr Cantor übersehen zu haben (vgl. S. 40), dafs Leonardo in der *Practica geometriae* zwar zuerst seine eigene Methode auseinandersetzt, aber dann auch (ed. Boncompagni, S. 150—153) die gewöhnliche Art der Kubikwurzelausziehung an 4 Beispielen (2345, 56789, 456789, 9876543) erläutert. Es dürfte also nicht unmöglich sein, dafs Leonardo ebenso gut wie Jordanus

Nemorarius den Alnasawî studiert hatte, und folglich sollten auch die Bemerkungen des Herrn Cantor auf der Seite 85 modifiziert werden.

G. Eneström.

---

2 : 34, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 144. — **2 : 37,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502.

---

2 : 38, 111. Hinsichtlich der Angabe, dafs das Wort Sinus erstmalig in der von Plato von Tivoli verfertigten Übersetzung des Albategnius vorkam, dürfte es genügen auf das, was Herr Cantor selbst im 1. Bande der *Vorlesungen* (S. 693) mitgeteilt hat, zu verweisen.

---

2 : 39, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502.

---

2 : 41. Die Worte: „Wenn dieses [1228] das Jahr ist, in welchem die zweite Ausgabe des Abacus [des Leonardo Pisano] erfolgte“, die in der 1. Auflage der *Vorlesungen* vielleicht angemessen sein konnten, sind in der 2. Auflage ganz unnötig, da Herr Cantor auf der Seite 7 drei noch vorhandene Handschriften des *Liber Abbaci* zitiert, welche bestätigen, dafs eine zweite Ausgabe wirklich im Jahre 1228 stattfand.

G. Eneström.

---

2 : 57. Die frühere Bemerkung zu dieser Seite (Biblioth. Mathem. $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 269) mufs insofern modifiziert werden, als es noch unsicher ist, ob Hugo Physicus Verfasser der *Practica geometriae* ist (vgl. P. Tannery, Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, S. 41).

---

2 : 59, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502. — **2 : 70,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 417. — **2 : 73, 82, 87, 88, 89, 90, 92,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502—503. — **2 : 98,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 269—270. — **2 : 105, 122, 128,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503—504. — **2 : 132,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 515—516. — **2 : 143,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504.

---

2 : 157. Ob die von Libri veröffentlichte Schrift wirklich schon aus dem 14. Jahrhundert stammt, dürfte noch als unentschieden betrachtet werden müssen (vgl. Eneström, Biblioth. Mathem. 1899, 106).

---

2 : 158. Über die Anwendung des Wortes *res* bei Leonardo Pisano siehe Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, S. 144.

---

2 : 163, 166, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504.

---

2 : 210. Die Bemerkung: „erhalten scheint sich die Übersetzung [von Archimedes' Werken durch Jacobus Cremonensis] nicht zu haben“ kann durch Zuhilfenahme von Archimedis *Opera omnia ed.* Heiberg III (1881),

S. XXII, XXIII, XXV unmittelbar berichtigt werden. HEIBERG teilt nämlich mit, dafs Abschriften der betreffenden Übersetzung in Nürnberg und Venedig vorhanden sind, und dafs dieselbe in der Baseler Ausgabe (1544) von ARCHIMEDES' Werken abgedruckt worden ist. Vgl. auch HEATH, *The works of Archimedes* (1897), S. XXVIII, XXIX. G. ENESTRÖM.

---

2 : 219. Nach J. FONTÈS (*Pierre Forcadel* II [1895], S. 23) sind einige italienische Rechenpfennige noch vorhanden, darunter 2 oder 3 venetianische.

---

2 : 229, 242, 243, siehe BM 1_3, 1900, S. 504—505.

---

2 : 253. Ein von MARTIN KRAL DE PREMISLJA, auch MARTINUS DE ZORAWICA genannt, verfafster *Geometriae practicae seu artis mensurationum tractatus* ist von Herrn L. BIRKENMAJER (Warszawa 1895) herausgegeben worden (vgl. Biblioth. Mathem. 1899, 56).

---

2 : 273, siehe BM 1_3, 1900, S. 505.

---

2 : 282. Die Darstellung von REGIOMONTANS Beweis, dafs sich die Diagonalen eines Sehnenvierecks aus den Seiten desselben berechnen lassen, ist nicht ganz richtig, denn REGIOMONTAN hat seinen Beweis vollständig und folgerichtig geführt. Dafs das Produkt der beiden Diagonalen bekannt ist, entnimmt er ohne nochmaligen Nachweis dem *Almagest* des PTOLEMAEUS. Um nun aber zu zeigen, dafs auch das Verhältnis derselben gegeben ist, führt er zunächst in Lehrsatz 7 aus, dafs in jedem Kreisvierecke $abgd$, dessen Diagonalen ag und bd sich in h schneiden, die beiden Proportionen richtig sind:

1) $$bh : hd = ab \cdot bg : ad \cdot dg; \quad ah : hg = ab \cdot ad : bg \cdot bd.$$

Aus ihnen zieht er dann in Satz 8 die weitern Proportionen:

2) $$bd : hd = (ab \cdot bg + ad \cdot dg) : ad \cdot dg; \quad ag : hg = (ab \cdot ad + bg \cdot gd) : bg \cdot gd.$$

Es ist aber

$$hg : hd = bh : ah,$$

und also auch:

3) $$ag : hd = (ab \cdot ad + bg \cdot gd) \cdot bh : bg \cdot gd \cdot ah,$$

also endlich aus 2) und 3)

4) $$ag : bd = (ab \cdot ad + bg \cdot gd) \cdot bh \cdot ad \cdot dg : (ab \cdot bg + ad \cdot gd) \cdot bg \cdot gd \cdot ah.$$

Soweit REGIOMONTAN. Da aber $ad : ah = bg : bh$, so sind die beiden Produkte $ad \cdot dg \cdot bh$ und $bd \cdot gd \cdot ah$ einander gleich, und die von ihm gefundene Beziehung die uns geläufige, dafs also $ag : bd = (ab \cdot ad + bg \cdot gd) : (ab \cdot bg + ad \cdot gd)$. Das alles ist soweit durchgeführt, dafs BIANCHINI, und

für diesen ist der Beweis nur gegeben, ohne weiteres alle oben durchgeführten Schlüsse ebenfalls niederschreiben konnte. M. Curtze.

---

2 : 282—283, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 506.

---

2 : 283. In Bezug auf die Behauptung, es sei eine Aufgabe des Regiomontanus die erste Maximalaufgabe, welche seit Apollonios und Zenodoros bekannt geworden, ist schon von Curtze (Biblioth. Mathem. $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504) darauf hingewiesen worden, dafs Cantor selbst auf Seite 163 eine Maximalaufgabe erwähnt hat, die nach Libri aus dem 14. Jahrhundert stammt. Aber schon früher hatte Jordanus Nemorarius im 4. Buche seiner *Geometria vel de triangulis libri IV* (vgl. z. B. IV: 2, 3, 18 in der Curtzeschen Ausgabe) verschiedene Maximalaufgaben behandelt, deren erste von Cantor selbst auf Seite 78 zitiert wird (im Register fehlt unter „Maximalaufgaben" der Verweis auf diese Seite). G. Eneström.

---

2 : 284, 286, 287, 289, 290, 291, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 506—507.

---

2 : 296. Die Unrichtigkeit der von Libri herrührenden Behauptung, dafs Leonardo da Vinci die Zeichen + und — erfunden hat, ist jetzt auch von Peano bestätigt worden, der für diesen Zweck die photographische Ausgabe von Leonardo da Vincis Manuskripte genau untersucht hat (vgl. Revue de mathématiques **6**, 1899, 83). G. Eneström.

---

2 : 313, 334, 353, 381, 386, 395, 401, 405, 425, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507—508. — **2 : 430,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 145. — **2 : 481, 482,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 508.

---

2 : 482. Annibale della Nave non fu mai professore di matematica nella Università di Bologna, ma soltanto maestro di aritmetica e di geometria insieme con tre o quattro altri ogni anno dal 1526 al 1558. I Rotoli ne registrano il nome in questi modi diversi: Hannibal della Nave — Hannibal della Navi — Annibal de Navj — Anuibal Navius — e precisamente dal 1526 al 1543 „Ad Arithmeticam et Geometriam (Cum hoc quod quilibet gratis doceat quattuor pauperes ex verecundis, prout ab eorum procuratoribus commissum fuerit)" e dal 1543 al 1558 „ad Arithmeticam." A. Favaro.

---

2 : 486, 489, 490, 497, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509. — **2 : 509,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270, 509. — **2 : 510, 514, 516, 517,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1901, S. 509.

---

2 : 530. Das Tartagliasche Maximum läfst sich in drei Faktoren $(\sqrt{10\frac{2}{3}})$ $(\sqrt{10\frac{2}{3}})$ $(\sqrt{2}\sqrt{10\frac{2}{3}})$ von dem Verhältnis $1 : 1 : \sqrt{2}$ zerlegen, aber in diesem Verhältnis stehen auch die Seiten eines gleichschenkligen rechtwinkligen

Dreiecks zu einander. Sollte TARTAGLIA also nicht durch Betrachtung des gleichschenkligen Dreiecks im Halbkreise zu seinem Maximum gekommen sein?[1]) Dafs das Produkt der beiden Schenkel ein Maximum — das gröfste Rechteck im Kreise — giebt, war schon vor TARTAGLIA bekannt. Wo früher nur zwei Faktoren eines Maximums in Betracht kamen, da führte er — infolge seiner Beschäftigung mit kubischen Gleichungen — drei Faktoren eines solchen ein, indem er als dritten die gröfste Sehne des Halbkreises — den Durchmesser — hinzunahm.

Diese Modifikation konnte er nicht als etwas Besonderes, Neues ausgeben, und so kleidete er sie in eine andere Form, indem er statt des Produktes der beiden Schenkel das Produkt der beiden Teile der Zahl 8, und statt des Durchmessers des Halbkreises die Differenz dieser beiden Teile setzte. Dafs er die Differenz als Hypotenuse betrachtet hat, geht daraus hervor, dafs er in seiner Regel deren Quadrat angiebt, wozu die Berechnung des Maximums keinen Anlafs gab.

Wenn er also die Gewifsheit seines Maximums ursprünglich auf geometrischem Wege gewonnen hatte, so ist es auf der anderen Seite sehr wohl möglich, dafs er später einen algebraischen Beweis fand und darum sagen konnte, der Grund hänge von der „neuen Algebra" ab.

Stettin. H. REUTER.

2 : 532, 535, 541, 548, 549, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509—510.

---

2 : 550. XYLANDERS EUKLID ist nicht als erste Bearbeitung dieses Schriftstellers in einer lebenden Volkssprache anzusehen, da die italienische Übersetzung von TARTAGLIA schon 19 Jahre früher, nämlich 1543 erschienen ist.

G. WERTHEIM.

2 : 554, 569, 572, 573, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510.

---

2 : 576. Folgende Aufgabe, die REGIOMONTAN an CHRISTIAN ROEDER, Professor in Erfurt, sendete (Aufgabe λ des Briefes vom 4. Juli 1471), zeigt, dafs der Verfasser doch wohl über die Gesetze der schiefen Ebene sich klar gewesen sein mufs. Der Wortlaut ist folgender:

λ. Duo sunt pondera colligata atque secundum situm equipollentia, quorum alterum quidem recte, alterum vero oblique descenderet, si a communi ligatura solverentur. Via autem obliqua secundi ponderis cum orizonte angulum continet viginti graduum, qualium unus rectus est nonaginta: quero proportionem talium ponderum. Equipollentia autem voco pondera, que sese vicissim a descensu prohibent. Ut si bc recta vice orizontis intelligatur, ab autem ad centrum mundi vergat, et ac cum bc angulum viginti



1) Der Gedankengang, den TARTAGLIA nach der Ansicht des Herrn REUTER eingeschlagen hat, würde vielleicht etwas verständlicher, wenn man ihn auf folgende Weise formulierte: Durch eine einfache geometrische Betrachtung kann man den fraglichen Ausdruck, der ein Maximum sein wird, als Produkt der drei Seiten eines gleichschenkligen Dreiecks darstellen, dessen Grundlinie der Differenz der Teile gleich ist. Aber auf geometrischem Wege ist es ziemlich leicht zu zeigen, dafs dies Produkt ein Maximum wird, wenn das Dreieck *rechtwinklig* ist. (G. ENESTRÖM.)

graduum contineat, d poudus minus per ab, et e pondus maius per ac descensum petat abiecto communi vinculo.

Dafs REGIOMONTAN für die von ihm gestellten Aufgaben entweder Lösungen besafs, oder wenigstens zu besitzen glaubte, ist aus den von ihm in der Handschrift seines Briefwechsels vielfach hinzugefügten ausführlichen Lösungen sicher. Wäre der Briefwechsel mit ROEDER weiter geführt worden, so hätte sich vielleicht auch hierzu die Lösung erhalten. M. CURTZE.

---

2 : 579, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 145. — **2 : 582**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 510.

---

2 : 583. Durch eine genaue Untersuchung der zwei bisher bekannten Exemplare (in Stockholm und in Löwen) hat es sich ergeben, dafs die von Herrn CANTOR erwähnte neue Auflage des *Canon mathematicus* des VIÈTE nur eine neue *Titel*auflage ist; in der That sind nur drei Seiten neu gedruckt, nämlich der Titel, die Rückseite des Titels und die darauf folgende Seite (vgl. H. BOSMANS, *Le traité des sinus de MICHIEL COIGNET*, Bruxelles 1901, S. 21—24). Der vollständige Titel lautet: FRAN. VIETAEI ‖ LIBELLORVM ‖ SVPPLICVM IN REGIA ‖ magistri insignisque Mathematici varia ‖ opera Mathematica. *IN QVIBVS TRACTATVR CANON MATHEMATICVS* ‖ SEV ‖ AD ‖ TRIANGVLA ‖ ITEM CANONION TRIANGVLORVM LATERVM ‖ rationalium: vnà cum vniversalium inspectionum ad Cano- ‖ nem Mathematicum, libro singulari. ‖ *QVAE QVIDEM OMNIA ILLUSTRANTVR TABVLIS* ‖ & *Appendicibus ab eodem authore recognitis.* ‖ PARISIIS ‖ Apud Bartholomaeum Macaeum, in Monte D. ‖ Hilarij, sub scuto Britanniae. ‖ M. D. C. IX. *CVM PRIVILEGIO REGIS.*

Merkwürdigerweise giebt es noch eine andere Titelauflage des *Canon mathematicus*, von welcher zwei Exemplare (in der Nationalbibliothek in Neapel und im British Mušeum in London) bekannt sind. Der Freundlichkeit des Herrn G. VACCA, der das zuerst genannte Exemplar eingesehen hat, verdanke ich die folgende Abschrift des Titels: FRANCISCI VIETAEI OPERA MA- ‖ THEMATICA, ‖ IN QVIBVS TRACTATVR ‖ *CANON MATHEMATICVS* ‖ sev ‖ ad triangvla. ‖ Item Canonion triangulorum laterum rationalium: vnà cum ‖ vniversalium inspectionum ad Canonem Mathe- ‖ maticum, libro singulari. ‖ Quae quidem omnia illustrantur Tabulis et Appendicibus ‖ ab eodem authore recognitis. ‖ LONDINI Apud Franciscum Bouvier, M. D. LXXXIX.

Es ist schwer zu verstehen, warum der Titel des *Canon mathematicus* zweimal neu gedruckt worden ist. G. ENESTRÖM.

---

2 : 583, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270. — **2 : 592**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146. — **2 : 594, 597**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270. — **2 : 597, 599—600**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146. — **2 : 602, 603—604**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270—271.

---

2 : 611. D'après L'interméd. d. mathém. **2**, 1895, p. 20, la première édition de l'arithmétique de JEAN (ou Jan) TRENCHANT (ou Tranchant) parut à Lyon en 1558, et de nouvelles éditions en ont été publiées à Lyon en 1561, 1566, 1571, 1578, 1588, 1602, 1605, 1631, 1643, et à Rouen en 1632 (cf. L'interméd. d. mathém. **5**, 1898, p. 252), 1647, 1660. Le *Catalogo*

della biblioteca del principe D. P. Boncompagni I (Roma 1895), p. 493, mentionne une édition de Lyon 1610, et M. H. Bosmans a bien voulu m'avertir que la bibliothèque de l'université de Gand possède une édition publiée à Paris en 1618. Dans des ouvrages bibliographiques on trouve aussi indiquées des éditions de Lyon 1563 et de Rouen 1675. G. Eneström.

---

2 : 612, siehe BM **1**₃, 1900, S. 277; **2**₃, 1901, S. 146.

---

2 : 613. Le *De arte magna* est dû à Guillaume et non pas à Pierre Gosselin. Voici le titre complet de cet ouvrage, que je transcris sur l'exemplaire de la bibliothèque de l'université de Louvain (scienc. 587): Gvlielmi Gosselini *Cadomensis Bellocasii de arte magna, seu de occulta parte numerorum, quae & Algebra, & Amulcabala vulgo dicitur, Libri qvatvor, in quibus explicantur aequationes Diophanti, Regulae Quantitatis Simplicis, & Quantitatis surdae.* Ad Reverendissimum in Christo Patrem Reginaldum Bealnaeum, Mandensem Episcopum, Illustrissimi Ducis Alenconii Cancellarium, Comitem Gevodanum, atque in sanctiori et interiori consilio consiliarium. [Marque d'imprimeur.] Parisiis apud Aegidium Beys, via Jacobaea ad insigne Lilii albi, M. D. LXXVII. In 8⁰ de 16 p. n. ch. et 172 p. ch. au r⁰ seul (1—86). H. Bosmans.

---

2 : 621, 623, siehe BM. **1**₃, 1900, S. 277; **2**₃, 1901, 146—147. — **2 : 638,** siehe BM **2**₃, 1901, S. 147. — **2 : 642, 643,** siehe BM **1**₃, 1900, S. 271.

---

2 : 655. Bachet's Ausgabe des Diophant enthält nicht bloſs den griechischen Text mit Anmerkungen, sondern auch eine lateinische Übersetzung.

G. Wertheim.

---

2 : 659, 660, siehe BM **2**₃, 1901, S. 147—148. — **2 : 665,** siehe BM **1**₃, 1900, S. 271. — **2 : 683,** siehe BM **2**₃, 1901, S. 148. — **2 : 700, 701, 703, 704, 705,** siehe BM **1**₃, 1900, S. 271—273.

---

2 : 719. Von Joh. Heinr. Alsteds *Encyclopaedia* erschien 1630 eine neue vermehrte Ausgabe, die bei Kästner nicht erwähnt ist. Sie umfaſst 4808 Spalten in folio und dazu ein vierfaches (Autoren-, Kapitel-, Fragen- und Sach-) Register von 236 Spalten. In dieser Ausgabe steht hinter dem Vorwort unter „Carmina et judicia" das von Herrn Cantor einem späteren Schriftsteller entnommene Anagramm: Alstedius per anagrammatismum *sedulitas.* — Alsteds Encyklopädie ist durchaus nicht ohne Interesse für die Geschichte der Mathematik und für die mathematische Nomenklatur; die Ausgabe von 1630 rechtfertigt durchaus das Lob, welches Leibniz dem Werke erteilt.

Felix Müller.

---

2 : 721, 742, 746, 747, siehe BM **1**₃, 1900, S. 273.

---

2 : 767. La bibliothèque de l'université de Gand possède elle aussi un exemplaire de la première édition des problèmes de Bachet (Math. 910).

En voici le titre complet: *Problemes plaisans et delectables, qui se font par les nombres: Partie recueillis de diuers autheurs, & inuentez de nouueau auec leur demonstration, par* Clavde Gaspar Bachet Sr de Méziriac. *Tres-vtiles pour toutes sortes de personnes curieuses qui se seruent d'Arithmetique.* [Marque d'imprimeur.] A Lyon. Chez Pierre Rigaud, en ruë Merciere, au coing de la ruë Ferrandiere, à l'enseigne de la Fortune. M. DC. XII. Auec Priuilege de l'Autheur. (16) + 172 p. in 8⁰.

Lucas, dans ses *Récréations mathématiques* (tome I, p. 245), Ahrens, dans ses *Mathematische Unterhaltungen und Spiele* (Leipzig 1901, p. 404) et d'autres encore, indiquent à tort cette première édition comme étant de Paris, 1612.

H. Bosmans.

2 : 767, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148.

2 : 772. Alle durch die sogenannte *Regula Virginum* oder *Regula Cecis* aufgelösten Aufgaben gehören zu denjenigen, welche Bachet hier behandelt. Bei ihnen wird, der Aufgabe gemäfs, stets eine Lösung durch ganze Zahlen verlangt: es ginge also eigentlich das Verlangen der ganzzahligen Lösung bis auf die Alcuinschen Exempel *ad acuendos iuvenes* zurück. Sicher aber wird schon im 16. Jahrhundert in dem dem Initius Algebras zugeschriebenen Buche die Aufgabe:

$$x + y + z = 100; \quad 3x + y + \tfrac{1}{20}z = 100$$

genau so gelöst, wie es jetzt geschehen würde, wenn auch natürlich die Form eine andere ist. Das Verfahren kommt nämlich auf folgendes hinaus. Aus den beiden Gleichungen wird zunächst die zweite in $60x + 20y + z = 2000$ umgewandelt, davon die erste Gleichung subtrahiert und die restierende Gleichung

$$59x + 19y = 1900$$

in ganzen Zahlen aufgelöst. Wie diese Rechnung zu geschehen hat, ist nicht angegeben. Der Commentator des Initius Algebras zeigt auch, dafs die rechten Seiten der ursprünglichen Gleichungen gar nicht gleich zu sein brauchen. Dafs übrigens auch Regiomontan dergleichen Aufgaben zu lösen wufste, ist aus 2 : 286 ersichtlich. Sie wurden im 15. Jahrhundert sogar mittelst des doppelten falschen Ansatzes behandelt (siehe Curtze im Heft 8 [1898] der Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik).

M. Curtze.

2 : 775. Albert Girard semble avoir été très versé dans la théorie des nombres. Cela résulte d'un passage (*Oeuvres Mathematiques de* Simon Stevin *par* Albert Girard, 1634, p. 156, col. 1) que j'ai déjà cité, en partie, dans le *Formulaire de mathém.* t. 2 n. 3 (1899), p. 83.

«*Alb. Gir. Determinaison d'un nombre qui se peut diviser en deux quarrez entiers.*

I. Tout nombre quarré.

II. Tout nombre premier qui excede un nombre quaternaire de l'unité.

III. Le produict de ceux qui sont tels.

IV. Et le double d'un chacun d'iceux.

Laquelle determinaison n'estant faicte n'y de l'Autheur n'y des interpretes, servira tant en la presente et suivante comme en plusieurs autres.»

Ce passage est le commentaire de GIRARD à la question XII dn livre V de DIOPHANTE.

Il faut observer que les propositions de GIRARD donnent la résolution complète de la question proposée. Plusieurs années après FERMAT a donné de nouveau (*Oeuvres* **1**, 1891, p. 294) ces propositions comme les siennes. A-t-il connu ce passage de GIRARD? G. VACCA.

---

2 : 777, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148.

---

2 : 783. Il convient de mentionner entre les travaux de FRENICLE son *Abregé des combinaisons* (Mémoires de l'acad. des sc. de Paris t. **5**, 1693, [p. 87—125 de l'édition de 1729]). Il contient pour la première fois la considération des combinaisons avec répétition qu'on attribue d'ordinaire à JACQUES BERNOULLI (voir par ex. CANTOR, **3** : 347). On peut encore ajouter que dans le *Traité des triangles rectangles en nombres* imprimé pour la première fois à Paris, en 1676, FRENICLE a démontré trois théorèmes qu'on retrouve souvent dans les traités d'arithmétique. Les voici: «En tout triangle rectangle, un des deux costez est mesuré par trois» (p. 76). — «En tout triangle rectangle, un des costez est mesuré par 4» (p. 77). — «Tout triangle rectangle a un de ses trois costez mesuré par cinq» (p. 79). G. VACCA.

---

2 : 784, 820, 825, 840, 856, 865, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148—149. — **2 : 876, 878, 879,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 511. — **2 : 891,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 273. — **2 : 901, IX, X** (Vorwort), siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 511—512.

---

3 : 9. Die Nova acta eruditorum begannen erst mit dem Jahre 1732 (nicht 1707). Der letzte Band dieser Zeitschrift trägt den Titel: „Nova acta eruditorum anno 1776 [nicht 1774] publicata", erschien aber erst 1782. FELIX MÜLLER.

---

3 : 10, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 518. — **3 : 12, 17, 22,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 512.

---

3 : 26. Die Bemerkung, dafs CLAVIUS und WALLIS „die letzten Vertreter" der zwei einander widersprechenden Meinungen über den Contingenzwinkel waren, scheint uns etwas dunkel zu sein. Herr CANTOR nennt ja selbst einen viel späteren Vertreter der ersten Meinung, nämlich LEOTAUD (1662), und etwa gleichzeitig mit diesem verteidigte HOBBES eine ähnliche Meinung. Auf der anderen Seite war WALLIS' *Defensio* nicht die letzte Schrift, in welcher eine entgegengesetzte Meinung vertreten wurde (vgl. VIVANTI, *Il concetto d'infinitesimo e la sua applicazione alla matematica*, Mantova 1894, S. 24—28). G. ENESTRÖM.

---

3 : 45—48, 49, 50, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 512—513.

---

3 : 70. Das multiplikative Entstehen der Binomialkoefficienten kann nicht als eine Entdeckung Newtons (1669) bezeichnet werden, denn es kommt schon in Briggs' *Arithmetica logarithmica* (1624) vor. Darauf hat schon Hutton (*Mathematical tables with a large and original history*, 1785) und später M. Koppe (*Die Behandlung der Logarithmen und der Sinus im Unterricht*, 1893, S. 6) aufmerksam gemacht. Zwar giebt Briggs nicht die allgemeine Formel für die Bildung der Binomialkoefficienten an, aber er stellt die entsprechenden Sätze auf. M. Koppe.

3 : 100, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 149. — **3 : 116,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 513. — **3 : 117,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 518. — **3 : 123,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 513. — **3 : 174,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 149—150. — **3 : 183,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 432. — **3 : 201,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 513. — **3 : 207,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 519. — **3 : 215,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 150. — **3 : 218, 224,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 513—514. — **3 : 225, 228,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 150. — **3 : 232,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 514. — **3 : 246,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 514; **2**$_3$, 1901, S. 151. — **3 : 250,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 514. — **3 : 303,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 155. — **3 : 447, 455,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 151. — **3 : 473,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 154—155. — **3 : 477, 479,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 151—152.

Anfragen und Antworten.

93. Über den geometrischen Quadranten (1594). In der Schrift: *De qvadrante geometrico libellvs. In qvo qvidqvid ad linearvm et svperficiervm, vtpote altitvdinvm et latitvdinvm, dimensiones fecit lucidissime demonstratur.* Additae figurae aeneae 37 ad maiorem doctrinae intelligentiam et lucem non ita expositae. Sumptibus et expensis Cornelii de Jvdaeis editus (Norimbergae: typ. Chr. Lochneri 1594. 4^0, (8) + 63 p. + 1 t.) lautet der Anfang der Vorrede: Cornelius De Jvdaeis Antverpianvs benevolis lectoribus sal. De qvadrante geometrico hic agitvr neque alius vti rem sciatis hic est, quam is, quem nuperrime edidi germanicè. Das Buch ist also vorher in deutscher Sprache erschienen. In welchem Jahre und wie lautet der deutsche Titel?

G. Valentin.

94. Über elementare Herleitung von Maximalwerten. Bekanntlich enthalten die meisten Lehrbücher der Elementar-Algebra eine Methode zur Bestimmung von gewissen Maximal- und Minimalwerten, welche darin besteht, dafs man den gegebenen Ausdruck $f(x)$ gleich M setzt, und diese Gleichung in Bezug auf die variable Gröfse x löst; man erhält dann die Lösung unter der Form

$$x = \varphi_1(M) \pm \sqrt{\varphi_2(M)}$$

wo φ_1 und φ_2 rationale Funktionen von M sind, und M wird aus der Gleichung $\varphi_2(M) = 0$ bestimmt. Diese Methode wurde schon von J. Ozanam in seinem *Dictionnaire mathématique* (Amsterdam 1691, S. 18—19) gebraucht, aber wahrscheinlich ist sie älteren Ursprungs.

In welchen Arbeiten vor 1691 ist die genannte Methode benutzt worden?

G. Eneström.

95. Über den Ursprung des Ausdruckes „Pellsche Gleichung". Die Ausdrücke *Pellsche Gleichung* und *Pellsches Problem* sind, soviel mir be-

kannt ist, zuerst von Euler gebraucht worden und zwar in der 1765 gedruckten Arbeit: *De usu novi algorithmi in problemate Pelliano solvendo.* In derselben heifst es (*Comm. arithm. coll.* I, p. 317): „Atque hoc est illud problema olim quidem maxime celebratum, a solutionis ingeniosissimae auctore Pellianum vocatum etc.“ Ebenso sagt Euler in seiner *Anleitung zur Algebra* (1770): Hierzu hat vormals ein gelehrter Engländer, namens Pell, eine ganz sinnreiche Methode erfunden, welche wir hier erklären wollen u. s. w. (Bd. II Cap. 7 § 98). Auch in der Arbeit von 1773: *Nova subsidia pro resolutione formulae* $ax^2 + 1 = y^2$ sagt Euler (*Opusc. anal.* I, p. 310 = *Comm. arithmet. coll.* II, p. 35): Problema hoc, ab auctore Pellianum dictum etc.

Es ist nun von Interesse, zu ermitteln, ob nicht schon ein Schriftsteller *vor* Euler den in den genannten Ausdrücken liegenden Irrtum begangen hat.

G. Wertheim.

Zur Anfrage 87 über den Ursprung der Benennung „Radius“ für Halbmesser. Petrus Ramus (*Arithmeticae libri II; Geometriae XXVII; Scholae mathematicae.* Basileae 1569) bedient sich durchweg dieser Benennuug.[1]) Er definiert: „Radius est recta a centro ad perimetrum“, und beruft sich auf Plato und Cicero: *Ἀκτίν*, radius est verbum Platonis in *Timaeo* rotundum definientis, cuius omnis extremitas paribus a medio radiis attingitur (*Geom.* l. IV, p. 20); hae lineae *ἄκτινες* (sic!) Platoni, Ciceroni radii sunt (*Schol. mathem.* l. VI, p. 155). In Wahrheit aber bedient sich Plato dieser Benennung hier nicht, sondern wendet in Übereinstimmung mit den mathematischen Schriftstellern der Griechen das Wort *ἀκτίς* nur an, wo es sich um eine körperliche Gerade (eine Radspeiche, einen Lichtstrahl) handelt. Die von Ramus angezogene Stelle lautet bei Plato: *σφαιροειδές, ἐκ μέσου πάντῃ πρὸς τὰς τελευτὰς ἴσον ἀπέχον.* Cicero dagegegen bediente sich anschaulicher Ausdrücke und übersetzte: „cuius omnis extremitas paribus a medio radiis attingitur“ (Plato, *Timaeus* 33 b; Cicero, *Timaeus* VI). Es kann kein Zweifel sein, dafs hier „radius“ den Halbmesser der Kugel bedeutet.

Ambros Sturm.

On the question 88 (the term „differential quotient“). In his *Bemerkungen über den Polynomischen Lehrsatz* (Combinatorisch-analytische Abhandlungen, herausg. von C. F. Hindenburg **1**, Leipzig 1796), Klügel uses the term „Differentialquotient“ several times on p. 81, 82. In his *Lokalformeln für höhere Differentiale* (L. c. **2**, 1800) J. F. Pfaff uses the term: „Differentialverhältniss“.

Ann Arbor. W. W. Beman.

---

1) Abgesehen von Ramus scheint diese Benennung im 16. Jahrhundert sehr selten vorzukommen. So z. B. dürfte das Wort „Radius“ nie in Stevins Werken gebraucht werden; auf der anderen Seite wurde es im Jahre 1593 von Adriaen van Roomen (*Ideae mathematicae*) angewendet. Vom Jahre 1600 an, wo das Wort von Pitiscus in seiner *Trigonometriae libri quinque* benutzt wurde, kommt es häufiger vor, aber noch gegen Ende des 17. Jahrhunderts konnte Caspar Schott in seinem *Cursus mathematicus* (Frankfurt 1674, S. 5) sagen: „Semidiameter circuli est recta quaecumque a centro ad circumferentiam ducta. Appellatur etiam radius, ob similitudinem cum radio rotae.“ (G. Eneström.)

Recensionen.

M. C. P. Schmidt. Realistische Chrestomathie aus der Litteratur des klassischen Altertums. Buch 1, 2. Leipzig, Dürrsche Buchhandlung 1900, 1901. 8°, VIII + 128 S. + 12 Taf.; VI + 170 S. + 2 Taf. — Mark 2. 40; 3. —.

Schon vor mehr als 13 Jahren lenkte Herr P. Mansion in dieser Zeitschrift (1888, S. 35) die Aufmerksamkeit auf den grossen Nutzen für das Studium der Geschichte der Mathematik, den die Herausgabe einer mathematischen Chrestomathie mit sich führen würde, und kürzlich hat er noch einmal (siehe Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, S. 235—236) eine solche Arbeit als ein *desideratum* bezeichnet. Es ist ja auch ganz richtig, dafs sie noch nicht vorhanden ist, aber als Vorarbeiten dazu könnte man z. B. die bekannten Schriften des Herrn Rudio über die Quadratur des Kreises (Leipzig, Teubner 1892) und des Herrn Stäckel über die Theorie der Parallellinien (Leipzig, Teubner 1895) betrachten, und eine ähnliche Bemerkung kann auch bezüglich der *Realistischen Chrestomathie* des Herrn Max Schmidt gemacht werden. Zwar verfolgt die letztere in erster Linie einen wesentlich anderen Zweck, nämlich für den humanistischen Unterricht auf den Gymnasien die realistischen Elemente des griechischen und römischen Altertums zu verwerten und enthält darum keine Übersetzung, so dafs ihre Benutzung für den mathematisch-historischen Unterricht dadurch beträchtlich erschwert wird.

Das erste Buch der Chrestomathie bringt zuerst eine Einleitung über einige der hervorragendsten griechischen Mathematiker (Euklides, Ptolemaios, Nikomachos, Diophantos, Thales, Pythagoras, Eratosthenes) und ihre Schriften, und dann im Originaltexte eine Auswahl aus Euklids Elementen, sowie Bruchstücke aus dem Almagest des Ptolemaios (Ptolemaischer Lehrsatz), der Arithmetik des Nikomachos (Das Sieb des Eratosthenes) und der Arithmetik des Diophantos (Auflösung von einfacheren Gleichungen). Das zweite Buch ist hauptsächlich der Astronomie gewidmet, und die dort repräsentierten Verfasser sind sämtlich Anhänger der Stoischen Schule gewesen. Darum giebt Herr Schmidt auch in der Einleitung eine Übersicht der Geschichte und der Lehren des Stoicismus, sowie Notizen über Aratos, Eratosthenes (als Geograph und Philosoph), Krates, Polybios, Poseidonios, Geminos, Kleomedes, Strabon und die beiden Plinius. Dann folgen im Originaltexte Auszüge aus den astronomischen Schriften von Geminos und Kleomedes, sowie Bruchstücke aus Polybios, Strabon und Plinius dem Jüngeren, welch letzterer also der einzige römische Verfasser ist.

Die Einleitungen sind gut redigiert und scheinen uns sehr zweckmäfsig. Inbezug auf die Einzelheiten erlauben wir uns nur folgende zwei kleine Bemerkungen. S. 20 des 1. Buches giebt Herr Schmidt an, dafs Nikomachos

noch um 950 n. Chr. sprichwörtlich als tüchtiger Rechner genannt wird, aber Tannery hat (Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, S. 267) bemerkt, dafs die Quelle dieser Notiz jetzt als apokryphisch betrachtet wird, und dafs übrigens die Worte: „Du rechnest wie Nikomachos von Gerasa“ gar nicht als lobend gebraucht wurden. S. 22 des 1. Buches nimmt Herr Schmidt als möglich an, der betreffende Metrodoros habe unter Konstantin dem Grofsen gelebt, aber Tannery weist in seiner Diophantos-Ausgabe (II, Leipzig 1895, S. XII—XIII) darauf hin, dafs diese Annahme ganz unberechtigt ist und auf einer Verwechselung beruht (vgl. Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, S. 267).

Es würde uns sehr freuen, wenn die Chrestomathie des Herrn Schmidt auch für den mathematisch-historischen Unterricht benutzt werden könnte. Wie wir schon oben bemerkten, wird ihre Anwendung durch das Fehlen einer Übersetzung erschwert, und leider dürfte es jetzt nur wenige Mathematiker geben, die ohne allzu grofse Mühe griechisch lesen. G. Eneström.

Anaritii in decem libros priores Elementorum Euclidis commentarii ex interpretatione Gherardi Cremonensis in codice Cracoviensi 569 servata edidit Maximilian Curtze. Leipzig, Teubner 1899. 8⁰, XXIX + 389 S. — Mark 6.

Es ist in der That eine grofse und sehr verdienstvolle Arbeit, die Herr Curtze hier mit gewohnter Energie erledigt hat, und man mufs ihm sehr dankbar sein, dafs er, der die besten Voraussetzungen zur Beurteilung dieser mittelalterlichen Übersetzung besitzt, das mühsame Abschreiben eines so grofsen Werkes unternommen und die nicht immer leichte Interpretation der einzigen bekannten, aufserdem nicht besonders guten Handschrift, durchgeführt hat.

Schon lange hat man gewufst, das Al-Narizis Kommentar zu Euklid von Gerhard von Cremona übersetzt war. Erst im Jahre 1896 wurde aber eine diese Übersetzung enthaltende Hds. gefunden, und zwar von Curtze selbst; ihm gebührt also die Ehre sowohl des Fundes wie auch der Ausnützung desselben, und es ist dies keine geringfügige Ehre.

Dem mit den Verhältnissen Unbekannten wird es vielleicht beim ersten Anblick wunderlich erscheinen, dafs die Veröffentlichung einer mittelalterlichen Übersetzung eines arabischen Kommentars von besonders hohem Wert sein kann. Es ist aber in diesem Falle dennoch so, und zwar aus folgenden Gründen.

Erstens enthält Al-Narizis Kommentar zahlreiche hochwichtige Auszüge aus den griechischen Euklidkommentaren von „Aganis“ (= Geminos?; vgl. P. Tannery, Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, S. 9—11), Heron und Simplikios, die sonst nicht bekannt sind.

Zweitens sind grofse Teile des Kommentars, soweit man bis jetzt hat ermitteln können, nur in der lateinischen Übersetzung erhalten (in der Ausgabe pag. 1—25 und 190—286); denn die einzige arabische Hds., die unseres Wissens den Kommentar enthält, cod. Leid. 399[1] (teilweise herausgegeben von Besthorn und Heiberg) giebt nur Al-Narizis Kommentar zu Euklid I—IV, und ist aufserdem im Anfang defekt.

Drittens giebt Curtzes Ausgabe uns Gelegenheit einen arabischen Text mit einer Übersetzung von Gerhard desselben Textes zu vergleichen, was eine

grofse Bedeutung für die richtige Beurteilung der Thätigkeit dieses berühmten Übersetzers hat.

Im richtigen Verständnis des Wertes der Ausgabe als Urkundensammlung und Supplement zur Ausgabe des arabischen Textes, hat der Herausgeber sie überall mit erläuternden Noten, sowohl mathematischen wie litterargeschichtlichen, versehen, letztere mit Anwendung eines reichhaltigen Quellenmaterials. Es ist dadurch dem Herausgeber oft gelungen, Heibergs Noten in der arabischen Ausgabe berichtigen zu können, an sich ein deutlicher Beweis dafür, wie gewissenhaft er seine Quellen benutzt hat.

Dagegen vermissen wir einen „Index latinitatis"; es ist allerdings eine langweilige und mühsame Arbeit einen solchen auszuarbeiten; in diesem Falle wäre es jedoch der Mühe wert gewesen; denn das mittelalterliche Latein ist, namentlich wenn man, wie der Herausgeber es gethan, die handschriftliche Orthographie beibehält (was wir übrigens nur billigen können), für viele Forscher der Geschichte der Mathematik nicht ganz leicht zugänglich. Außerdem wäre gerade hier ein „Index latinitatis" unschätzbar als Kriterium zur Entscheidung, ob die vielen Übersetzungen, deren Übersetzer man nicht bestimmt nachweisen kann, dem Gerhard zuzuschreiben sind oder nicht (z. B. Theodosios' Sphärik und Euklids Elemente). Es ist einleuchtend, dafs ein Index, wozu das vorliegende Werk das Material beigesteuert, eine ziemlich vollständige Gerhardsche Terminologie liefern würde, zumal da man hier sehr oft die griechischen Wörter, die ursprünglich im Texte standen, zum Vergleich bereit hat. Auch würde der Index uns zeigen, wie Gerhard viele arabische Wörter unübersetzt liefs, z. B. „meguar" d. h. Achse (s. Ausgabe p. 7), welches Wort man auch in Gerhards Übersetzung von Autolykos' *de sphaera mota* findet.

Viele andere Aufschlüsse über Gerhards übersetzerische Methode gewinnt man durch einen Vergleich der Anaritiusausgabe mit anderen seiner Übersetzungen. So scheint es, dafs Gerhard meistens die arabischen bzw. griechischen Vorreden weggelassen hat. Ein Vergleich zwischen Curtzes und Heiberg-Besthorns Ausgabe zeigt, dafs es hier der Fall ist. So auch in Menelaos' Sphärik, wo aufser der Vorrede bei Gerhard auch die Definitionen fehlen. Es scheint dies überhaupt ein Prinzip zu sein. Als Beispiele genügen folgende Anfangszeilen von verschiedenen in cod. Par. 9335 enthaltenen Werken: Ahmed ben Jusuf: *de arcubus similibus*: »Hic, postquam optauit ei bona euenire, cui epistolam mittit, inquit . . .«. — Alkindi: *de quinque essentiis:* »Sapiens, ubi dialecticam incepit, dixit, quod . . . .«. — *Liber trium fratrum:* »Propterea quia uidimus, quod conueniens est necessitas scientie . . . . .«. — Alchwarizmi: *Algebra et almuchabala:* »Hic post laudem dei et ipsius exaltationem inquit . . . .«. Ob das eine Eigentümlichkeit des Gerhard allein, oder vielmehr aller damaligen Übersetzer ist, wird Herr Curtze mit seinen reichhaltigen Kenntnissen am besten entscheiden können. — Auch was die Namenverdrehungen betrifft, wäre eine genaue Untersuchung auf Basis der zwei Al-Narizi-Ausgaben am Platze.

Es ist sonderbar, dafs es nur gelungen ist, *eine* Anaritiushds. zu finden (c. Digby 168 enthält nämlich überhaupt nur Fragmente). In dieser Beziehung möchte ich darauf aufmerksam machen, dafs es vielleicht sehr lohnend wäre in Spanien nachzuforschen. Nach R. Beer (*Die Handschriftenschätze Spaniens* p. 127) befand sich nämlich in dem »Inventario de las alaja mueblas y libros des Bischofs Palomeque vom Jahre 1273 als Nr. 29; »Alfagrano, Teodosio. Anaricio, Mileo con otros libros de geometria«. Wer die Verzeichnisse über

Gerhards Übersetzungen kennt, bezweifelt nicht, dafs es sich um eine sehr alte, fast archetypische Hds. (Gerhard starb 1187) handelt, die Al-Fergani: *de aggregationibus stellarum*, Al-Narizis Kommentar, Theodosios' und Menelaos' *sphaerica* und andere Übersetzungen von Gerhard enthielt. Obwohl der Text, so wie ihn Curtze nach cod. Cracov. 569 interpretiert und suppliert, zuverlässig scheint, wäre dennoch ein Vergleich mit einer so alten Hds. wohl nicht umsonst.

Es giebt aber noch ein Mittel zur Beurteilung des Textes in Curtzes Ausgabe; denn der letzte Teil des Kommentars zu Euklid. X, d. h. p. 252—386 in der Ausgabe findet sich in zwei Pariserhandschriften und zwar cod. Par. 9335 und 7377 A, jedoch unter dem Namen »Abbacus«. Dieser Umstand in Verbindung mit Curtzes Erläuterungen p. 200 und 252—253 macht es in meinen Augen zweifelhaft, ob dieser Teil, ungefähr das letzte Drittel der Ausgabe, wirklich dem Kommentar des Al-Narizi gehört.[1]) In diesem Falle wäre cod. Leid. 399 also nicht so defekt wie bisher angenommen. Gelegentlich bemerke ich, dafs meine Auszüge aus cod. Par. 9335, mit der Anaritius-Ausgabe verglichen, zu bestätigen scheinen, dafs die Ausgabe eine wirklich gute und zuverlässige ist.

Dagegen kann ich nicht umhin die Interpretation des Euklidfragmentes, das der Herausgeber in den Prolegomena p. XVI—XXVI nach cod. Mon. Univ. 2° 757 publiziert, zu kritisieren. Allerdings sind Teile des Fragmentes (namentlich fol. 1ʳ col. 2) schwer leserlich, ja stellenweise ganz unleserlich, aber durch sorgfältiges Studium der Handschrift und Vergleich mit dem vom Herausgeber hinzugefügten griechischen Text, läfst sich viel mehr herausbringen als ihm gelungen ist. Auch gefallen uns die Ausfüllungen der unleserlichen oder ungelesenen Stücke nicht, weil genügende Rücksicht auf die Länge der auszufüllenden Strecke nicht genommen worden ist. — An folgenden Stellen lese ich anders als der Herausgeber: (die Ausfüllungen sind mit ⟨ ⟩ bezeichnet):

fol. 1ʳ col. 1.
15. ab inuicem literra
16. dico esse inuicem quo
19. quarto secundo sep
20. timo i⟨n pri⟩mo et equa
fol. 1ʳ col. 2.
2. mo. sed ab ⟨inuicem⟩ lit
tera nos q⟨uid⟩em lit
terʳa⟨rum⟩ sic ⟨primo⟩
5. secundo ter⟨tio⟩ tri
angulo. quę en quar
to[2]) secundo numerus[3])
eius quasi diuidet.[4])
qui autem quarto
10. secundo tertio et sep
timo ab inuicem lit
terʳa nos quidem s⟨ic⟩
quarto[2]) secundo ter
tio triangulo. eni.
15. quarto tertio nu
merus[3]) e r quasi diui
det.[4]) quas ⟨quam⟩ ęqua
les ⟨nos ęquales ⟨utr⟩
isq; ē equales. erg
20. o esse ⟨primo⟩ se
cundo ⟨tertio⟩ tri

1) Über andere Handschriften dieses Stückes, sowie den Verfasser siehe Steinschneider, *Hebr. Übersetzungen* p. 522—23; vgl. auch Leclerc: *Histoire de la médecine arabe* II, 413, 507, 512.

2) Soll heifsen „primo“ = A.

3) Soll wohl heifsen „diametrus“.

4) Quasi diuidet = *δίχα τέμνει*.

angulo quę quarto
secundo tertio tri
24. angulo. Ɑ . . . . . .
fol. 1^v col. 1.
10. Quę triangula
11. $\overset{co}{\text{quo}}$ $\text{equali}\overset{tr}{\text{s}}$

12. grad$\overset{dv}{\text{os}}$ sunt Et<aut>[1])
fol. 1^v col. 2.
20. primo ab inuice lit[tera]
fol. 2^r col. 1.
19. druplum manifestata.

Es ist dies eine eigentümliche Übersetzung, wo ab inuicem littera = *παραλληλόγραμμον*, nos quidem = *ἥμισυ*, gradus = *βάσις*, numerus = *διάμετρος*, quasi diuidet = *δίχα τέμνει*; die Wiederholungen zeigen aber, daſs man wirklich so übersetzte, und diese Thatsache ist eben das interessanteste bei diesem Euklid-Fragment vom 10. Jahrhundert, für dessen Identifikation man dem Herausgeber des Anaritiustextes dankbar sein muſs.

Einen allerdings nur formalen Tadel möchten wir gegen die Note in den Prolegomena XIII richten. Warum ist der Titel des Buches, auf welches hingewiesen wird, mit Typen, die die damaligen Abkürzungen nachahmen, gedruckt? Für Forscher, die nicht paläographische Kenntnisse besitzen, ist es lediglich eine Mühe, die Note zu verstehen; für andere dürften die Abkürzungsangaben ganz wertlos sein.

München. Axel Anthon Björnbo.

Carl Friedrich Gauss. Werke. Achter Band. Herausgegeben von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Leipzig. B. G. Teubner 1900. 458 S. 4°. Mark 24.

Endlich nach einer Pause von mehr als zwanzig Jahren ist wieder ein Band der Werke von Gauss erschienen, ja, was die wenigsten Mathematiker erwartet haben werden, noch drei weitere Bände sind in Aussicht, und wir dürfen hoffen, daſs in nicht zu ferner Zeit die ganze Ausgabe, dieses groſsartigste Gaussdenkmal, vollendet vorliegen wird. Freuen wir uns dessen und forschen wir nicht nach den Ursachen der langen Verzögerung, seien wir vielmehr den jetzigen Herausgebern dankbar, daſs sie alle Kräfte daran setzen, das von dem früheren Versäumte nachzuholen. Daſs das geschieht, haben wir in erster Linie Felix Klein zu verdanken, der seine ganze Energie daran gesetzt hat, das Unternehmen zu fördern, und, wenn er auch nicht unmittelbar als Herausgeber mit thätig ist, doch die oberste Leitung des Ganzen in Händen hat. Ihm ist es zuzuschreiben, daſs bei der Herausgabe der einzig richtige Grundsatz befolgt wird, der wissenschaftlichen Welt alles von Gauss Herrührende zugänglich zu machen, was sich nur irgend zur Veröffentlichung eignet. Über Leibniz sagt Lessing, er sei ein Mann, der, wenn es nach ihm ginge, keine Zeile müſste vergebens geschrieben haben. Kein Mathematiker wird zögern, diesen Ausspruch auch auf Gauss anzuwenden.

Der vorliegende Band enthält über Erwarten zahlreiche Nachträge zu den drei ersten Bänden und zum vierten Bande mit Ausnahme des geodätischen Teils. Nur weniges davon war bereits gedruckt, nämlich eine von Schering in den Göttinger Nachrichten veröffentlichte Jugendarbeit von Gauss: „De

1) d. h. quo equalis grados ist korrigiert in: „coequaliter gradus“.

integratione formulae differentialis $(1 + n \cos \varphi)^r \, d\varphi$", eine 1808 in der Hallischen Litteraturzeitung erschienene Anzeige eines Werkes von Leonelli (Logarithmische Supplemente), die man anscheinend erst jetzt als von Gauss stammend erkannt hat, drei Anzeigen von Schriften über Parallelentheorie, die des Zusammenhangs wegen aus Band IV wiederholt worden sind, ein Aufsatz von zwei Seiten aus Bd. 22 des Crelleschen Journals, endlich einige briefliche Äusserungen, die schon früher an verschiedenen Stellen gedruckt sind. Insgesamt beträgt das schon Bekannte gegen 70 Seiten, alles übrige, 380 Seiten, sind bisher unbekannte Aufzeichnungen aus dem Gaussischen Nachlasse und Auszüge aus Briefen. Unter den Aufzeichnungen befinden sich einige von gröfserem Umfange, in zusammenhängender Darstellung abgefafst, die meisten aber sind kurze Notizen aus Handbüchern oder auf losen Zetteln, auf den Schmutzblättern von Gauss benutzter Bücher; diese letzteren enthalten vielfach Formeln mit sehr dürftigem Text oder ganz ohne Text. Man kann darnach ermessen, dafs die Aufgabe der Herausgeber keineswegs leicht war, und man mufs bewundern, dafs es ihnen fast immer gelungen ist, mit Sicherheit festzustellen, was Gauss eigentlich hat sagen wollen; in beigefügten Anmerkungen sind darüber die nötigen Winke gegeben. Freilich ist das nur dadurch möglich geworden, dafs man für jedes einzelne Gebiet einen besonders geeigneten Herausgeber gewählt hat, denn seiner Zeit vorauseilend hat Gauss Vieles aufgezeichnet, was erst viel später und zum Teil anf ganz anderm Wege wiedergefunden worden ist, und man steht gar manchen dieser Aufzeichnnngen ratlos gegenüber, wenn man nicht mit der modernen Entwickelung der betreffenden Gebiete vertraut ist.

Es ist allgemein bekannt, dafs Gauss niemals zu bewegen war, seine Ideen an die Öffentlichkeit zu bringen, bevor sie ganz ausgereift waren und bevor er sie in einer ihn selber befriedigenden Darstellung bekannt machen konnte. Lieber verzichtete er gauz auf die Ehre des ersten Entdeckers, als dafs er vorzeitig etwas hätte drucken lassen. Wie oft mufste er es erleben, dafs andere mit Dingen hervortraten und Ruhm ernteten, die er selber schon vor vielen Jahren gefunden hatte. Er schwieg dann und wahrte höchstens in Briefen an vertraute Freunde sein Recht; er war eben der reiche Mann, der immer noch reicher bleibt als die andern, auch wenn er freiwillig auf einen Teil seiner Güter verzichtet, der für die meisten ein Vermögen bedeutet. Diesen Charakterzug, der offenbar für manche Leute unverständlich ist, teilt Gauss mit Newton, aber er steht höher als dieser, denn er läfst kaum jemals eine Spur von Empfindlichkeit blicken, was man von dem grofsen Engländer nicht sagen kann, und er duldet nicht einmal, dafs seine Freunde öffentlich die Priorität der Entdeckung für ihn in Anspruch nehmen. Der vorliegende Band ist ein laut redendes Zeugnis für diese Charaktereigentümlichkeit von Gauss, die man ja im Interesse der schnelleren Entwickelung der Wissenschaft bedauern kann, ja bedauern mufs, der man aber seine Bewunderung nicht versagen kann. Ein beträchtlicher Teil des Bandes betrifft Untersuchungen, über die Gauss bei seinen Lebzeiten nie etwas veröffentlicht hat; es ist etwas Grofses, dafs diese Dinge, die erst 45 Jahre nach seinem Tode ans Licht treten, auch jetzt noch keineswegs blofs historisches Interesse haben, sondern in manchen Punkten sogar Neues enthalten, trotz der gewaltigen Fortschritte, die die Wissenschaft inzwischen gemacht hat.

Soviel über den allgemeinen Eindruck, den man von dem Bande empfäugt. Jetzt noch einiges über seinen Inhalt im Einzelnen.

Die beiden ersten Abteilungen: „Arithmetik und Algebra“ und: „Analysis und Funktionentheorie“ (S. 1—117) sind von R. Fricke herausgegeben und enthalten Nachträge zu Bd. I—III der Werke. Von besonderem Interesse sind u. a. die Notizen über die kubischen und die biquadratischen Reste, die aus den Jahren 1804—1808 stammen und in denen man es nach dem Urteile des Herausgebers mit den ältesten Gaussischen Untersuchungen und damit überhaupt mit den ältesten Urkunden über höhere Reziprozitätsgesetze zu thun hat. Insbesondere ergieht sich, dafs Gauss allem Anscheine nach schon 1808 „den so folgenreichen Schritt der Einführung der ganzen komplexen Zahlen definitiv vollzogen hat.“ Ferner sind höchst merkwürdig eine Notiz über die Inversion des Integrals $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$, die Gauss schon am 9. September 1796 durchgeführt hat, eine vermutlich aus dem Jahr 1800 stammende Notiz über die Umkehrung von $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)(1-\mu xx)}}$, in der die Umkehrungsfunktion als Quotient zweier ganzer transzendenter Fuuktionen dargestellt wird, endlich die Fragmente zur Theorie der Modulfunktionen, wo schon das zu diesen Funktionen gehörige Netz von Kreisbogendreiecken auftritt. Aufserdem sind zu nennen: ein Beweis für die Irrationalität der Tangenten rationaler Bögen[1]), die schon erwähnte, bereits von Schering veröffentlichte Jugendarbeit, Beweise für einen Eulerschen Satz aus der Variationsrechnung, und für die Lagrangesche Reihe, eine sehr elegante und wohl auch heutzutage noch neue Darstellung für die Umkehrung einer Potenzreihe, endlich Untersuchungen über das „Pentagramma mirificum“.

Von A. Börsch und L. Krüger herausgegeben sind die Abteilungen: „Numerisches Rechnen“ und „Wahrscheinlichkeitsrechnung“, enthaltend Nachträge zu Bd. III und IV. Ausser der erwähnten Besprechung des Leonellischen Werkes und einer Reihe kleinerer Notizen sind das hauptsächlich Auszüge aus Briefen, in denen über die Geschichte und die Bedeutung der Methode der kleinsten Quadrate gesprochen wird.

Am umfangreichsten ist der von P. Stäckel[2]) herausgegebene geometrische Teil des Bandes (S. 159—452), der seinerseits in fünf Abteilungen zerfällt: „Grundlagen der Geometrie“, „Geometria situs“, „Aufgaben und Lehrsätze der elementaren Geometrie angehörig“, „Verwendung komplexer Gröfsen für die Geometrie“, „Theorie der krummen Flächen“.

Wir können jetzt Alles überblicken, was von Gaussens Ideen über die Grundlagen der Geometrie erhalten ist; dafs sich noch wesentlich Neues finden sollte, ist kaum zu erwarten. Zu den bereits bekannten Briefstellen ist eine ganze Anzahl bisher ungedruckter hinzugekommen, namentlich aber sind die Aufzeichnungen aus dem Nachlasse zum ersten Male der Allgemeinheit zugänglich gemacht. Ein nicht voreingenommener Leser wird aus dem hier gesammelten Materiale die zweifellose Überzeugung gewinnen, dafs Gauss früher als irgend ein anderer, um den äufsersten Termin zu nennen, jedenfalls vor dem

1) In der Anmerkung dazu, auf S. 29, wird gesagt, dafs der erste einwandfreie Beweis für diesen Satz von Legendre herrühre, während doch (vgl. Pringsheim, *Über die ersten Beweise der Irrationalität von e und π*; Sitzungsber. der Akad. d. Wiss zu München (Math. Cl.) 28, 1898, 325—337) die Ehre dafür Lambert zukommt. Es ist schade, dafs eine kritische Besprechung, die Gauss nach S. 29 über die in Betracht kommenden Untersuchungen von Lambert und Legendre aufgezeichnet hat, nicht mit abgedruckt worden ist.

2) Eine Notiz: „Allgemeinste Auflösung des Problems der Abwickelung der Flächen“ (S. 447—449) ist von J. Weingarten bearbeitet.

Jahre 1816, die nicht-euklidische Geometrie vollständig für sich ausgebildet hatte und sie auch analytisch beherrschte. Damit müssen wir zufrieden sein, denn so viel neues Material hier auch geboten wird, eine genaue Vorstellung von der Art, wie sich das alles allmählig bei GAUSS entwickelt hat, kann es uns doch nicht verschaffen, und auf viele Fragen, die man stellen kann, wird man wohl nie eine Antwort erhalten. Leider sind auch von dem, was GAUSS über die nicht-euklidische Geometrie gewufst hat, nur Bruchstücke auf uns gekommen. Im Jahre 1831 hatte GAUSS, wie er an SCHUMACHER und an W. BOLYAI schreibt, angefangen, einiges über die neue Geometrie aufzuschreiben, damit es doch nicht mit ihm unterginge. Er hörte aber damit auf, als er J. BOLYAIS *Appendix* erhielt. Das wenige was er damals schon zu Papier gebracht hatte, scheint uns auf S. 201—209 erhalten zu sein, es geht freilich nicht über die ersten Anfänge der Parallelentheorie und die Einführung des Grenzkreises, den GAUSS Trope nennt, hinaus. Sehr merkwürdig dagegen ist die Art, wie GAUSS die Kubierung der Tetraeder löst (S. 228 f., 232 f.), sie ist auch heutzutage noch neu. Aufserdem sei noch erwähnt, dafs GAUSS für die Gleichungen zwischen den Seiten und Winkeln eines rechtwinkligen Dreiecks eine Ableitung giebt, bei der er weiter nichts voraussetzt, als dafs für unendlich kleine Dreiecke die euklidische Geometrie gilt, und bei der er die sphärische und die LOBATSCHEFSKIJ-BOLYAIsche Geometrie beide umfafst.

Der Inhalt des übrigen geometrischen Teils ist zu verschiedenartig, als dafs ich hier auf Einzelheiten eingehen könnte. Ich begnüge mich daher mit der Erwähnung der überraschenden Thatsache, dafs GAUSS bereits vor RIEMANN die komplexe Variable $z = x + iy$ auf der Kugel gedeutet und die Drehungen der Kugel durch linear gebrochene Substitutionen in z dargestellt hat, ja dafs er bereits 1819 thatsächlich den Begriff der Quaternion, die er Mutationsskala nennt, und das zugehörige Multiplikationsgesetz, das er ausdrücklich als nicht kommutativ kennzeichnet, besessen hat (S. 354—362) Auch darf nicht übergangen werden, dafs der Abschnitt über krumme Flächen bemerkenswerte Aufschlüsse darüber giebt, wie GAUSS zu der Erkenntnis gelangt ist, dafs sich das Krümmungsmafs bei Biegung als Invariante verhält, und dafs darin ein 35 Seiten umfassender Aufsatz: „Neue allgemeine Untersuchungen über die krummen Flächen" enthalten ist, der aus dem Jahre 1825 stammt und der sich von den *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (1827) durch die Art der Behandlung und die Anordnung des Stoffes sehr wesentlich unterscheidet.

Leipzig im April 1901. FRIEDRICH ENGEL.

Berichtigung. In der Anzeige über das Werk von Pater KUGLER, welche der Unterzeichnete im ersten Hefte (S. 156—160) erstattete, ist eine irrtümliche Angabe enthalten, welche eine Richtigstellung erheischt. Der Autor wird nämlich nur als Ausleger einer ihm von anderer Seite dargebotenen Übertragung aus dem Keilschrift-Texte bezeichnet, während thatsächlich in P. STRASSMAIERS Kopie nur ein paar Wörter übersetzt waren, während die grofse Arbeit, zu übersetzen und den Sinn der Urschrift festzustellen, P. KUGLER selbst zufiel. Das hohe Verdienst des letzteren erhält durch diese Aufklärung noch eine wesentliche Vermehrung. Sogar für die Transkription lagen nur unzureichende Vorarbeiten vor. Die Zahlen 35^0 und $32\frac{1}{2}^0$ (S. 157 und 158) sind zu vertauschen.

München. S. GÜNTHER.

Neuerschienene Schriften.

Das Zeichen * bedeutet, dafs die betreffende Schrift der Redaktion nicht vorgelegen hat.

Autoren-Register.

Ames, 112.
Appell, 108.
Aronhold, 94.
Aubry, 71.
Bell, 6.
Berry, 16
Bessel, 86.
Birkenmajer, 42, 46
Bobynin, 4, 50, 87, 89.
Bolton, 52.
Boltzmann, 80.
Bolyai, 85.
Bosmans, 57, 59.
Boyer, 8.
Braunmühl, 12, 65, 66, 67.
Brocard, 13.
Brudzewo, 42.
Cantor, M., 5, 9.
Capelli, 108.
Carlini, 49
Chistoni, 73
Curtze, 38, 40, 44.
Darboux, 111.
Dini, 108.
Durán Loriga, 108
Eneström, 2, 10, 39, 48, 64, 69, 118.
Engel, 96.
Favaro, 53, 54, 55, 56.
Fink, 7.
Förster, 17.
Galdeano, 126.
Galilei, 54.
Gambioli, 78
Gauss, 84, 85.
Gilman, 112.
Geiser, 106.
Goldberg, Adeline, 34.
Gravelaar, 58
Guimarães, 77.
Gundermann, 11.
Günther, 75.
Hathaway, 127.
Hatzidakis, 123.
Heinrich, 63.
Hellmann, 18.
Helm, 113.
Heron, 28.
Hoppe, E., 43, 60.
Hultsch, 31.
Huygens, 62
Jahnke, 108.
Jordan, 108.
Klein, 83, 121.
Knoff, 29.
Korteweg, 97.
Krause, 108.
Kugler, 20.
Lampe, 94, 98, 109, 114, 128.
Lange, 90.
Laussedat, 14.
Lebon, 15.
Lewicky, 120.
Lévy, M., 103.
Lorenz, 110.
Loria, 3, 21, 108.
Mansion, 47, 106
Marre, 99.
Maurer, 106.
Milhaud, 25.
Muir, 79, 88.
Müller, Ad., 45.
Müller, Fel., 122.
Nix, 28.
Noether, 91
Obenrauch, 74.
Painlevé, 108.
Pascal, 102, 108.
Pesch, 30.
Picard, 76, 108.
Pick, 104.
Pietsker, 124.
Porro, 102.
Schmidt, Fr., 85.
Schmidt, M., 23.
Schmidt, W., 26, 28.
Simon, 27.
Sintzoff, 128.
Smith, 125.
Stäckel, 68, 85, 95, 119
Staigmüller, 22
Stark, 107.
Steinschneider, 41
Studnicka, 51.
Suter, 33, 35.
Tannery, 32, 36, 37.
Thirion, 24.
Timtchenko, 108
Vacca, 70, 72.
Van t'Hoff, 81.
Vincent, 19
Volkmann, 92
Wälsch, 117.
Weiss, 114.
Windelband, 106
Wirtinger, 116.
Wölffing, 105.
Woodward, 82.
Zeuthen, 61.

a) Zeitschriften. Allgemeines.

Abhandlungen zur Geschichte der Mathematischen Wissenschaften. Leipzig. 8°. [1
11 (1901).

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Herausgegeben von G. Eneström. Leipzig (Stockholm). 8°. [2
2_3 (1901) : 1. — [Recension des Doppelheftes 1_3 : 1—2:] Fiziko-matem. naouki 1_2, 1900, 148—155. — [Recension des Doppelheftes 1_3 : 3—4.] Zeitschr. für mathem. Unterr. 32, 1901, 35—37. (G. Wertheim.)

Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche pubblicato per cura di G. Loria. Torino (Genova). 8°. [3
1901 : 1.

Физико-математическія науки въ ходѣ ихъ развитія. Журналъ издаваемый В. В. Бобынинымъ. Москва. 8°. [4
1_2 : 5—6. — Die physisch-mathematischen Wissenschaften im Laufe ihrer Entwickelung. Zeitschrift herausgegeben von V. V. Bobynin

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik 1^2 (1894). [Recension oder kleine Bemerkungen:] L'enseignement mathém. 3, 1901, 61—62. (J. Boyer.) — Biblioth. Mathem 2_3, 1901, 143—144. (G. Vacca, G. Wertheim.) — 2^2 (1900) [Recension oder kleine Bemerkungen:] L'enseignement mathém 3, 1901, 62—64. (J. Boyer) — Biblioth. Mathem 2_3, 1901, 144—149. (G. Eneström, G. Wertheim, M. Curtze, P. Tannery, G. Vacca.) — 3^2 : 1—2 (1900—1901). [Recension oder kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem 2_3, 1901, 149—152, 154—156. (G. Vacca, G. Eneström.) [5

Ball, W. W. R., A short account of the history of mathematics. Third edition. London, Macmillan 1901. [6
8°, XXIV + 527 S. — [10 sh.]

Fink, K., A brief history of mathematics, translation by W. W. Beman and D. E. Smith (1900). [Recension:] Mathesis 1_3, 1901, 49. (P. M.) — Monatsh. für Mathem. 11, 1901; Lit.-Ber. 23. [7

Boyer, J., Histoire des mathématiques (1900). [Recension:] Americ. journ. of sc. 9_4, 1900, 234. — Revue génér. d. sc. 11, 1900, 610. — Philos. magazine 49, 1900, 176. — Science 13_2, 1901, 462—464. (G. B. Halsted.) [8

Cantor, M., Sur l'historiographie des mathématiques. [9
Congrès international des mathématiciens à Paris 1900, Comptes rendus. 19 S.

Eneström, G., Über litterarische und wissenschaftliche Geschichtsschreibung auf dem Gebiete der Mathematik. [10
Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, 1—4.

Gandermann, G., Die Zahlzeichen (1899). [Recension:] Deutsche Litteratura. 22, 1901, 566. [11

Braunmühl, A. von, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie. I (1900). [Recension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des questions scient., janvier 1901. 7 S. (H. Bosmans.) [12

Brocard, H., Notes de bibliographie des courbes géométriques. I, II (1897, 1899). [Recension:] Jornal de sc. mathem. 14, 1900, 86—88. (G. T.) [13

Laussedat, A., Recherches sur les instruments, les méthodes et le dessin topographique. I (1898). [Recension:] Wiadomości matem. 5, 1901, 111—115. (F. Kucharzewski.) [14

Lebon, E., Histoire abrégée de l'astronomie (1899). [Recension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1901, 9—10. (G. L.) — Nouv. ann. de mathém. 1_4, 1901, 139—143. (L. Gérard.) [15

Berry, A., Short history of astronomy (1899). [Recension:] *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 7_2, 1901, 187—188. (E. W. Brown.) [16

Förster, W., Die Wandlungen des astronomischen Weltbildes bis zur Gegenwart (1899). [Recension:] Deutsche Litteratura. 22, 1901, 753. [17

Hellmann, G., Meteorologische Beobachtungen vom XIV. bis XVII. Jahrhundert. Mit einer Einleitung. Berlin, Asher 1901. [18
4°, 78 + (5) + 128 S. — [18 *M.*]. — Die Einleitung enthält eine Übersicht der Entwickelung der meteorologischen Beobachtungen bis zum Ende des XVII. Jahrhunderts.

Vincent, J., Aperçu de l'histoire de la météorologie en Belgique. [19
Bruxelles, Observatoire, Annuaire météor. 1901, 57—108.

b) Geschichte des Altertums.

Kugler, F. X., Die babylonische Mondrechnung (1900). [Recension:] Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, 156—160, 369. (S. Günther.) [20

Loria, G., Le scienze esatte nell' antica Grecia. III, IV (1901). [Recension:] El progreso matem. 2_2, 1900, 476—477. [21

Staigmüller, H., Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften im klassischen Altertume (1899). [Recension:] Deutsche Litteraturz. 22, 1901, 302. [22

Schmidt, M. C. P., Realistische Chrestomathie aus der Litteratur des klassischen Altertums. Band 1, 2. Leipzig, Dürrsche Buchhandlung 1900—1901. [23
8°, 1: VIII + 128 S. + 12 Taf. — [2,40 *M.*] — 2: VI + 170 S. + 2 Taf. — [3 *M.*] — Enthält Bruchstücke aus den Schriften griechischer Mathematiker und Astronomen. — [Recension:] Monatsh für Mathem. 11, 1901; Lit.-Ber. 23—24.

Thirion, J., Pour l'astronomie grecque. [24
Bruxelles, Soc. scient., Revue des questions scient. 15_2, 1899, 5—47, 435—475; 16_2, 1899, 111—158.

Milhaud, G., Les philosophes géomètres de la Grèce (1900). [Recension:] Nouv. ann. de mathém. 1_4, 1901, 93—94 [25

Schmidt, W., Zur Geschichte der Isoperimetrie im Altertume. [26
Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, 5—8.

Simon, M., Euclid und die sechs planimetrischen Bücher. Mit Benutzung der Textausgabe von Heiberg. [27
Abhandl. zur Gesch. der mathem. Wissensc 11, 1901. VI + (1) + 141 S. — [Recension:] Zeitschr. für mathem. Unterr. 32, 1901, 109—114. (G. Wertheim.)

Heronis Alexandrini Opera quae supersunt omnia. Vol. II, fasc. I. Herons von Alexandria Mechanik und Katoptrik, herausgegeben von L. Nix und Wilh. Schmidt. Leipzig, Teubner 1901. [28
8°, XLIV + 415 S. + Facsim. — [8 *M.*] — [Recension:] Deutsche Litteraturz. 22, 1901, 464—467. (J. L. Heiberg.) — Naturwiss. Rundschau 16, 1901, 229. (A. Br.) — Zeitschr. für mathem. Unterr. 32, 1901, 206—208. (G. Wertheim.)

Knaaff, F., Die Physik des Heron von Alexandria (1900). [Recension:] Zeitschr. für mathem. Unterr. 32, 1901, 126—127. (Stegemann.) — Vjestnik elem. matem. 25, 1901, 179—182. (D. Schorr.) [29

Pesch, J. G. van, De Procli fontibus (1900). [Recension:] Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, 160—161. (M. Cantor.) [30

Hultsch, Fr., Drei Exkurse. [31
Procli *diadochi in Platonis rem publicam commentarii ed.* Gul. Kroll. II (Leipzig 1901), S. 384—413. — I: Über eine gewisse Anzahl von Sonnenjahren. II: Über Seiten- und Diametral-Zahlen. III: Über die geometrische Zahl Platons.

Tannery, P., Le philosophe Aganis est-il identique à Geminus? [32
Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, 9—11.

c) Geschichte des Mittelalters.

Suter, H., Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke (1900). [Recension:] Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, 161—164. (C. de Vaux.) [33

Goldberg, Adeline, Die jüdischen Mathematiker und die jüdischen anonymen mathematischen Schriften alphabetisch geordnet mit Angabe ihrer Zeit, zugleich ein Index zu M. Steinschneiders Mathematik bei den Juden. Frankfurt a./M. 1901. [34
8°, 12 S.

Suter, H., Das Rechenbuch des Abu Zakarîja el-Hassâr. [35
Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, 12—40.

Tannery, P., Sur la „Practica geometriae Hugonis". [36
Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, 41—44.

Tannery, P., Sur le „Liber augmenti et diminutionis" compilé par Abraham. [37
Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, 45—47.

Curtze, M., Die Dunkelkammer. Eine Untersuchung über die Vorgeschichte derselben. [38
Himmel und Erde (Berlin) 13, 1901, 225—236. — Zum grössten Teil aus einer Schrift von Levi ben Gerson († 1344). — [Recension:] Beiblätter der Ann. der Physik 1901, 217—218. (Gd.)

Eneström, G., Sur un traité d'algèbre du moyen âge en langue hébraïque. [39
Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, 152. — Anfrage.

Curtze, M., Zur Geschichte der Kreismessung und Kreisteilung im fünfzehnten Jahrhundert. [40
Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, 48—57.

Steinschneider, M., Die mathematischen

Wissenschaften bei den Juden 1441 —1500. [41
Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, 58—76.

Birkenmejer, L. A., Commentariolum super Theoricas novas planetarum Georgii Purbachii per Mag. Albertum de Brudzewo (1900). [Recension:] Wiadomości matem. 5, 1901, 94—98. (R. Merecki.) [42

d) Geschichte der neueren Zeit.

Hoppe, E., Zur Geschichte der Fernwirkung. Hamburg 1901. [43
4°, (2) + 26 S. — Wissenschaftliche Beilage zum Jahresbericht des Wilhelms-Gymnasiums in Hamburg.

Curtze, M., Nicolaus Coppernicus. Eine biographische Skizze (1899). [Recension:] Deutsche Litteraturz. 22, 1901, 301. [44

Müller, Ad., Nicolaus Copernicus der Altmeister der neueren Astronomie (1898). [Recension:] Deutsche Litteraturz. 22, 1901, 1260. [45

Birkenmajer, L. A., Mikołaj Kopernik. 1 (1900). [Recension:] Wiadomości matem. 5, 1901, 92—94. (S. D.) [46

Mansion, P., Sur deux manuscrits du livre des Révolutions de Copernic. [47
Bruxelles, Soc. scient., Annales 24, 1900, 90—91.

Eneström, G., Sur l'algèbre de Robert Recorde (1556). [48
Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, 152. — Anfrage.

Carlini, L., Nota sulle origini del calcolo della probabilità. [49
Il Pitagora 7, 1901, 65—66. — Über eine Schrift von F. Pavesacosa (1558).

Бобынинъ, В. В., Симонъ Стевинъ. Очеркъ жизни и дѣятельности. [50
Fiziko-matem. naouki 1_2, 1901, 167—180. — Bobynin, V. V., Simon Stevin, sein Leben und seine Werke.

Stadalčke, F. J., Prager Tychoniana (1901). [Recension:] Bullet. d. sc. mathém. 24_2, 1900, 237—238. — Wiadomości matem. 5, 1901, 106—107. (S. D.) [51

Bolton, H. C., Evolution of the thermometer 1592—1743. Easton 1900. [52
8°, 98 S. — [Recension:] Beiblätter zu den Ann. d. Phys. 25, 1901, 482. (Gd.)

Favaro, A., Delle Meccaniche lette 1594 da Galilei (1899). [Recension:] Deutsche Litteraturz. 22, 1901, 568. [53

Le opere di Galileo Galilei. Vol. X (1900). [Bericht:] *Venezia*, Istituto Veneto, Atti 60, 1901, 363—370. (A. Favaro.) [54

Favaro, A., Intorno ai cannocchiali costruiti ed usati da Galileo Galilei. [55
Venezia, Istituto Veneto, Atti 60, 1901, 317—342 + 2 Taf.

Favaro, A., Intorno alla apparenza di Saturno osservata da Galileo Galilei nell' agosto dell' anno 1616. [56
Venezia, Istituto Veneto, Atti 60, 1901, 415—432.

Bosmans, H., Le traité des sinus de Michiel Coignet. [57
Bruxelles, Soc. scient., Annales 25:2, 1901, 91—170.

Gravelaar, N. L. W. A., John Napiers werken (1899). [Recension:] Deutsche Litteraturz. 22, 1901, 301. [58

Bosmans, H., Le degré du méridien mesuré par Willebrord Snellius (1900). [Recension:] *Amsterdam*, Wisk. genoots., Nieuw Archief 5_2, 1901, 99—101. (S. Kruger.) [59

Hoppe, E., Notiz zur Geschichte der Logarithmentafeln. [60
Hamburg, Mathem. Gesellsch., Mittheilungen 4, 1901, 52—56.

Zeuthen, H. G., Historisk og geometrisk Studie af Descartes Tangentkonstruktioner. [61
Nyt Tidsskr. for Mathem. 2, 1900, B: 49—58.

Œuvres complètes de Christiaan Huygens publiées par la société hollandaise des sciences. Tome VIII (1899). [Recension:] Journ. des savants 1899, 596—608. [62

Heinrich, G., James Gregorys „Vera circuli et hyperbolae quadratura". [63
Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, 77—85.

Eneström, G., John Caswell (1685). [64
Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, 152—153. — Anfrage.

Braunmühl, A. von, Historische Untersuchung der ersten Arbeiten über Interpolation. [65
Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, 86—96.

Braunmühl, A. von, Zur Geschichte der Entstehung des sogenannten Moivreschen Satzes. [66
Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, 97—102.

Braunmühl, A. von, Zur Geschichte der Trigonometrie im achtzehnten Jahrhundert. [67
Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, 103—110.

Stäckel, P., Beiträge zur Geschichte der Funktionentheorie im achtzehnten Jahrhundert. [68
Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, 111—121.

Eneström, G., Bemerkung über die „formula exponentialis replicata". [69
Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, 153. — Antwort auf eine Anfrage.

Vacca, G., Sur les manuscrits de J. Stirling. [70
Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, 153. — Anfrage.

Aubry, A., Sur une identité d'Euler. [71
El progreso matem. 2_2, 1900, 401—413. — Zum größten Teil historischen Inhalts.

Vacca, G., Sui primi anni di Luigi Lagrange. [72
Bollett. di bibliogr. d. sc. matem 1901, 1—4.

Chistoni, C., La Fotometria e la Pirometria del Lambert rispetto agli studi attinometrici. [73
Modena, Soc. dei naturalisti, Atti 1_3, 1899, 66—88.

Obenrausch, F. J., Geschichte der darstellenden und projectiven Geometrie (1897). [Recension:] Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, 164—168. (R. Haussner.) [74

Günther, S., Geschichte der anorganischen Naturwissenschaften im neunzehnten Jahrhundert. Berlin, Bondi 1901. [75
8°, XIX + 984 S. — [Auszug: „Die Mathematik im neunzehnten Jahrhundert":] Zeitschr für mathem. Unterr. 32, 1901, 227—233. — [Recension:] Beiblätter zu den Ann. d. Phys. 25, 1901, 479—481. (Gn.)

Picard, E., Sur le développement, depuis un siècle, de quelques théories fondamentales dans l'analyse mathématique (1900). [Recension:] Bullet. d. sc. mathém. 24_2, 1900, 281—282. [76

Guimarães, R., Les mathématiques en Portugal au XIXe siècle (1900). [Recension:] Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, 168—169. (G. Eneström.) — Jornal de sc. mathem. 14, 1900, 93—94. (G. T.) [77

Gambioli, D., Memoria bibliografica sull' ultimo teorema di Fermat. [78
Periodico di matem. 16, 1901, 145—192, 17, 1901, 48—50.

Muir, Th., The theory of alternants in the historical order of its developement up to 1841. [79
Edinburgh, Royal soc., Proceedings 23_2, 1899/1900, 93—132.

Boltzmann, L., The recent developement of method in theoretical physics. [80
The monist (Chicago) 9, 1901, 226—257. — Übersetzung (vgl. Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, 529).

Van't Hoff, J. H., Über die Entwickelung der exakten Naturwissenschaften im 19. Jahrhundert (1900). [Résumé:] Science (New York) 13_2, 1901, 338—342. (H. C. Jones.) [81

Woodward, R. S., Postępy matematyki stosowanej w XIX stuleciu. [82
Wiadomości matem. 5, 1901, 17—51. — Übersetzung aus dem Englischen (vgl. Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, 292).

Klein, F., Über den Stand der Herausgabe von Gauss' Werken. Dritter Bericht. [83
Göttingen, Gesellsch. d. Wissensch., Nachrichten 1900; Geschäftl. Mitt. 7—9. — [Wieder abgedruckt.] Mathem. Ann. 55, 1901, 136—138.

Gauss, C. F., Werke. Band 8 (1900). [Recension:] Bullet. d. sc. mathém. 24_2, 1900, 269—280. (G. D.) — Nature 63, 1901, Suppl. VIII—IX. (G. B. M.) [84

Briefwechsel zwischen Carl Friedrich Gauss und Wolfgang Bolyai. Herausgegeben von Fr. Schmidt und P. Stäckel (1899). [Recension:] L'enseignement mathém. 3, 1901, 140—142. (H. Fehr.) [85

Bessel, F. W., Zwölf Briefe an Olbers. [86
Berlin, Akad. d. Wissensch., Sitzungsber. 1900, 745—762.

Бобынинъ, В. В., Баронъ Плана. Очеркъ его профессорской и учено-литературной дѣятельности. [87
Fiziko-matem. naouki 1_2, 1899, 14—25, 67—70 — Bobynin, V. V., Baron Plana, Übersicht über sein Wirken als Lehrer und Wissenschaftsmann.

Muir, Th., The theory of skew determinants and Pfaffians and the historical order of its developement up to 1857. [88
Edinburgh, Royal soc., Proceedings 23_2, 1899/1900, 181—187.

Бобынинъ, В. В., Первый русскій математическій журналъ. [89
Fiziko-matem. naouki 1_2, 1899/1900, 35—54, 71—75, 100—111, 138—147, 161—166. — Bobynin, V. V., Die erste russische mathematische Zeitschrift.

Lange, J., Jacob Steiners Lebensjahre in Berlin 1821—1863 (1900). [Recension:] Deutsche Litteraturz. 22, 1901, 365. [90

Noether, M., Zur Erinnerung an Karl Georg Christian von Staudt. Erlangen 1901. [91
8°, 24 S. — [0, 80 *M*] — Aus der Festschrift der Universität Erlangen zur Feier des 80. Geburtstages des Prinzregenten.

Volkmann, P., Erinnerungen an Franz Neumann (Nachtrag). [92
Königsberg, Physik. Gesellsch., Abhandl. 40, 1899, 41—51.

[Porträt von G. Bellavitis nebst einigen biographischen Notizen.] [93
Nouv. ann. de mathém. 1_4, 1901 (cahier de mars).

Lampe, E., Auszüge aus zwei Briefen an F. Richelot von S. Aronhold. [94
Arch. der Mathem. 1_3, 1901, 38—43.

Stäckel, P., Karl Peterson (1828—1881). [95
Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, 122—132. Mit Porträt.

Engel, F., Sophus Lie (Biblioth. Mathem. 1900). [Recension:] Mathesis 1_3, 1901, 76. — Monatsh. für Mathem. 11, 1901; Lit.-Ber. 28. [96

Korteweg, D. J., Overzicht der door A. N. Godefroy nagelaten handschriften en teekningen over kromme lijnen en gebogen oppervlakken. [97
Amsterdam, Wisk. Genoots., Nieuw Archief 5_2, 1901, 1—32.

Lampe, E., Die reine Mathematik in den Jahren 1884—1899. Nebst Aktenstücken zum Leben von S. A. Aronhold (1899). [Recension:] Deutsche Litteraturz. 22, 1901, 566. — Jornal de sc. mathem. 14, 1900, 94. (G. T.) [98

Marre, A., Des noms des nombres en usage dans Madagascar, aux Philippines, dans la Malaisie et dans la Polynésie. [99
Torino, Accad. d. sc., Atti 34, 1899, 447—458.

e) Nekrologe.

Bruno **Abdank-Abakanowitz** (1852—1900). [100
Wiadomości matem. 5, 1901, 137—138. (S. D.)

Valentin **Balbin** (?—1901). [101
L'enseignement mathém. 3, 1901, 222—223.

Eugenio **Beltrami** (1835—1900). [102
Milano, Istituto Lombardo, Rendiconti 34_2, 1901, 57—108. (E. Pascal.)
Città di Cremona, Solenne commemorazione del professore EUGENIO BELTRAMI. Cremona 1900. 8°, 31 S. + Porträt. (Rede von F. Porro, S. 7—31).

Joseph Louis François **Bertrand** (1822—1900). [103
Journ. d. savants 1900, 257—259, 312—315. — Bullet. d. sc. mathém. 24_2, 1900, 69—75. (Abdruck des Nekrologes von M. Lévy.)

Karl **Bobek** (1855—1899). [104
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 9 : 1, 1901, 27—33 [mit Porträt und Schriftverzeichnis]. (G. Pick, W. Weiss.)

Otto **Böklen** (1821—1900). [105
Stuttgart, Mathem. Verein., Mitteil. 3_2, 1901, 1—16 [mit Porträt und Schriftverzeichnis]. (E. Wölffing.)

Elwin Bruno **Christoffel** (1829—1900). [106
Mathem. Ann. 54, 1901, 329—346 [mit Schriftverzeichnis]. (C. F. Geiser, L. Maurer, W. Windelband.) — Wiadomości matem. 5, 1901, 135—136. (S. D.)

George Francis **Fitz Gerald** (1851—1901). [107
Naturwiss. Rundschau 16, 1901, 230—231 (J. Stark.)

Charles **Hermite** (1822—1901). [108
Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient. 19_2, 1901, 353—396 (P. Mansion.) — *Dresden*, Gesellsch. Isis, Abhandl. 1901 13 S. (M. Krause.) — *Milano*, Istituto Lombardo, Rendiconti 34_2, 1901, 171—175. (E. Pascal.) — *Napoli*, Accad. d. sc., Rendiconto 7_2, 1901, 53—55. (A. Capelli.) — *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 7_2, 1901, 236, 278—282. (Übersetzung des Nekrologes von C. Jordan.) — *Palermo*, Circolo matem., Rendiconti 15, 1901, 132—155. (Abdruck des Nekrologes von E. Picard.) — *Paris*, Acad. d. sc., Comptes rendus 132, 1901, 101—105. (C. Jordan.) *Paris*, École normale, Annales 18_2, 1901, 9—34 (E. Picard.) — *Roma*, Accad. d. Lincei, Rendiconti 10_5 : 1, 1901, 84—88. (Dini.) Arch. der Mathem. 1_3, 1901, 184—186. (E. Jahnke.) — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1901, 16—31, 59—60 (Übersetzung des Nekrologes von C. Jordan mit hinzugefügtem Schriftverzeichnis von G. Loria.) — La nature (Paris) 29, 1901, 145—146. (Painlevé.) — Le matematiche pure ed applic. 1, 1901, 2—5 (Übersetzung des Nekrologes von C. Jordan); 30—32 (J. J. Durán Loriga). — Nature 63, 1901, 350—351. (G. H. B.) — Periodico di matem. $\mathbf{3}_2$, 1901, 271—272. — Revue génér. d. sc. 12, 1901, 109—110 (P. Appell.) Wiadomości matem. 5, 1901, 132—135 [mit Porträt]. (S. D.) — Vjestnik elem. matem. 25, 1901, 97.—102 (I. Timtchenko), 175—179.

Ernst Reinhold Eduard **Hoppe** (1816—1900). [109
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 9 : 1, 1901, 33—58 (Abdruck des Nekrologes von E. Lampe mit hinzugefügtem Porträt und Schriftverzeichnis). — Arch. der Mathem. 1_3, 1101, 4—19 [mit Porträt]. (Abdruck des Nekrologes von E. Lampe.) —Wiadomości matem. 5, 1901, 136—137.

Robert Heinrich **Hoppe** (1857—1899). [110
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 9 : 1, 1901, 59. (F. Lorenz.)

Théodore Florentin **Moutard** (1827—1901). [111
Paris, Acad. d. sc., Comptes rendus 132, 1901, 614—616 (G. Darboux.) — L'enseignement mathém. 3, 1901, 221—222 [mit Porträt].

Henry Augustus **Rowland** (1848—1901). [112
Nature 64, 1901, 16—17. (R. T. G.) — Science (New York) 13_2, 1901, 681—684 (J. S. Ames); 801—803 [mit Porträt] (D. C. Gilman).

Oskar **Schlömilch** (1823—1901). [113
Zeitschr. für Mathem. 46, 1901, 1—7 [mit Porträt]. (G. Helm.) — Zeitschr. für mathem. Unterr. 32, 1901, 157—158.

Bernhard **Schwalbe** (1841—1901). [114
Berlin, Deutsche physikal. Gesellsch., Verhandl. 3, 1901, 58—74. (E. Lampe.) — L'enseignement mathém. 3, 1901, 222. — Naturwiss. Rundschau 16, 1901, 242—247. (Abdruck des Nekrologes von E. Lampe.)

Eugène **Vicaire** (1839—1901). [115
L'enseignement mathém. 3, 1901, 127.

Eduard **Wiltheiss** (1855—1900). [116
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 9 : 1, 1901, 59—63 [mit Porträt und Schriftverzeichnis]. (W. Wirtinger.)

Karl **Zelbr** (1854—1900). [117
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 9 : 1, 1901, 63—64. (E. Wälsch.)

f) Aktuelle Fragen.

Eneström, G., Über die von der „Royal Society" geplante mathematische Jahresbibliographie (Biblioth. Mathem. 1900). [Résumé:] Wiadomości matem. 5, 1901, 127—129. [118

Stäckel, P., Wie sollen die Titel der mathematischen Zeitschriften abgekürzt werden? [119
Biblioth. Mathem. $\mathbf{2}_1$, 1901, 133—138.

***Lewicky, Wl.**, [Über die Klassifikation der mathematischen Wissenschaften.] [120
Lemberg, [Ševčenko-Gesellsch., Abhandl.] 3, 1900, 1—16. — In kleinrussischer Sprache.

Klein, F., Über die Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit besonderer Rücksicht auf den Band IV derselben (Mechanik). [121
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 9 : 1, 1901, 67—74.

Müller, Felix, Vocabulaire mathématique français-allemand et allemand-français. I (1900) [Recension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1901, 13. (G. L.) — Fiziko-matem. naouki 1_2, 1901, 181—184. — L'enseignement mathém. 3, 1901, 142—143. (H. Fehr.) — Monatsh. für Mathem. 12, 1901; Lit.-Ber. 17. — Zeitschrift für mathem. Unterr. 32, 1901, 117—120. (W. Ahrens.) [122

Hatzidakis, N. J., Sur quelques points de la terminologie mathématique. [123
Biblioth. Mathem. $\mathbf{2}_2$, 1901, 139—140.

Pietzker, F., L'enseignement mathématique en Allemagne pendant le XIXe siècle. [124
L'enseignement mathém. 3, 1901, 2—25, 77—97.

Smith, D. E., L'enseignement des mathématiques aux Etats Unies. [125
L'enseignement mathém. 3, 1901, 157—169.

Galdeano, Z. G. de, Estudios de critica y pedagogia matemáticas. Zaragoza 1900. [126
8°, 151 + (1) S. — [4 pes.]

Hathaway, A. S., Pure mathematics for engineering students. [127
New York, Americ. mathem. soc., Bulletin 7_2, 1901, 266—271.

[Der internationale Mathematiker-Kongreſs in Paris 1900.] [128
Fiziko-matem. naouki 1_2, 1900, 129—137. (D. Sintzoff.) — Vjestnik elem. matem. 25, 1901, 49—56. (Abdruck des Berichtes von D. Sintzoff.) — Zeitschr. für mathem. Unterr. 32, 1901, 146—154. (Abdruck des Berichtes von E. Lampe in der Bibliotheca Mathematica.)

Congrès international d'histoire des sciences à Paris 1900. [129
Biblioth. Mathem. $\mathbf{2}_2$, 1901, 141—143.

Wissenschaftliche Chronik.

Ernennungen.

— Prof. E. A. Engler an der Universität in St. Louis zum Presidenten des „Worcester polytechnic institute".

— Dr. J. A. Gmeiner zum Professor der Mathematik an der deutschen Universität in Prag.

— Dr. H. W. Kuhn an der „Cornell University" (Ithaca) zum Professor der Mathematik an der Universität von Ohio.

— Dr. J. Maclay zum Professor der Mathematik an der „Columbia University" (New York).

— Miss Helen Merrill zum Professor der Mathematik am „Wellesley College".

— Dr. G. A. Miller an der „Cornell University" (Ithaca) zum Professor der Mathematik an der "Leland Stanford University".

— Dr. F. Montesser zum Professor der Mathematik an der „Columbia University" (New York).

— Prof. F. Porro in Turin zum Professor der Geodäsie und Astronomie an der Universität in Genua.

— Prof. D. E. Smith in Brockport zum Professor der Mathematik am „Teachers College" (Columbia University) in New York.

Todesfälle.

— Valentin Balbin, Professor der Mathematik an der Universität in Buenos-Ayres, gestorben daselbst den 18. Januar 1901.

— Alexander Fredrik Berger, Privatdocent an der Universität in Upsala, geboren in Nysund (Schweden) den 30. Juni 1844, gestorben in Upsala den 9. Juni 1901.

— John Thomas Duffield, Professor der Mathematik an der Universität in Princeton, geboren in Pennsylvania im Jahre 1823, gestorben in Princeton 1901.

— Peter Helmling, früher Professor der Mathematik an der Universität in Dorpat, geboren in Erbach (Hessen-Darmstadt) den 9. September 1817, gestorben in Reval 1901.

— Ernest de Jonquières, Vice-Admiral, geboren in Carpentras den 3. Juli 1820, gestorben in Monans-Sartoux bei Grasse den 12. August 1901.

— Charles Macdonald, Professor der Mathematik am „Dalhousie College" in Halifax (Canada), geboren in Gananoque (Canada) den 26. Januar 1837, gestorben in Halifax den 10. März 1901.

— George Francis FitzGerald, Professor der Physik an der Universität in Dublin, geboren in Dublin den 3. August 1851, gestorben in Dublin den 21. Februar 1901.

— Théodore Florentin Moutard, emeritierter Professor der Mathematik an der „Ecole des mines" in Paris, geboren in Soultz den 27. Juli 1827, gestorben in Paris den 13. März 1901.

— Peter Pokrowskij, Professor der Mathematik an der Universität in Kiew, gestorben in Kiew den 14. Februar 1901, 44 Jahre alt.

— John Minot Rice, emeritierter Professor der Mathematik an der „Naval academy" in Annapolis, geboren in Northborough den 13. März 1833, gestorben in Northborough den 2. März 1901.

— Henry Augustus Rowland, Professor der Physik an der „Johns Hopkins university" in Baltimore, geboren in Honesdale den 27. November 1848, gestorben in Baltimore den 16. April 1901.

— Franz Schmidt, Architekt in Budapest, der unermüdliche Bolyai-Forscher, gestorben in Budapest den 7. März 1901, 74 Jahre alt.

— Georg Bernhard Schwalbe, Direktor des Dorotheenstädtischen Realgymnasiums in Berlin, geboren in Quedlinburg den 23. Oktober 1841, gestorben in Berlin den 31. März 1901.

— George Pratt Starkweather, Professor der Mechanik an der „Yale University“ in New Haven, gestorben in New Haven den 21. März 1901, 28 Jahre alt.

— Peter Guthrie Tait, Professor der Physik an der Universität in Edinburg, geboren in Dalkeith bei Edinburg den 28. April 1831, gestorben in Edinburg den 4. Juli 1901.

— Eugène Vicaire, Professor an der „Ecole supérieure des mines“ in Paris, geboren in Ambérien den 28. April 1839, gestorben in Paris den 18. Januar 1901.

Mathematisch-litterarische Arbeiten in Vorbereitung.

— Prof. E. Wölffing in Stuttgart beabsichtigt ein Verzeichnis der nicht-periodischen Litteratur auf dem Gebiete der Mathematik und Mechanik herauszugeben. Das Verzeichnis, das gegen 16000 Titel umfassen wird, soll etwa 400 alphabetisch geordnete Stichwörter enthalten, unter welche die Titel gruppiert werden sollen. Voraussichtlich wird die Arbeit am Ende dieses Jahres fertig sein.

— Der vierte Band von Poggendorffs *Biographisch-litterarischem Wörterbuch*, der die Jahre 1884—1900 umfassen wird, ist jetzt in Vorbereitung. Ebenso wie der dritte Band, wird auch dieser von Prof. A. von Oettingen in Leipzig redigiert werden und in 15—20 Lieferungen erscheinen.

Mathematisch-historische Vorlesungen.

— Prof. P. Stäckel in Kiel hat im Sommersemester 1901 eine einstündige Vorlesung über Geschichte der Mathematik seit der Renaissance (zusammen 12 Vorlesungen) gehalten. Es wurde eine Übersicht über die Entwicklung der einzelnen mathematischen Disziplinen gegeben und zwar der Reihe nach behandelt: Algebra, Zahlentheorie, Differential- und Integralrechnung bei Leibniz und Newton, weitere Ausbildung bei Euler, Funktionentheorie, partielle Differentialgleichungen, neuere Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, analytische Geometrie, projektive Geometrie, Differentialgeometrie, Untersuchungen über die Grundlagen der Arithmetik und der Geometrie, angewandte Mathematik.

— Prof. A. Macfarlane has delivered this year (April 12—23) at „Leight university“ a course of six lectures on British mathematicians of the nineteenth century (G. Peacock, A. de Morgan, W. R. Hamilton, G. Boole, A. Cayley, W. K. Clifford).

Gekrönte Preisschriften.

— *Accademia delle scienze di Napoli.* Un prix a été décerné en 1900 à M. G. Torelli pour un mémoire sur la détermination de la totalité des nombres premiers inférieurs à une limite donnée.

Preisfragen gelehrter Gesellschaften.

— *Académie de Belgique à Bruxelles.* Concours pour l'année 1902. On demande une contribution à l'étude algébrique et géométrique des formes n-linéaires, n étant plus grand que 3.

— *Accademia delle scienze di Napoli* Concorso dell' anno 1901. Portare qualche contributo notevole alla teoria invariantiva della forma ternaria biquadratica, preferibilmente per quanto riguarda le varie condizioni di spezzamento in forme inferiori.

Vermischtes.

— Un nouveau journal mensuel de mathématiques vient d'être fondé par M Ch. Alasia à Oristano (Sardaigne) avec le titre: Le matematiche pure ed applicate. Il publiera en premier lieu des articles se rapportant aux applications des mathématiques supérieures et élémentaires. Chaque cahier contiendra 24 pages in-8°.

— Avec le numéro de décembre 1900 le journal El progreso matematico publié à Zaragoza par M. Z. G. de Galdeano, a cessé de paraître. Le journal a été fondé en 1891, et il en a été publié en tout 7 années (1891—1895, 1899—1900).

Physikalisches und Technisches bei Philon von Byzanz.

Von WILHELM SCHMIDT in Helmstedt.

PHILONS Lebenszeit steht nicht fest, sie wird aber mit einiger Wahrscheinlichkeit in die 2. Hälfte des 3. Jahrhunderts v. Chr. gesetzt. Jedenfalls hat er vor VITRUV und HERON, aber nach KTESIBIOS gelebt; vielleicht ist er ein Zeitgenosse des APOLLONIOS. PHILON verfaſste, nachdem er sich in Alexandrien und Rhodos im Verkehr mit Architekten und Mechanikern (τεχνῖται) noch weiter ausgebildet hatte, eine umfangreiche 'Mechanische Sammlung' (*Μηχανικὴ σύνταξις*), von der uns nur ein kleiner Teil erhalten ist. Verloren sind das erste Buch mit den einleitenden Abschnitten (S. 56, 12 *τῷ περὶ τῆς εἰσαγωγῆς βιβλίῳ*) bis auf die bei EUTOKIOS erhaltene, der HERONischen ähnliche Lösung des Delischen Problems (S. 51, 51 *κατὰ τὸν τοῦ κύβου διπλασιασμόν* 'Würfelverdoppelung'[1]) das zweite über die Hebellehre (*Μοχλικά*), das dritte über den Hafenbau (*Λιμενοποιϊκά*) und das Buch über die Automaten. Von den letzten Büchern über die Verteidigung und Belagerung der Städte u. a. haben wir nur wenige Excerpte, die in den Ausgaben als sog. 5. Buch vereinigt sind. Dagegen ist vollständig erhalten das 4. Buch über den Geschützbau (*Βελοποιϊκά*). Von dem ursprünglichen 5. Buche, welches vermutlich die Pneumatik enthielt, waren bisher nur Fragmente in einer lateinischen Übersetzung bekannt (s. HERON. *Op.* I, 459 ff). Dann wies Herr CARRA DE VAUX in der Bibliotheca Mathematica 1_3, 1900, S. 28 ff. aus Oxforder Handschriften einige Luftdruckwerke PHILONS nach und hat jetzt in einer Handschrift der Hagia Sophia (3713?) die Existenz der vollständigen PHILONischen Pneumatik in arabischer Übersetzung festgestellt (vgl. Biblioth. Mathem. a. a. O. S. 35). Die Identität der arabischen Schrift mit PHILOS griechischer Pneumatik steht nach brieflicher Mitteilung CARRAS DE VAUX jetzt auſser Zweifel, weil die Konstantinopeler Hs. in ihrem ersten Teile auch die bisher bereits bekannten Abschnitte der PHILONischen Pneumatik enthält. Es ist das eine erfreuliche Bereicherung unserer Kenntnisse, und wir müssen DE VAUX wie schon für

1) Die zu Grunde liegende Figur wird ohne Beweis S. 52, 1—27 von PHILON erläutert. Vgl. auch Jahresber. f. Altertumswiss. 108: I, 1901, S. 94.

die Heronische Mechanik, auch für diese Entdeckung dankbar sein, nicht minder aber der Teubnerschen Verlagsbuchhandlung, dafs sie sich entschlossen hat, uns das neue Werk in arabisch-französischer Ausgabe in der „Bibliotheca Teubneriana“ zugänglich zu machen.

Es stehen aher auch im vierten Buche eine Anzahl physikalischer Angaben, die von Interesse und noch nicht allgemein bekannt sein dürften. Denn die Pariser Ausgabe des Philon in den *Veteres mathematici* (1693) ist durchaus unhrauchhar, Köchly hat uns den Text freilich in seinen Kriegsschriftstellern (1853) näher gebracht, aber wesentliche Fortschritte in der Textgestaltung weist erst die Ausgabe der *Mechanica syntaxis* von R. Schöne (1893) auf. Diese liegt daher den folgenden Notizen zu Grunde.

In das Kapitel der praktischen Anwendung der *Lehre vom Hebel* gehören die Vorschriften, welche Philo *Mech. synt.* IV, S. 59, 16 ff. gieht: 'Da nämlich die gröfseren Kreise über die kleineren das Übergewicht haben, welche um denselben Mittelpunkt liegen, wie wir in der *Lehre vom Hebel* dargethan hahen, man aber auch aus einem ähnlichen Grunde die Lasten leichter mit den Hebeln bewegt, wenn man den Stützpunkt möglichst der Last nahe legt — denn der Stützpnnkt hat die Lage des Mittelpunktes; nun verkleinert ein Heranschieben (der Hebelunterlage) an die Last den Kreis (des Lastarms), durch welchen die leichte Bewegung ermöglicht wird, — so mufs man also dieselbe Erscheinung sich auch beim Geschütze denken. Denn der Bogenarm ist ein umgekehrter Hebel (*μοχλὸς ἀντεστραμμένος.*[1]) Unterstützungspunkt wird nämlich der eine Teil des Spannnerven, Kraft aber der andere[2]) Teil desselben, die Last aber die Bogensehne, welche am Ende des Bogenarmes sitzend das Geschofs (*βέλος* R. Schöne, *βάρος* 'Last' die Hss.) entsendet. Wenn man nun den Spannnerven (*τὸν τόνον* Hss., *τοὺς τόνους* Köchly: die Schläge des Spannnerven) von der Ferse (dem Fufse des Bogenarmes) ab soviel als möglich von einander entfernt, so wird natürlich der Unterstützungspunkt näher der Last liegen, die Kraft aber weiter vom Unterstützungspunkte. Infolgedessen wird das Fortschnellen des Geschosses stark und kräftig werden'. Dementsprechend behauptet dann Philo, bei seinem Keilspanner (*τὸ διὰ τοῦ σφηνὸς ἐντεινόμενον ὀξυβελὲς ὄργανον*) eine andere Anordnung der Schläge des Spannnerven getroffen und dadurch eine weit gröfsere Schufsweite als seine Vorgänger erzielt zu hahen.

Zur Lehre von der *Geschwindigkeit des frei fallenden Körpers* gehört folgender Abschnitt (Philo a. a. O. IV, 69, 12 ff.): 'Wenn jemand zwei Ge-

1) Ähnliches wird in Aristoteles, *Probl. mech.* 20 p. 854ᵃ 9 von der Schnellwage gesagt (*τὴν μὲν φάλαγγα* (Wagebalken) *πᾶσαν μοχλὸν ἀνεστραμμένον*), deren Unterstützungspunkt die Halteleine (*σπαρτίον ἕκαστον ἄνωθεν ὄν*) sei.

2) Das gesperrt Gedruckte ist von R. Schöne zugesetzt.

wichte nimmt, die der Art und Gestalt nach einander ähnlich sind, das eine von einer Mine (= 436 g), das andere von zwei Minen, und sie zu gleicher Zeit von einer Höhe fallen läfst, so behaupte ich, dafs das zweiminige um vieles schneller fallen wird. Aber auch bei den übrigen Gewichten ergiebt sich dasselbe Verhältnis, nämlich dafs im Verhältnis allemal das gröfsere weit schneller fällt als das kleinere, sei es, dafs das gröfsere Gewicht, wie einige von den Physikern sagen, die Luft in gröfserem Mafse verdrängen und trennen kann, sei es, dafs sich dem gröfseren Gewichte auch eine gröfsere Neigung zu fallen (*ῥοπή* Schwerkraft) zugesellt, die gröfsere Neigung aber den senkrechten Fall beschleunigt. Wiederum (zeigt sich), dafs das Gesagte zutrifft, wenn jemand zwei Gewichte von je einer Mine nimmt, sie dann zusammenstellt, zu gleicher Zeit soviel als möglich emporhebt und fallen läfst; ich behaupte also, dafs wiederum das Zweiminengewicht schneller fallen wird, als die beiden zusammengenommenen Gewichte von je einer Mine, und wenn drei und noch mehr (Gewichte) zusammengenommen werden, so wird es ebenso gehen.[1]) Auch hieraus erhellt nun, dafs, wenn mehrere einander gleiche Kräfte zusammengesetzt sind, ihr gemeinsames Fallen keineswegs beschleunigter wird, als das natürliche, das blofs dem einen Gewichte zukommt. Durch solche Vorgänge wird also deutlich bewiesen, dafs der eine Halbspann (d. h. die eine Hälfte des Spannnerven) gar nichts zu der Bewegung des Bogenarmes beiträgt, weil er mit dem andern gleiche Geschwindigkeit hat'. Daraufhin ersetzte dann PHILON die Sehnenspanne durch einen Erzspanner (*χαλκότονον*), der, wie er sich rühmt, den des KTESIBIOS noch übertroffen habe. Also praktisch verwertet hat PHILON seine Beobachtungen, obwohl sein Vergleich der Bewegung des Bogenarmes mit der des freien Falles gewifs nicht zutreffend ist (vgl. KÖCHLY und RÜSTOW a. a. O. I, S. 344). Für die Erkenntnis der Eigentümlichkeiten des freien Falles konnte aber nichts dabei herauskommen, weil er darüber, dafs ein Körper desto leichter den Luftwiderstand überwindet, je schwerer er im Verhältnis zur Gröfse der Oberfläche ist, die er beim senkrechten Falle der Luft darbietet, nur eine unklare Vorstellung hat, geschweige denn, dafs er hätte erkennen können, dafs im luftleeren Raume alle Körper gleich schnell fallen.

Es sei gestattet, im Anschlufs hieran auch die Stelle über die *Elastizität der Metalle* mitzuteilen, da nach GÜNTHERS *Gesch. d. Naturw. im Altertum* S. 272[2]) aus vorchristlichen litterarischen Quellen so gut wie nichts darüber bekannt ist.

1) Die Worte *βραδύτερον δὲ* 'aber langsamer', welche den Zusammenhang stören, sind mit BRINKMANN zu tilgen.

2) H. BLÜMNER, *Technologie und Terminologie der Gewerbe und Künste bei Griechen und Römern*, sowie L. BECK, *Geschichte des Eisens*, sind mir leider nicht zur Hand.

Philo ersetzte bei seinem Erzspanner den bis dahin üblichen Sehnenstrang, in den der Bogenarm gesteckt war, abgesehen von dem eisernen Halter (ὀχεὺς σιδηροῦς) als dem Stütz- und Drehpnnkte für den Bogenarm durch elastische Bronzeplatten (λεπίδες χαλκαί). Er macht hierbei nähere Mitteilungen über das ganze Verfahren. *Mech. synt.* IV, S. 69, 48 heifst es: 'Es wurden nämlich für die dreispithamigen Katapulte (d. h. mit einem Kaliber von etwa 7 cm) bronzene Schienen (λεπίδες) hergestellt. Sie hatten auch diese Benennung, waren aber aus Erz getrieben (ἐλάσματα χαλκᾶ), 12 Finger (so Prou, der Finger = 19,3 mm) lang, 2 Finger breit, $^1/_{12}$ Finger dick. Diese wurden aus rotem Knpfer gegossen, das man in möglichster Trefflichkeit beschaffte, gut reinigte, wiederholt erhitzte, indem man nach solchen Vorbereitungen dann auf die Mine (Kupfer) Zinn im Gewichte von drei Drachmen (= 13 g) mischte, auch dies gründlich reinigte und erhitzte. Waren dann die Schienen gegossen uud geschmiedet und hatten sie die bezeichneten Mafse erhalten, so gaben[1]) wir ihnen eine sanfte Biegung nach einer Form ans Holz. Darauf schlugen wir sie kalt, lange Zeit und ununterbrochen, indem wir sie gleich dick liefsen, an der Seite gerade, in der Breite unveränderlich und überall sich der Form anpassend. Alsdann setzten wir sie paarweise zusammen, indem wir die konkaven Seiten einander gegenüberstellten, ihre Enden aufs genaueste feilten und durch Zapfen mit einander vereinigten. Ihre Kraft erhielten die Schienen durch den Ausscheidungsprozefs (κρίσιν Hss., κρᾶσιν[2]) Köchly: Mischung, Legierung) beim Kupfer; denn dasjenige, welches nach dem Gusse möglichst geläutert (eig. weifs) und rein und frei von fremden Bestandteilen ist, ist stark, dehnbar und elastisch. Die Schienen wurden aber lange Zeit ununterbrochen kalt geschlagen, damit ihre Oberfläche sich verdichtete und Spannkraft entwickelte. Gebogen wurden sie, wie wir (eben) sagen, gegen einander gestemmt und neben den Fnfs (Ferse) des Bogenarmes gestellt; der Fufs des Bogenarmes lehnt sich aber gegen die Schienen ... Wurde nun die Bogensehne zurückgezogen, so drehte sich der Bogenarm um den eisernen Halter und drückte mit dem Fufse auf eine der Schienen. Und indem diese auf der gekrümmten Seite an dem am meisten vorspringenden Punkte gedrückt und gegen die andere Schiene gestemmt wurde, wurde sowohl sie selber gerade gestreckt, wie sie auch die andere gerade streckte... Beim Abschiefsen aber mufsten sie in die der Figur ähnliche (ursprüngliche) Stellung zurücktreten. So kam es denn, dafs sie, mit grofser Heftigkeit auseinander springend, den Fnss des Bogenarmes zurückschnellten. Vielleicht

1) Ich schliefse mich in dem eigentümlichen Wechsel der Tempora genau an das Original an.

2) *Mech. synt.* 73,30 steht τῆς τοῦ χαλκοῦ κράσεως, das R. Schöne in κρίσεως ändern will.

wird nun, wie schon mehreren anderen, auch Dir das Gesagte unglaublich erscheinen; denn sie erklären es für unmöglich, dafs die Schienen, wenn sie eine Biegung hätten nnd von der Kraft des Bogenarmes gerade gerichtet seien, fürderhin gerade blieben, sondern sie kehrten wieder in ihre ursprüngliche Krümmung zurück. Die natürliche Beschaffenheit des Hornes lasse dies zwar zu, sowie anch einige Holzarten, und aus solcben würden die Bogen gemacht, aber die Bronze sei von Natur hart nnd spröde und besitze Kraft, wie auch das Eisen, jedoch von irgend einer Kraft gebogen, behalte es für die Folge die Biegung und könne sich nicht von selbst wieder gerade strecken. Dafs sie sich zu solcher Auffassung bestimmen lassen, mag ihnen nun hingehen, weil sie vorher keine Untersuchungen im Einzelnen angestellt haben. Denn man hat die Herstellung der oben erwähnten Schienen an den sogenannten keltiscben nnd spanischen Schwertern gesehen. Wenn man nämlich diese prüfen will, ob sie branchbar sind, so fafst man mit der rechten Hand an den Griff, mit der andern an die Spitze des Schwertes, legt es quer über den Kopf und biegt es auf beiden Seiten, bis man die Schnltern berührt; dann liefs man es los, indem man beide Hände schnell wegzog. Das Schwert aber streckt sich losgelassen wieder gerade und nimmt so seine anfängliche Gestalt wieder an, obne auch nur eine Spur (Gedanken) von Krümmung zu baben. Auch wenn man dieses Verfahren wiederholt, so bleiben sie gerade. Man untersnchte nun, ans welchem Grunde diese Schwerter so elastisch zu sein pflegen. Hierbei fand man zunächst, dafs das Eisen aufserordentlich rein, sodann im Feuer dermafsen bearbeitet war, dafs weder Schlacke noch sonst ein Fehler darin verblieb, und dafs es der Art nach weder zu spröde, noch zu weich, sondern von mittlerer Härte war, darauf, dafs die Schwerter kalt tüchtig geschlagen seien; denn dies bewirke die Elastizität; doch werde es nicht mit grofsen Hämmern, noch mit kräftigen Schlägen gehämmert; denn der starke, quer (horizontal) auffallende Schlag verschiebe das richtige Verhältnis (der Moleküle) und härte dadurch, dafs er in die Tiefe dringe, die Schwerter zu sebr, sodafs die so geschmiedeten Schwerter, wenn jemand sich daran machte, sie zu biegen, entweder überhaupt dabei nicht nachgäben, oder bei Anwendung von Gewalt zerbrächen, weil der ganze Raum, von dem Schlage eingedrückt (vermutlich: τυπωθέντα, πληρωθέντα 'gefüllt' Bücheler, πυκνωθέντα 'verdichtet' Hss.), dicht ist. Die Erhitzung macht das Eisen und Kupfer weich, indem die Moleküle gelockert werden, wie man sagt, die Abkühlung und das Schmieden hart. Beides wird Ursache der Verdichtung der Moleküle, indem die Teilchen sich mit einander vereinigen und die Verflechtung (περιπλοκῆς Hss., παραπλοκῆς Diels) des Vakuums (mit den Molekülen) aufgehoben wird. Wir schlugen nun die Schienen auf beiden Seiten kalt, und so wurden ihre Oberflächen ge-

härtet, die Mitte blieb aber weich, weil der Schlag bei seiner Leichtigkeit nicht in die Tiefe drang. Demzufolge waren sie nun aus drei Schichten zusammengesetzt, zwei harten, in der Mitte aber aus einer weicheren. Deswegen besafsen sie auch Elastizität, wie oben gezeigt ist'.

Zur *Hygroskopie* steht folgende Stelle bei PHILON, a. a. O. IV, 72, 17 ff. in Beziehung: 'Die Erzspanngeschütze bleiben sowohl bei der Verwendung unter freiem Himmel, als bei Seekriegen (*ναυτικαῖς στρατείαις* BÜCHELER, *v. στρατιαῖς* 'Seetruppen') unversehrt, weil sie, weder wenn sie benetzt, noch wenn sie feucht werden, irgend welchen Schaden leiden. Für die Sehne ist all dergleichen nachteilig. Denn wenn die Spannnerven feucht oder benetzt werden, so müssen die Geschütze verderben. Oft aber kommt es vor, dafs auch die an gedeckten Orten sorgfältig aufbewahrten wegen der Luftveränderung (*διὰ τὴν τοῦ ἀέρος μεταβολὴν*) um vieles schlechter werden.[1])

Zum Schlusse verbreitet sich PHILON über die von KTESIBIOS erfundene *Windbüchse* (*ἀεροτόνον* 'Luftspanner'), die bestimmt war, Steine zu schleudern. 'Als KTESIBIOS nämlich, heifst es a. a. O. IV, 77, 17 ff., bei den sogenannten pneumatischen Sätzen, die auch wir weiter unten noch vortragen werden, die Luft als aufserordentlich stark, elastisch und beweglich, ferner aber auch, wenn sie in ein starkes Gefäfs geschlossen sei, als fähig erkannte, sich zu komprimieren und, wenn die Kompression aufhört, sich schnell wieder bis zu gleichem Umfange des Gefäfses auszudehnen[2]), da kam er auf Grund seiner Erfahrung in der Mechanik zu der Überzeugung, dafs diese Bewegung den Bogenarmen eine grofse Spannung und sehr schnelle Schwungkraft verleihen könne. Deswegen richtete er Gefäfse her, die der Gestalt nach den medizinischen offenen (deckellosen) Büchsen ähnlich, zur Erlangung von Elastizität und Festigkeit aus Bronze getrieben waren, aber vorher, um die (nötige) Dicke zu erhalten, aus Wachs geformt und gegossen waren. Die Innenseite derselben war mit einem Instrumente ausgedrechselt und die Fläche nach dem Richtscheite eben und gerade, auch glatt gearbeitet. Und so wurde ein kleiner bronzener Kolben (*τυμπάνιον*, kleine Trommel) eingesetzt, der (im Stiefel) auf- und niedergehen konnte, sich mit der ebenfalls gleichmäfsig und glatt gearbeiteten äufseren Peripherie (an die Innenseite des Gefäfses) so anschmiegte und die zwischen beiden befindliche Fuge derart gestaltete, dafs auch mit aller Gewalt keine Flüssigkeit[3]) durchsickern konnte.

1) Z. B. werden die Sehnen bei feuchter Luft kürzer, bei trockener länger.

2) 77,24 ist die Stelle *ἴσον πιλούμενον* offenbar verderbt. Ich möchte lesen ⟨*μηκέτι*⟩ *πιλούμενον*.

3) *'Ρεῦμα* 'Flufs' Hss., richtiger wohl *πνεῦμα* 'Luft' MEISTER, *De veterum hydraulo*: Nov. comm. soc. scient. Gotting. 2, 1771, S. 177. Vgl. HERON *Op.* I, 192, 13 *ὥστε*

Wundere Dich nicht und zweifle nicht, ob es möglich, dergleichen herzurichten. Denn auch bei der Pfeife, die mit den Händen gespielt wird und die wir *Wasserorgel* nennen, war das Gebläse, welches die Luft in den im Wasser befindlichen Windkessel prefst, aus Bronze und ebenso gearbeitet wie die oben erwähnten Gefäfse. Es wurde uns aber auch gezeigt, wie KTESIBIOS hinsichtlich der natürlicheu Beschaffenheit der Luft dargethan, eine wie starke und schnelle Bewegung sie habe, und wie er zugleich die Vorrichtung, welche mit den die Luft enthaltenden Gefäfsen verbunden war, vor Augen stellte, indem er das Gefäfs rings mit Tischlerleim bestrich, einen Aufsatz (*πρόθεμα*) auf den Ring (*κυκλίσκῳ*[1]) Hss., eigentlich 'kleiner Kreis', 'Knopf' KÖCHLY) setzte und mit gröfster Gewalt den Kolben mit Hilfe eines Keiles und Hammers hineintrieb. Man konnte aber sehen, wie der Kolben nur wenig nachgab, so oft aber einmal die darinnen eingeschlossene Luft komprimiert war, gar nicht mehr nachgab, auch nicht beim stärksten Schlage auf den Keil, oder bei Aufbietung[2]) von Gewalt. Wurde aber der Keil herausgetrieben, so sprang auch der Kolben mit grofser Heftigkeit aus dem Gefäfse. Oft aber kam es vor, dafs sogar Feuer mit herausfuhr, weil die Luft sich wegen der Schnelligkeit der Bewegung an der Gefäfswand rieb'.

Die *Expansionskraft* der Luft war freilich dem ARISTOTELES schon bekannt, die von ihm angenommene Theorie des Erdbebens (GÜNTHER, *Abrifs der Naturwiss.* S. 280) setzt sie voraus. Aber neu ist bei KTESIBIOS die Verwertung dieser Kenntnis zu praktischen Zwecken.

ἀέρα μὴ παραπνεῖν. Oder ist mit *ῥεῦμα* der 'Luftzng' gemeint? Das zugehörige Verbum *διηθεῖσθαι* (durchgeseiht werden) pafst freilich besser zu dem Begriffe 'Flüssigkeit'. Aber die Sache erfordert die Luftdichtigkeit, wenngleich diese wohl auch durch die Verwendnng des Tischlerleims verbürgt ist.

1) Die Sache ist nicht ganz klar. Am einfachsten ist es, wenn man sich den Aufsatz als kleinen, bronzenen, in eine ringförmige Erhöhung des Kolbens eingelöteten, massiven Cylinder vorstellt, der zugleich eine Art kurzer Handhabe bildete. Der Hinweis auf das Gebläse der Wasserorgel (s. Fig. 43 in HER. *Op.* I, 194) scheint mehr die enge, lnftdichte Verbindnng des Stiefels (*ἀγγεῖον* PHILO, *πυξίς* HERON) mit dem Kolben (*τυμπάνιον* PHILO, *ἐμβολεύς* HERON) als die weiteren Einzelheiten im Auge zu haben. Jedenfalls stöfst eine Identifizierung des *πρόθεμα* mit HERONS *πυξίδιον* nnd des *κυκλίσκος* mit dem HERONischen *λεπίδιον* oder *πλατυσμάτιον* auf erhebliche Schwierigkeiten.

2) Ich möchte 78, 6—7 lesen: *πρὸς τὸν σφῆνα ἢ βίας προσαχθείσης· ἐκκρουσθέντος δὲ τοῦ σφηνὸς κτέ.*

Über die Mondkarten des Langrenus.

Von Walter F. Wislicenus in Strafsburg i. E.

Herr Pfarrer Alsdorf in Laufersweiler (Hunsrück) fand in dem der Kaiserl. Universitäts- und Landesbibliothek zu Strafsburg i. E. gehörenden Exemplar von Hevels *Selenographia* eine Mondkarte zum Schlufs eingebunden, welche nicht in das Werk hineingehört. Er zeigte dies bei Rücksendung des entliehenen Bandes der Bibliothekverwaltung an und sprach zugleich die Vermutung aus, dafs diese Mondkarte — auf der kein Verfertiger angegeben ist — möglicherweise von Langrenus stamme. Die Bibliotheksverwaltung legte mir darauf den fraglichen Band mit der Karte vor und dieselbe wurde, da sie zweifellos nicht von Hevel herrührt, daraus entfernt und in besonderer Mappe untergebracht. Ich habe darauf versucht, den Ursprung der Karte zu erforschen und möchte hier das Resultat meiner Untersuchung darlegen, besonders deshalb, weil in den geschichtlichen Angaben über die Thätigkeit des Langrenus als Selenographen viel Unklarheit herrscht.

Die von Herrn Alsdorf ausgesprochene Vermutung hatte soviel für sich, dafs die Untersuchung hauptsächlich in dieser Richtung geführt wurde, ohne dafs dabei die Möglichkeit einer anderen Autorschaft der Karte aus den Augen gelassen wurde, doch liefsen sich für die Annahme letzterer keine Anhaltspunkte finden.

Meines Wissens giebt es nur zwei Mondkarten, die sicher von Langrenus (richtiger Michel Florent van Langren) herrühren, die eine befindet sich in Paris in der „Bibliothèque nationale“ in der „Section des cartes et plans“ und trägt die Bezeichnung „kl. 1044“, die andere in Brüssel in den „Archives du conseil privé“ und zwar in den Akten, welche die Bezeichnung tragen: „de Gottignies actes dépêches 1645“. Das Pariser Exemplar ist von Houzeau in den Bulletins de l'académie royale de Belgique tome XIX, IIIe partie (1852) Seite 506 kurz beschrieben, während Herr L. Niesten das Brüssler Exemplar in der Zeitschrift Ciel et Terre 4 (15. September 1883), Seite 313 ff. nicht nur besprochen, sondern auch in verkleinertem Mafsstabe abgebildet hat. Mit dieser Abbildung hat die Strafsburger Mondkarte wenig Ähnlichkeit, sodafs alles

auf eine Vergleichung mit der Pariser Karte ankam. Da dieselbe aber der Seltenheit wegen nicht verliehen wird, so liefs Herr Direktor Loewy in Paris dieselbe auf meine Bitte in etwas verkleinertem Mafsstabe photographieren, wofür ich ihm hier öffentlich meinen Dank aussprechen möchte. Die nachfolgenden Besprechungen des Pariser und Brüssler Exemplars stützen sich auf diese photographische Reproduktion und die von L. Niesten veröffentlichte Nachbildung.

Die Pariser Mondkarte des Langrenus ist ein in Kupfer gestochenes Blatt von 50,5 cm Höhe und 39,5 cm Breite, auf welchem die Mondoberfläche innerhalb einer vollkommen scharfen Kreislinie von 35 cm Durchmesser abgebildet ist. Den unteren Teil des Blattes nimmt eine gleich zu erwähnende längere Inschrift ein, während die den Mond umgebenden Teile durch feine Linien karriert sind. Innerhalb dieser schraffierten Partien befinden sich folgende Inschriften: Über der Mondscheibe steht in grofsen Lettern der Titel „Plenilunii lumina austriaca philippica" darunter in viel kleinerer Schriftsorte dicht am Mondrande „Limbus borealis", dem am unteren Mondrand die Angabe „Limbns australis", am rechten und linken die „Limbus occidentalis" und „Limbus orientalis" entsprechen. In den Ecken, welche in der nahezu quadratischen Umrahmung von der Mondscheibe freigelassen werden, finden sich lateinische Citate von auf den Mond bezüglichen Stellen aus Theodoretus (*Sermone* IV), Plutarchus (*De facie in orbe lunae*), Cicero (lib. IV *Acad. quaest.*), Achilles Tatius (*Isag.*) und Seneca (*Nat. quaest.* lib. VII), während dicht unter den Worten „Limbus australis" in der Mitte ein Citat aus Plinius (lib. II) steht. Den unteren nicht schraffierten Teil des ganzen Blattes nimmt eine längere lateinische Inschrift ein, deren Überschrift lautet: „Haec nusquam vulgata, generi tamen humano maxime utilia, imo necessaria, Michael Florentius Langrenus Mathematicus et Cosmographns Regius orbi terrarum proponit", während sich am Schlufs die Datierung V. Idus Februarij MDCXLV findet; dieselbe ist von der Beschädigung des Blattes an der rechten unteren Ecke verschont geblieben.

Die eigentliche Mondkarte zeigt die dunkeln Mondflecke ohne scharfe Begrenzung durch und durch punktiert, davon macht nur der Palus Somnii (nach der jetzigen Nomenklatur) eine Ausnahme, der in ähnlicher Weise gestrichelt ist, wie man noch jetzt sumpfige Gebiete auf den Landkarten darstellt. Die Krater, Ring- und Wallebenen sind meist in kreisrunder (gegen die Randpartieen zu in elliptischer) Form mit scharfer Begrenzung (nur gelegentlich ist dieselbe punktiert) und Schattenwurf am inneren westlichen Wallabhang gezeichnet. Hievon macht nur Gassendi eine Ausnahme, dessen Inneres gleichmäfsig schraffiert ist mit Aussparung eines weissen Punktes in der Mitte; bezeichnet ist dieses Gebilde mit „Annulus

Neptuni“, während Gassendi A als gewöhnlicher Krater dargestellt und „S. Marci“ genannt ist. Von den von Tycho ausgehenden Strahlen sind zwei in das Mare Nubium hinein verlaufende angedeutet und aufserdem sind sowohl die Apenninen wie der Kaukasus durch leichte Schraffierung markiert. In die Karte selbst sind 322 Bezeichnungen eingetragen und zwar sind die dunkeln Flecke als Oceanus, Mare, Sinus, Lacus etc. bezeichnet. Darnach ergiebt sich folgende

Nomenklatur

des Langrenus		der Gegenwart
Oceanus Philippicus	=	Oceanus Procellarum
Mare Austriacum	=	Mare Imbrium
„ Borbonicum	=	„ Nubium
„ Venetum	=	„ Humorum
„ Astronomicum	=	„ Frigoris
„ Eugenianum	=	„ Serenitatis
„ de Moura sive Caspium	=	„ Crisium
„ Belgicum	=	„ Tranquilitatis
„ Langrenianum	=	„ Foecunditatis
Sinus Batauicus	=	„ Nectaris
Fretum Catholicum	=	„ Vaporum
Sinus Medius	=	Sinus Medii
„ Principis	=	„ Roris
„ Geometricus	=	„ Iridum
Lacus Scientiae	=	Lacus Somniorum
„ Panciroli	=	Plato
etc.		etc.

Die Wall- und Ringebenen sind meist mit den Namen damals regierender Fürsten (Philipp IV., Ludwig XIV., Ferdinand III., Innocens X., Karl I., Christian IV., Ladislaus IV. etc.) und deren Gemahlinnen, sowie von Prinzen und Prinzessinnen, Diplomaten (Mazarin) und Edelleuten (Trautmannsdorf, Piccolomini etc.) belegt, wozu bei den regierenden Persönlichkeiten noch eine kurze Bezeichnung ihrer Würde (Reg. Fran., Imp. Rom. etc.) kommt, was insofern nötig ist, als dieselben Namen wiederholt vorkommen, z. B. Karl einmal als König von England und dann als Herzog von Lothringen, Maria einmal als römische Kaiserin und dann als Tochter des Herzogs von Mantua. Die kleineren Wallebenen und die Krater tragen meist Namen berühmter Gelehrter (vielfach Astronomen), wobei sich Langrenus nicht auf seine Zeitgenossen beschränkt, andrerseits sich selbst aber auch nicht vergifst. Die einzigen Ausnahmen von dieser Nomenklatur bilden die Namen Roma und Amalfi, welche den Ringgebirgen

Archimedes und Scoresby beigelegt sind. Aufserdem sind eine Anzahl Vorgebirge bezeichnet und die heutigen Apenninen tragen den Namen „Montes Anstriaci“. Die hellen Teile der Mondoberfläche, für welche wir jetzt keine besonderen Namen mehr haben, sind hier als „Terra“ (honoris, laboris, virtntis, sapientiae, temperantiae, pacis, dignitatis nnd justitiae) aufgeführt und einmal kommt am Nordostrand die Bezeichnung „Littus“ (Philippicum) vor. Namen von Heiligen sind mit Vorliebe zur Bezeichnung von Vorgebirgen und Kaps verwendet, ohne auf diese beschränkt zu sein, oder alle derartigen Gebilde zu umfassen. Es kommen die Namen von folgenden 14 Heiligen vor: Sanct Albertus, Angustinus, Beda, Dionisius, Dominicus, Franciscus, Ignatins, Jacobus, Ludovicus, Marcus, Michaelis, Petrus, Vincentius nnd Xaverius. Es kommen zwar noch andere Namen von Heiligen — besonders weiblichen Geschlechts — vor, wie z. B. Maria, Anna, aber es sind damit nicht die Heiligen, sondern profane Personen gemeint, wie schon ans dem fehlenden „S.“ (Sanct) vor dem Namen und weiter aus den Zusätzen hervorgeht, die ich oben für den Namen Maria schon angeführt habe.

Von den Namen auf der Pariser Karte haben sich 54 in unserer hentigen Nomenklatur der Mondgebilde erhalten, es sind das die folgenden:

Hipparch	Scheiner	Langrenus
Albategnius	Tacquet	Calippns
Xenophanes	Schonberger	Arzachel
Regiomontanus	Thebit	Neper
Ptolemaens	Thales	Snellius
Timocharis	Longomontanus	Caesar
Aristarchus	Enclid	Furnerius
Pythagoras	Rheita	Blancanus
Alfons	Bayer	Posidonius
Endymion	Riccius	Maginus
Pytheas	Gassendi	Colombo
Aratus	Hypatia	Gallilei
Kepler	Moretus	Hevel
Cleomedes	Simpelius	Piccolomini
Huygens	Bullialdus	Curtius
Thales	Meton	Lantzberg
Copernicns	Wendelinus	Wilhelm
Archimedes	Eratosthenes	Kircher.

Aufserdem findet sich bei Langrenus der Name Brahe, der in der Gegenwart durch Tycho ersetzt ist. Einige bei Langrenus vorkommende Personennamen habe ich hier nicht mit aufgeführt, weil es zweifelhaft ist, ob sie sich auf dieselben Persönlichkeiten beziehen, deren Namen auf den jetzigen

Mondkarten vertreten sind, z. B. Gualterius, Grinibergerus, die möglicherweise mit Walter und Gruemberger identisch sind.

Die obigen 54 Namen sind aber von Langrenus anderen Gebilden auf dem Monde beigelegt, als wir heute damit bezeichnen, mit einziger Ausnahme des Namens „Langrenus“ selbst, der noch heute derselben Wallebene beigelegt wird, die Langrenus damit bezeichnet hat. Da nun, wie wir oben bei der Gegenüberstellung der Namen der dunkeln Flecke gesehen haben, sich die Bezeichnung „Sinus Medii“ der heutigen Karten auch bei Langrenus für denselben Fleck findet, so haben sich also zwei Namen der alten Nomenklatur des Langrenus für zwei bestimmte Mondgebilde auch auf unseren Karten erhalten.

Die Strafsburger Mondkarte ist ein in Kupferstich ausgeführtes Blatt, dessen bedruckte, fast quadratische Fläche 38 cm hoch und 37 cm breit ist. Die Ausführung ist der Pariser Karte analog, d. h. der Grund um die durch eine scharfe Kreislinie von 33,8 cm Durchmesser abgegrenzte Mondscheibe ist dicht karriert. Überschrift und die vier Limbus-Bezeichnungen sind genau wie auf der Pariser Karte, dagegen fehlen die lateinischen Citate in den Ecken und darunter, sowie die ganze ausführliche Unterschrift. Irgendwelche Angaben über Verfertiger, oder Kupferstecher, oder Zeit der Herstellung fehlen, am linken Rande ist ein Wasserzeichen — ähnlich einer Weintraube — zu erkennen. Die Ausführung der eigentlichen Karte ist der Pariser so ähnlich, dafs man auf den ersten Blick denken könnte, die Strafsburger Karte sei nur ein früherer Abzug (avant la lettre) von derselben Kupferplatte. Bei genauerem Studium entdeckt man, dafs man es mit zwei verschiedenen Platten zu thun hat, denn nicht nur fehlen auf der Strafsburger Karte drei Gebilde, die auf der Pariser eingetragen sind, sondern es zeigen sich auch Unterschiede in der Ausführung der feineren Details. Die Nomenklatur der Strafsburger Karte ist — wenn man von ziemlich zahlreichen Schreibfehlern absieht — die gleiche wie bei der Pariser Karte, nur fehlen fünf Namen, sodafs sie nur 317 Benennungen enthält. Von diesen sind nur sechs andere als auf dem Pariser Originale und bei zwei benachbarten Gebilden sind die Namen derselben gegen einander ausgetauscht auf der Strafsburger Karte. Endlich ist auf der letzteren bei einem Namen das zugehörige Gebilde nicht eingetragen.

Im allgemeinen ist die Pariser Karte feiner nnd sorgfältiger ausgeführt als die Strafsburger, das zeigt sich nicht nur in der Punktiermanier, in der die dunkeln Flecke ausgeführt sind, sondern auch in der Ausführung der Schrift. Die Namen sind auf der Pariser Karte durchweg sauberer und zierlicher gestochen nnd stehen so, dafs man nie im Zweifel sein kann, auf welches Gebilde sie sich beziehen, was man von der Strafsburger

Karte nicht sagen kann. Dafs die beiden Karten in engster Beziehung zu einander stehen, ist wohl nach dem Gesagten ohne weiteres klar, aber es dürfte sehr schwer sein, zu entscheiden, ob die eine eine verbesserte oder verschlechterte Nachbildung der anderen ist, oder ob beide vielleicht nach einer Originalzeichnung des Langrenus gestochen sind.

Die Brüssler Mondkarte scheint eine Handzeichnung von Langrenus selbst zu sein, die wohl früher als 1645 entstand, ja möglicherweise schon 1628 der Infantin Isabella von Spanien überreicht wurde. Die Umgrenzung des Mondes ist auch hier eine scharfe Kreislinie von 35 cm Durchmesser, aufserhalb deren links und rechts die Bezeichnungen „Oriens" und „Occidens" stehen, während in der linken oberen Ecke des Blattes der Titel „Luna vel Lumina Austriaca Philippica" und in der rechten unteren eine Erklärung in betreff der Nomenklatur in französischer Sprache sich befindet. Weder der Untergrund der Karte noch die Gebilde auf derselben zeigen Schraffierungen, sondern die letzteren sind lediglich in scharfen Umrissen angegeben. Nur in fünf kraterartigen Gebilden sind Spuren von Details eingetragen und die Apenninen sowie der Kaukasus (nach heutiger Nomenklatur) zeigen eine sehr dürftige Schraffierung. Was die Nomenklatur betrifft, so ist dieselbe wohl nach den gleichen Prinzipien wie bei der Pariser Karte aufgestellt, aber dieser gegenüber äufserst dürftig. Nur 29 Gebilde tragen auf der Brüssler Karte dieselben Namen wie auf der Pariser, 17 haben andere, 149 gar keine Namen, und endlich fehlen 127 von den auf der Pariser Karte verzeichneten Mondformationen hier ganz, dagegen zeigt die Brüssler Karte im Oceanus Procellarum an einer Stelle einen als „Gallilei" bezeichneten Krater, der auf der Pariser und der Strafsburger Karte fehlt.

Vergleicht man die hier besprochenen drei Karten mit einander, so ist zweifellos die Brüssler die minderwertigste, und zwar nicht nur, was die Sorgfalt der Ausführung betrifft, sondern vor allen Dingen auch in Bezug auf Gestalt und Lage der einzelnen Mondformationen. Diese letztere ist bei vielen selbst der gröfseren Wallebenen und Ringgebirge so ungenau, dafs eine Identifizierung sehr schwer, stellenweise unmöglich wird. Bei den beiden anderen Karten sind Zweifel bei der Identifizierung verhältnismäfsig selten. Überhaupt sind die Pariser und die Strafsburger Karte recht übersichtlich und der Mondkarte, die Ricciolus in seinem *Almagestum novum* veröffentlichte, weit überlegen, wenn sie auch nicht an die feine Durchführung der Hevelschen Mondkarte heranreichen. Ja ich möchte diese Karten des Langrenus in Bezug auf Übersichtlichkeit sogar der schönen Cassinischen Mondkarte vorziehen, denn bei dieser wirkt die reiche Schraffierung vielfach verwirrend.

Werfen wir noch einen Blick auf die Angaben, die wir in neueren

astronomischen Geschichtswerken und solchen über den Mond in Bezug auf die Mondkarte des Langrenus finden.

J. J. von Littrow sagt in einer langen Anmerkung zu § 61 des zweiten Teils seiner *Wunder des Himmels* (zweite Auflage, 1837): ein Astronom in Spanien habe die Gebilde auf dem Monde mit den Namen der Heiligen belegt (von denen Littrow einige anführt), von welcher Nomenklatur Ricciolus auf seiner Mondkarte den Namen Katharina übernommen habe. Ganz in dem gleichen Sinne, ja teilweise mit denselben Worten äufsert sich R. Wolf in seiner *Geschichte der Astronomie* (München 1877) auf Seite 397, sodafs er sich entweder anf die Stelle bei Littrow stützt, oder aus der gleichen Quelle wie dieser schöpft. Ein wichtiger Unterschied zwischen Littrow und Wolf besteht aber darin, dafs letzterer nicht von einem „Astronomen in Spanien", sondern direkt von Langrenus und dessen Mondkarte spricht, welche er unter dem Titel „Selenographia Langreniana" anfführt. Von den Namen, die sich auf dieser Karte finden sollen, führt Wolf die Namen des blinden Tobias, der heiligen Ursula, Genoveva und Katharina, sowie des heiligen Athanasius an, mit dem Vermerk, dafs Ricciolus den Namen der Katharina für seine Mondnomenklatur beibehielt, „wie man sagt aus Anhänglichkeit an eine Frau dieses Namens". Wolf giebt übrigens an, dafs er die Karte des Langrenus nicht zu Gesicht bekommen habe, was auch bei Lalande der Fall gewesen wäre, der als Erscheinungsjahr 1645 angiebt. Diese letztere Angabe würde ja für die Pariser Mondkarte stimmen, aber alle die übrigen Angaben von Wolf passen nicht. Weder lautet der angegebene Titel so, noch finden sich die angeführten Namen auf einer der besprochenen Karten. Auf der Pariser und Strafsburger Karte kommt der Name „Urselii" für das Ringgebirge Agrippa vor, aber damit kann unmöglich die heilige Ursula gemeint sein, sondern doch nur ein Mann Namens Urselius (die Genitivbildung wendet Langrenus bei den Benennungen durchgängig an). Die Wallebene, welche heute den Namen Katharina führt, heifst auf der Pariser und Strafsburger Karte „Piccolomini".

Auch im ersten Bande seines *Handbuches der Astronomie, ihrer Geschichte und Litteratur* (Zürich 1890) in den Anmerkungen zu § 234 (auf Seite 496) spricht R. Wolf wieder über die Mondkarte des Langrenus, welche er unter dem Namen „Selenographia Langreniana sive Lumina Austriaca Philippica" aufführt, und weiter angiebt, dafs an 270 Gebilde auf derselben eingetragen und mit biblischen Namen bezeichnet seien; die Episode mit dem Namen Katharina fehlt hier. Wolf beruft sich dabei für seine Angaben ausdrücklich auf die Publikation der Brüssler Karte durch Niesten in Ciel et Terre. Umso befremdlicher ist es, dafs Wolf den Titel der Karte nicht richtig angiebt und von „biblischen

Namen" spricht. Die einzigen Namen von Heiligen, die auf der Brüssler Karte vorkommen, sind S. Marcus und S. Vincentius, aber Wolf konnte allerdings auch Namen wie Maria, Anna, Balthasar als auf biblische Personen bezüglich auffassen, weil auf der Brüssler Karte die Zusätze fehlen, welche diese Namen auf der Pariser und Strafsburger Karte als solche von weltlichen Personen charakterisieren. Aber wenn auch Wolf in diesen sehr begreiflichen Irrtum verfallen sein sollte, so ist doch die überwiegende Mehrzahl der Namen auch auf der Brüssler Karte so entschieden profanen Ursprungs (wie z. B. Ludovicus XIV., Ladislaus, Lantsberg, Galilei, Gassendi, Bullialdus, Brahe etc.), dafs es schwer begreiflich ist, wie Wolf zu der Bezeichnung „biblische Namen" kommt.

Überhaupt aber ist es mir unverständlich, wie Littrow und Wolf (an der ersten oben citierten Stelle) zu so bestimmten Angaben von Namen auf der Karte des Langrenus kommen, die thatsächlich nicht darauf enthalten sind. Liegt hier nur eine sehr unzuverlässige ältere Quelle vor und welche?, oder existiert thatsächlich noch eine andere Mondkarte des Langrenus, auf welcher diese Namen vorkommen? Wenn das der Fall sein sollte, so tragen vielleicht diese Zeilen dazu bei, sie ans Licht zu ziehen.

E. Neison, sowie Nasmyth und Carpenter sprechen in ihren bekannten Werken über den Mond überhaupt nicht von einer Mondkarte des Langrenus, sondern nur von Zeichnungen einzelner Gebilde, wobei die letztgenannten Autoren das Prinzip der Namengebung ganz richtig darstellen und nicht von biblischen oder Heiligen-Namen sprechen. Dagegen bringt N. Herz im III. Band des *Handwörterbuchs der Astronomie* (Breslau 1898) wieder die Heiligennamen, die Langrenus auf seiner „Selenographie" verwendet haben soll und tischt auch die Geschichte von der heiligen Katharina wieder auf (siehe ebenda Seite 246).[1]

1) Beiläufig sei noch ein weiterer Irrtum von Herz berichtigt. In einer Anmerkung auf derselben Seite sagt er nämlich, dafs in der *Connaissance des temps* für 1788 die Mondkarte des Ricciolus in verkleinertem Mafsstabe reproduziert sei. Hierzu ist folgendes zu bemerken. In den Jahrgängen der *Connaissance des temps* für die achtziger Jahre des achtzehnten Jahrhunderts ist jedes Mal eine Mondkarte beigegeben, auf der der Mond einen Durchmesser von 13,2 cm hat und seine hauptsächlichsten Oberflächengebilde mit den Zahlen 1—40 und den Buchstaben A—H bezeichnet sind, welche auf die an den Rand der Karte gedruckten Namen nach der heutigen Nomenklatur verweisen. Bis zum Jahre 1785 (einschliefslich) tragen diese Mondkarten die Überschrift: „Figure de la Lune" und sind ziemlich roh und minderwertig. Mit dem Jahre 1786 (nicht 1788) werden plötzlich diese Karten viel besser und führen die Überschrift: „Figure de la Lune selon le P. Riccioli par M. Jeaurat". Das „selon le P. Riccioli" hat N. Herz zu seiner oben zitierten Notiz veranlafst, bezieht sich aber sicherlich nur auf die Nomenklatur, denn die Karte selbst ist zweifellos eine verkleinerte Wiedergabe der Cassinischen Mondkarte und hat mit der von Ricciolus gar keine Ähnlichkeit.

Eugenio Beltrami e le sue opere matematiche.

Di Gino Loria a Genova.

Con un ritratto di E. Beltrami in fotolitografia.[1])

Quando, nel Novembre 1883, io ebbi la fortuna di conoscere ed avvicinare Eugenio Beltrami egli era nel periodo che corrisponde alla completa maturità del suo ingegno. L' altissima rinomanza, della quale egli godeva, di scienziato eminente e di professore impareggiabile, faceva accorrere numerosi ascoltatori (fra cui mi piace ricordare Luigi Berzolari ed Otto Struve, Vincenzo Reina ed Emilio Bitterli) alle lezioni di Idrodinamica ed Elettrodinamica che in quell' anno egli impartiva nell' Ateneo di Pavia; tutti, studenti e dilettanti, erano attratti dall' interesse scientifico ed estetico che esse offrivano. L'impressione che in quei giorni io ricevetti dalla parola, calda e severa ad un tempo, di quel sommo maestro è una di quelle che il tempo è impotente a cancellare; essa si è ridestata, in tutta la sua forza e freschezza, nelle ore in cui — in seguito ad un invito assai lusinghiero, che ebbi l' audacia di accettare — m' occupai di esaminare nel suo complesso le opere matematiche del grande uomo di cui da un anno piangiamo la perdita irreparabile; in esse, come nelle lezioni del Beltrami, la scienza e l' arte, avvinte in armonico connubio, raggiungono il fine supremo che deve proporsi qualsia scritto scientifico, quello cioè di far amare la disciplina in esso esposta. Ond' è che in nessun caso, come in quello che ha per protagonista il Beltrami, la vita di uno scienziato offre un più chiaro esempio di eredità di attitudini artistiche: giacchè nella famiglia di lui la tendenza verso l' arte scendeva per li rami. Infatti, eccellente incisore in pietre dure fu il suo avo paterno Giovanni Beltrami (1779—1854), valente miniatore fu il padre, ed autrice di assai lodate composizioni poetiche e musicali è le madre Elisa Barozzi (tuttora vivente): da essa anzi il nostro matematico ricevette il primo avviamento alla musica, arte di cui non tardò a divenire profondo conoscitore ed ottimo esecutore.

1) Ricavata, col gentile consenso dell' autore, da una pittura ad olio eseguita nel 1897 dal Prof. G. Pittarelli; il valore della quale è tanto maggiore in quantochè dell' Illustre Estinto non esistono fotografie di data recente.

Egli nacque[1]) a Cremona addì 16 Novembre 1835 e frequentò le Scuole elementari, il Ginnasio ed il Liceo di quella città, eccettuato l' anno scolastico 1848—49, in cui fu alunno di quel Ginnasio di Venezia che oggi porta il nome di Marco Polo. Esauriti gli studî liceali nell' estate 1853, nel successivo Novembre si inscrisse come studente nella Facoltà matematica dell' Università di Pavia, dopo di avervi conseguito un posto di fondazione Castiglioni nel Collegio Ghislieri. Ma nell' anno successivo, accusato di avere promossi disordini contro l' Abate LEONARDI, rettore di questo Collegio, ne venne espulso assieme ad altri cinque suoi condiscepoli.[2]) Tale misura — forse non assolutamente ingiustificata, ma certamente troppo rigorosa — ebbe conseguenze disastrose per chi ne fu vittima; giacchè se durante l' anno scolastico 1854—55 al Nostro fu dato di attendere ancora agli studî universitari, se potè ancora essere inscritto come studente nell' anno successivo (e così assistere a qualche lezione del BRIOSCHI), le ristrettezze delle sua famiglia lo costrinsero a ritornare sotto il tetto paterno prima di avere superati gli *esami di rigore* (precedenti la laurea dottorale) e ad abbandonarlo ben presto per portarsi a Verona (Novembre 1856), ove aveva ottenuto il modesto ufficio di segretario particolare dell' Ingegnere DIDAY, direttore dell' esercizio delle Ferrovie del Lombardo-Veneto. Ivi rimase per poco più di due anni, cioè sino al giorno (10 Gennajo 1859) in cui *per motivi politici* venne bruscamente licenziato del direttore generale BUSCHE. Fortuna volle che l' annessione della Lombardia al Piemonte, avvenuta poco dopo, concedesse al DIDAY di trasferire il proprio ufficio a Milano, conducendo seco il proprio segretario particolare.

A Milano il BELTRAMI imprese a rifare da capo la propria istruzione matematica; tolse «a studiare con tutta diligenza una dopo l' altra l' aritmetica, l' algebra, la geometria, la trigonometria, l' algebra superiore e il calcolo, come avrebbe fatto uno che avesse percorso tutt' altra Facoltà, che la matematica.»[3]) A Milano egli potè avvicinare il suo antico maestro FRANCESCO BRIOSCHI, e LUIGI CREMONA, in allora professore nel Liceo S. Alessandro (ora Beccaria): con essi strinse dei legami di amicizia che mai si allentarono e che dovevano esercitare un influenza decisiva e benefica su tutto il suo avvenire. Infatti egli che — per la mancanza di una laurea — si era visto sbarrato

1) Pei dati biografici si è attinto specialmente alla *Commemorazione del Senatore Prof. EUGENIO BELTRAMI, letta del Socio* LUIGI CREMONA *alla Seduta solenne della R. Accademia dei Lincei del 10 Giugno 1900.*

2) La lettera di congedo venne pubblicata da C. SOMIGLIANA nel cenno necrologico sul BELTRAMI inserito nell' Annuario della r. università di Pavia per l' anno scolastico 1900—1901.

3) Da una lettera scritta nel Dicembre 1860 dal BELTRAMI al CREMONA e da questo pubblicata nella succitata *Commemorazione.*

l' accesso tanto alle Scuole secondarie, quanto al corpo del Genio militare, per effetto delle pubblicazioni da lui fatte negli Annali di matematica venne nominato (Decreto 18 Ottobre 1862) Professore straordinario di Algebra complementare e Geometria analitica nell' Università di Bologna: è merito del CREMONA (allora professore di Geometria superiore in questo Ateneo) di avere suggerito tale provvedimento, è merito del BRIOSCHI (allora Segretario generale al Ministero delle Pubblica Istruzione) di averlo adottato; per effetto di esso il BELTRAMI venne d' un tratto liberato dalle pastoje d' un umile impiego amministrativo e posto in grado di consacrare tutto sè stesso alle geniali occupazioni per le quali Natura avevalo creato.

In quell' ufficio il BELTRAMI non rimase a lungo; chè, dietro proposta di ENRICO BETTI, gli veniva offerto di succedere al MOSSOTTI (morto nel Marzo 1863) nel posto di Professore ordinario di Geodesia nell' Università di Pisa. Dopo lungo titubare accettò e, dopo qualche indugio — dovuto a studi preparatori al nuovo insegnamento, che egli compì a Milano nell' Osservatorio di Brera, sotto la guida sapiente di G. V. SCHIAPARELLI — nei primi di Febbrajo del 1864 passò alla nuova sede, ove avevalo chiamato un Decreto dell' 11 Ottobre 1863. A Pisa il BELTRAMI si trattenne tre anni scolastici; ma, nel Settembre 1866, le condizioni di salute della propria madre lo consigliarono a chiedere di essere restituito all' Università di Bologna, come successore di DOMENICO CHELINI nella cattedra di Meccanica razionale. Tale ufficio egli tenne sino all' Ottobre 1873, quando cioè, cedendo al seducente invito di andare a crescere il lustro della rinnovata Università di Roma, si trasferì nella capitale come titolare di Meccanica razionale ed incaricato di Analisi superiore.[1]) Ragioni di varia natura lo persuasero a lasciare, dopo tre anni, la Sapienza per assumere (Ottobre 1876) nell' Università di Pavia gli insegnamenti della Fisica matematica e della Meccanica superiore. Ma nella città eterna tornò quattordici anni appresso, quando, nella tristezza del vuoto lasciato per la morte di FELICE CASORATI, finì per cedere alle reiterate pressioni che gli venivano dai colleghi di colà: così, a partire dall' anno scolastico 1891—92, egli ricominciò a Roma le lezioni sopra le dottrine più elevate della Filosofia naturale, che non doveva interrompere se non pochi giorni prima della sua morte, lezioni di cui devono esistere delle redazioni accurate e che è che augurarsi vengano un giorno pubblicate, a maggior gloria del professore ed a vantaggio del progresso degli studi.

Membro delle più celebri accademie del mondo, successore del BRIOSCHI nella presidenza dell' Accademia dei Lincei, Senatore del Regno d' Italia,

1) Fra i discepoli che il BELTRAMI ebbe a Roma durante questa sua prima permanenza vanno rammentati ETTORE CAPORALI, RICCARDO DE PAOLIS e G. FRATTINI.

più volte chiamato — con votazione plebiscitaria — a sedere nel Consiglio superiore della Pubblica Istruzione, acclamato maestro da intere coorti di scienziati, nel pieno vigore della robusta sua intelligenza, confortato da una fedele compagna e non distratto dalle cure della paternità, sembrava che nulla gli rimanesse da desiderare, che molto ancora la scienza e la patria potessero da lui ragionevolmente attendere. Ma una malattia misteriosa lo minava sin dal 1896; e l'ala inesorabile della morte lo colpiva in Roma addì 18 Febbraio 1900, quando gli amici trepidanti concordemente facevano ardenti voti che la scienza chirurgica operasse per lui uno di quei miracoli a cui essa ci ha ormai abituati.

Tale per sommi capi è la vita di EUGENIO BELTRAMI, vita esemplare del pensatore, rigido e scrupoloso osservatore de' propri doveri, ma intento ad allontanare tutto che possa turbarlo o distrarlo delle sue occupazioni preferite. Gli unici episodî di una esistenza siffatta sono rappresentati dalle opere che fecero del povero impiegato ferroviario uno degli astri di prima grandezza del cielo scientifico italiano. All'esame di quelle fra esse relative alle matematiche pure, noi ora ci volgiamo. Non prima però di avere osservato essere stato da molti detto e ripetuto che il BELTRAMI fu uno dei discepoli del BRIOSCHI; ora se con ciò si vollero ricordati accidentali rapporti scolastici fra quei due sommi, nulla si può obbiettare; ma se invece si intese di ritrarre un' affinità intellettuale fra il BELTRAMI e colui che dipingeva sè stesso con le parole *io sono un calcolatore*[1]), nulla vi è di più falso: il semplice paragone di una pagina dell' uno con una dell' altro basta a dimostrarlo! Meglio è assai di considerare il BELTRAMI, assieme al CASORATI ed al CREMONA, come continuatori di quella benemerita Scuola pavese, che ebbe quale corifeo ANTONIO BORDONI, di quella scuola che benchè «di poema degnissima e di storia», non ha ancora trovato chi ne narrasse, con la debita larghezza, le gesta gloriose, chi mostrasse essere dessa stata, nella prima metà del Sec. XIX, il principale focolare di buoni studî matematici nella penisola.[2])

I.

Lo scritto che inaugura la carriera scientifica del BELTRAMI[3]) porta la data 1° Novembre 1861 ed ha come punto di partenza il noto

1) V. M. NÖTHER, *Francesco Brioschi* (Mathem. Annalen **50**, 1898, p. 491).

2) Preziosi materiali per tale storia ha apprestati il BELTRAMI stesso scrivendo quelle succose notizie su gli antichi professori di matematica dell' Università di Pavia che A. CORRADI pubblicò nella I Parte delle sue *Memorie e documenti per la storia dell' Università di Pavia* (Pavia, 1878).

3) *Intorno ad alcuni sistemi di curve piane.* Annali di matem. **4**, 1861, p. 102—108.

teorema: «il sistema delle trajettorie ortogonali di una serie di iperboli equilatere, aventi comuni gli assi, consta delle iperboli equilatere aventi per comuni asintoti gli assi delle prime». Il nostro geometra, nell' intento di generalizzarlo, si propose la questione di «trovare quei sistemi di curve piane i quali, venendo rotati per un angolo dato α intorno ad un punto del loro piano, segano i sistemi primitivi sotto un angolo costante λ parimente dato», e l' ha completamente risolta mediante questa proposizione: «Si assuma una funzione A di due variabili u e v, tale che non varî mutando rispettivamente u in $ue^{i\alpha}$ e v in $ve^{-i\alpha}$ [1]); indi si costituisca l' equazione

$$\frac{dv}{du}+A\left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{\lambda}{\alpha}-1}=0$$

e si integri: sia

$$F(u,v,C)=0$$

l' integrale di essa, completato da una costante arbitraria C. L' equazione

$$F(y+ix,\ y-ix,\ C)=0$$

apparterrà ad uno dei sistemi cercati. Variando in tutti i modi possibili la forma della funzione arbitraria A, si otterranno tutti i sistemi dotati della proprietà in discorso.» Prendendo ad es. $A=\text{cost.}$, quell' equazione differenziale s' integra immantinente e conduce al seguente sistema di curve

$$(y+ix)^{\frac{\lambda}{\alpha}}+(y-ix)^{\frac{\lambda}{\alpha}}=C.$$

Quando al rapporto $\frac{\lambda}{\alpha}$ si attribuisce uno dei valori 2, $\frac{1}{2}$, -1 questa equazione rappresenta, come rileva il BELTRAMI, un sistema risp. di iperbole equilatere, parabole e circoli; ma anche nel caso generale le curve del sistema rientrano in una categoria conosciuta: posto, infatti,

$$y\pm ix=\varrho e^{\pm i\omega},\quad \frac{\lambda}{\alpha}=-n,\quad C=2k^{-n},$$

l' equazione precedente diviene

$$\varrho^n=k^n\cos n\omega,$$

onde, al variare della costante k, rappresenta ∞^1 spirali sinusoidi. È, quindi, *merito del BELTRAMI di avere scoperta*, applicando un metodo generale, *una nuova e notevole prerogativa, esclusiva di una classe di curve, in cui molti rilevarono altri molteplici e singolari pregi.*

II.

L' elegante risultato, conseguito in questa ricerca di geometria infinitesimale del piano, non allettò il BELTRAMI a perseverare in un ordine di

1) Si può ad es. scegliere come funzione A una funzione arbitraria del prodotto uv.

idee relativamente elementare; egli si sentì attratto verso la teoria delle superficie, più bisognosa di perfezionamenti, più promettente di applicazioni, e nella quale egli era destinato a mietere tanti e così meritati allori. Ed infatti in due lavori, scritti a Milano il 1° Settembre 1862, egli prende già posto fra i discepoli e continuatori di GAUSS. Sorvoliamo su quello[1]), redatto in forma di lettera al compilatore degli Annali di matematica, avente carattere didattico ed il solo fine di far conoscere un' argomentazione semplicissima guidante all' equazione differenziale, in coordinate curvilinee, delle linee di curvatura d' una superficie, nonchè all' equazione quadratica avente per radici i raggi di curvatura principali in un punto della stessa; ed arrestiamoci invece sull' altro[2]), inspirato dalle note investigazioni di BRIOSCHI: *Intorno le sviluppoidi e le sviluppate* (Ann. delle scienze matem. e fis. 4, 1853).

Ivi all' antico concetto di sviluppoide viene suggerita l' ampia generalizzazione risultante della definizione seguente: «Data una linea arbitraria Γ (considerata come trajettoria), si chiama sviluppoide di Γ qualunque linea Σ tale che ogni sua tangente sia segata dalla prima sotto un angolo ω, funzione qualsivoglia delle coordinate del punto d' intersezione.» Che questa estensione sia ben lungi dall' essere oggetto di semplice curiosità emerge dal fatto che le sviluppoidi, intese nel loro significato più generale, godono di una proprietà che dianzi ritenevasi[3]) sussistere per le sole sviluppoidi ordinarie; tale proprietà, dal BELTRAMI stabilita con due metodi differenti, si enuncia come segue: »Qualunque sia la legge con cui varia da un punto all' altro l' angolo sotto cui le tangenti d' una sviluppoide sono segate dalla trajettoria, ciascuna sviluppoide è una linea geodetica della superficie luogo geometrico di tutte le sviluppoidi generate con la medesima legge.» — La ricerca delle sviluppoidi di una data linea dipende in generale da un' equazione differenziale ordinaria trovata dal BELTRAMI e la cui integrazione si riduce alle quadrature quando quella linea è piana: in tal caso i calcoli relativi si possono svolgere in tutti i loro particolari e conducono a formole esplicite elegantissime. Il problema inverso — cioè la determinazione delle curve (dette sviluppanti) seganti sotto un angolo, variabile con una data legge, le tangenti di un' altra linea data — si può affrontare con buon successo applicando le equazioni generali risolutrici del problema delle trajettorie, all' uopo poste sotto forma conveniente: si giunge così a formole simmetriche e generali, contenenti una quadratura,

1) *Di alcune formole relative alla curvatura delle superficie.* Annali di matem. 4, 1861, p. 283—284.

2) *Sulla teoria delle sviluppoidi e delle sviluppanti.* Ivi p. 257—283.

3) V. p. es. W. SCHELL, *Allgemeine Theorie der Kurven doppelter Krümmung* (Leipzig 1859), p. 100; zweite Aufl. (Leipzig 1898), p. 157.

le quali ricadono in altre formole anteriormente note, quando si supponga costante l'angolo ω. Nè va taciuto che le considerazioni generali svolte dal Beltrami, debitamente applicate, conducono anche a nuove proprietà delle sviluppoidi ordinarie; a renderne persuaso il lettore valga il seguente teorema con cui si chiude la memoria analizzata: «La superficie luogo delle sviluppoidi di angolo ω costante di una data linea, è una superficie del terz'ordine, contenente infinite circonferenze, e che può considerarsi come la trasformata per raggi vettori reciproci di un cilindro circolare.»

III.

Il lavoro di geometria infinitesimale che segue quello sulle sviluppoidi ne è separato da un intervallo di alcuni anni, occupati in parte da ricerche di cui parleremo più innanzi (§ XIII), in parte dagli studî che diedero per risultato una delle più importanti e famose scritture del Beltrami. Di tali studî sembra fungere quasi da saggio una lettera[1]) scritta al Grunert addì 20 Aprile 1864; essa ha per argomento la proposizione seguente, che il fondatore dell'Archiv aveva allora stabilito con calcoli, non privi di eleganza, ma certo non esenti da prolissità: «In un punto ellittico P di una superficie si considerino tutte le corrispondenti sezioni normali; la media aritmetica dei loro raggi di curvatura nel punto P è eguale alla media geometrica dei raggi principali di curvatura della superficie nello stesso punto P»; ora la considerazione dell' indicatrice della superficie relativa al punto P — osservò il Beltrami — combinata con l'espressione dell'area dell'ellisse in funzione degli assi, guida tosto a quel teorema.

Il fondamentale lavoro a cui sopra si fece allusione è quello che reca il modesto titolo di *Ricerche di analisi applicata alla geometria*[2]); la prima parte di esso è datata Ottobre 1864, la parola *fine* non ne fu mai scritta; la forma frammentaria sotto cui esso si presenta — la quale d'altronde corrisponde al titolo un po' vago che porta — ed i frequentissimi richiami che vi si trovano al *Traité de calcul différentiel* del Bertrand, uscito appunto nel 1864, fanno apparire non destituita di fondamento l'idea che si trovino in esso esposte le idee che nel Beltrami suscitò lo studio di quell'opera eminente. Quanto feconda fu tale lettura! Basti dire che gli è nelle

1) *Schreiben des Herrn Professor Eugenio Beltrami in Pisa an den Herausgeber über dessen in der Abhandlung: «Wichtiger allgemeiner Satz von den Flächen» in Theil XLI, S. 241 bewiesenen allgemeinen Satz von den Flächen*; Archiv der Mathem. **42**, 1864, p. 117. Cfr. Salmon-Fiedler, *Anal. Geom. des Raumes*, II. Teil, 3. Aufl. (Leipzig 1880), p. XIX.

2) Giornale di matematiche **2**, 1864, p. 267—282, 331—339, 355—375; **3**, 1865, p. 15—22, 33—41, 82—91, 228—240, 311—314.

Ricerche di analisi applicata alla geometria, che fanno il loro ingresso nella scienza quelle importantissime funzioni (invarianti di flessione) che, per la loro parentela con altre già introdotte da Lamé, si chiamano parametri differenziali[1]); collo stabilirne le prerogative più essenziali, il Beltrami ha loro assicurato per sempre un posto stabile nella scienza! Le considerazioni aventi per nocciolo queste nuove funzioni si riattaccano a quelle importantissime che il Casorati fece conoscere nella memoria intitolata *Ricerca fondamentale per lo studio di una certa classe di proprietà delle superficie curve* (Ann. di matem. **3—4**, 1860—61); esse non tardarono a divenire parte integrante dei trattati di geometria differenziale — basti ricordare uno dei migliori, quello del Bianchi[2]) — essendo state riconosciute le più proprie per giungere con generalità ed eleganza a quegli elementi delle superficie e delle linee in esse tracciate che non mutano comunque s'inflettano le superficie stesse: curvatura, curvatura geodetica, parallelismo geodetico, sviluppanti geodetiche, ecc.[3])

Non è lecito poi tacere che, nelle *Ricerche*, la teoria dei sistemi di linee nello spazio è presentata con una generalità dianzi ignota ed applicata, non soltanto ad ottenere nuovamente, ma anche ad aumentare considerevolmente le proposizioni riflettenti i sistemi di rette nello spazio, specialmente quelli relativi alle normali di una superficie. I risultati così ottenuti presero posto nella classica opera del Darboux[4]), onde ci basterà segnalare i due più cospicui. Uno consiste nella seguente generalizzazione del teorema di Malus-Dupin: «Se un fascio di raggi luminosi normali ad una superficie si rifrange alla superficie di un mezzo eterogeno, la

---

1) Ricordiamo che i parametri differenziali del primo ordine, misto e del second'ordine per la superficie definita dell'elemento lineare

$$ds^2 = E \cdot du^2 + 2F \cdot du \cdot dv + G \cdot dv^2$$

sono risp.

$$\frac{1}{EG-F^2}\left\{E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2\right\}$$

$$\frac{1}{EG-F^2}\left\{E\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial v} - F\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u} + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}\right) + G\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right\}$$

$$\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G\frac{\partial\varphi}{\partial u} - F\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E\frac{\partial\varphi}{\partial v} - F\frac{\partial\varphi}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}}\right)\right\}.$$

2) V. anche Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, T. II (Paris 1889), p. 500 e seg.

3) Una conferma della importanza che hanno le considerazioni svolte dal Beltrami sopra le funzioni invariabili è offerta dalla memoria di K. Żorawski, *Über Biegungsinvarianten* (Acta Mathem. **16**), ove il nome di lui è dato ad un' intera classe di invarianti di flessione.

4) Op. cit., T. III (Paris 1894), p. 348.

condizione necessaria e sufficiente affinchè i raggi rifratti siano pure normali ad una superficie è che le linee lungo le quali è costante l'indice di rifrazione incontrino ortogonalmente i raggi incidenti.» L'altro è compendiato nella seguente proposizione, correlativa, in un certo senso, ad un noto teorema del TERQUEM[1]): «Se i piani tangenti comuni a due superficie toccano tanto l'una quanto l'altra nei punti di due loro linee di curvatura, la distanza dei punti corrispondenti di queste due linee è costante»; e viceversa «Se i piani tangenti comuni a due superficie toccano l'una di queste superficie secondo una linea di curvatura e se inoltre è costante la distanza dei punti corrispondenti delle due linee di contatto, anche la seconda di queste linee è di curvatura della superficie su cui è tracciata».

Nelle *Ricerche* del BELTRAMI s'incontra pure quella notevole costruzione del raggio di curvatura geodetica di una linea tracciata sopra una superficie qualunque che illustri trattatisti[2]) diffusero nelle scuole di tutto il mondo civile. L'inventore di essa vi ha collegate alcune importanti considerazioni sopra le superficie per le quali i raggi principali di curvatura in un punto qualunque sono ciascuno una data funzione dell'altro, dimostrando due teoremi, inversi l'uno dell'altro, da cui scaturiscono quelli sulle evolute di tali superficie, che sono i primi grazie a cui il WEINGARTEN gode di sì alta e ben meritata rinomanza.[3]) Il BELTRAMI applicò questi risultati a due classi di superficie, una che era nota anteriormente, l'altra la cui prima considerazione appartiene — se non c'inganniamo — appunto a lui; la prima è quella delle superficie di curvatura costante negativa, di cui vedremo essersi egli poi a più riprese occupato; l'altra è quella delle superficie per cui è costante ($=k$) la differenza dei raggi principali di curvatura; ogni superficie della prima categoria ha per evoluta una superficie applicabile ad una di rivoluzione d'area minima, mentre l'evoluta di una superficie della seconda è di curvatura costante negativa $\left(=-\frac{1}{k^2}\right)$.

---

1) «Se la linea d'intersezione di due superficie è di curvatura per entrambe, l'angolo sotto cui si tagliano è costante in tutti i punti di essa linea»; Nouv. ann. de mathém. **11**, 1852, p. 402. Cfr. BRIOSCHI, *Sulle linee di curvatura delle superficie* (Annali di sc. matem. **4**, 1852; ovvero *Opere matematiche di* F. BRIOSCHI, T. I, Milano 1901, p. 63).

2) BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale* (Pisa 1894), p. 228; DARBOUX op. cit. T. III (Paris 1894), p. 120.

3) Cfr. le memorie *Über eine Klasse aufeinander abwickelbarer Flächen* (Journ. für Mathem. **59**, 1861) e *Über die Oberflächen, für welche einer der beiden Hauptkrümmungshalbmesser eine Funktion des anderen ist* (Id. **62**, 1863).

IV.

Benchè quanto precede sia sufficiente a dimostrare l'importanza delle *Ricerche di analisi applicata alla geometria*, pure non deve tacersi che essa è ancora aumentata dal fatto che esistono in quel lavoro sia in germe, sia nel loro primo stadio di sviluppo, molte idee originali che fornirono il tema ad altri lavori del BELTRAMI di cui parleremo più innanzi. Ma intanto va notato come, circa nello stesso tempo, la lettura di una nota di J. DE LA GOURNERIE *Sur la courbure de la section faite dans une surface par un plan tangent*[1]) gli suggerì una ricerca[2]) i cui frutti sono compendiati nelle due seguenti proposizioni: I. Il raggio di curvatura in un punto di una linea asintotica sopra una superficie qualunque è sempre eguale ai due terzi di quello della sezione prodotta nella superficie dal piano tangente nel punto considerato (è sottinteso che si considera il ramo di tale sezione che è tangente a quella linea asintotica).[3]) II. La tangente mobile di una linea a doppia curvatura descrive sopra uno qualunque dei suoi piani osculatori una curva tangente a quella linea nel punto di osculazione; il raggio di curvatura della linea sghemba in questo punto è sempre eguale a tre quarti del raggio di curvatura della curva piana nel medesimo punto.[4])

Questi due bei teoremi richiamarono l'attenzione di un grande geometra francese — OSSIAN BONNET — il quale si affrettò a pubblicare[5]) due formole, da cui può farsi scaturire l'espressione algebrica del primo di essi. Il BELTRAMI, non solo le corredò di dimostrazioni convincenti[6]), ma seppe trarne nuove conseguenze; su una soltanto vogliamo arrestarci un istante, cioè sul teorema seguente: «i raggi di torsione delle due asintotiche incrociantisi in un punto iperbolico di una superficie sono eguali fra loro ed alla media geometrica dei raggi principali di curvatura della superficie in quel punto». Ora, fatte le debite convenzioni riguardo

1) Journal de mathém. 3_2, 1858.

2) *Sur la courbure de quelques lignes tracées sur une surface* (Nouv. ann. de mathém. 4_2, 1865, p. 258—267).

3) Riprodotto in DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, T. II (Paris 1889), p. 398.

4) A mettere in luce l'importanza di questo teorema è sufficiente notare che, in virtù di esso, la costruzione del raggio di curvatura in un punto di una linea sghemba è ridotta alla corrispondente costruzione per una linea piana, di regola più semplice; p. es. quella costruzione, per le cubiche gobbe riesce subito ricondotta all'analoga per le coniche.

5) Nouv. ann. de mathém. 4_2, 1865, p. 267.

6) *Dimostrazione di due formole del sig. Bonnet* (Giorn. di matem., 4, 1866, p. 123—127).

al segno da attribuirsi alla torsione, non scaturisce da questa proposizione immediatamente quello che porta, per consuetudine invalsa[1]), il nome di teorema di Enneper? *non sarebbe, quindi, più conforme a verità e giustizia, di chiamarlo in avvenire teorema di Beltrami-Enneper?*

Il secondo dei surriferiti teoremi non rappresenta l'unico contributo che il Nostro abbia dato alla geometria infinitesimale delle linee sghembe; per converso si è a lui debitori di una considerazione della quale è notoria l'immensa fecondità, cioè del movimento che subisce, allo spostarsi di un punto sopra una curva, il triedro avente per spigoli le direzioni positive della tangente, della normale principale e della binormale. In un lavoro[2]), scritto a Bologna nel Dicembre 1866, il Beltrami ha determinati gli elementi del moto elicoidale infinitesimo mediante cui quel triedro passa da una qualunque sua posizione alla consecutiva; inoltre fece più tardi conoscere[3]) un altro procedimento, immaginato dal Chelini per raggiungere lo stesso scopo; finalmente in una memoria di cinematica pura[4]) appartenente ad epoca posteriore (è datata 31 Marzo 1872) ed inspirata dal *Treatise on natural philosophy* di Thomson e Tait, egli diede nuove prove della fertilità di quella considerazione, sia per la scienza dei moti che per quella delle figure: così, fra l'altro, egli giunse a scoprire un'estesa legge di reciprocità[5]) abbracciante tanto la teoria delle tangenti conjugate del Dupin, quanto quella delle tangenti sfero-conjugate del Cremona.[6]) Che a ciò non si restringa il campo di applicabilità di siffatta considerazione riesce palese a chiunque ricordi quanto spesso il Darboux abbia adoperato, nella sua grande opera, il movimento ad un parametro di un triedro.

V.

Vedremo più avanti (§ VII) come la scoperta di quella nuova proprietà delle linee sghembe non sia l'unica manifestazione dell'abilità

1) Bianchi, *Lezioni* citate p. 118 e 125; Darboux, vol. cit. p. 399; H. Stahl *und* V. Kommerell, *Die Grundformeln der allgemeinen Flächentheorie* (Leipzig 1893), p. 89; ecc.

2) *Di una proprietà delle linee a doppia curvatura* (Giorn. di matem. **5,** 1867, p. 21—23).

3) Giorn. di matem. **5,** 1867, p. 190—191.

4) *Del moto geometrico di un solido che ruzzola sopra un altro solido* (Giorn. di matem. **10,** 1872, p. 103—115). Badi chi legge questo lavoro che le lettere E, F, G, per una svista dello stampatore, hanno due distinti significati.

5) «Se di due corpi rigidi posti a contatto per un punto della loro superficie, l'uno incomincia a ruzzolare sull'altro (senza strisciare) vi è sempre perfetta reciprocanza fra la direzione (iniziale) della linea di contatto e quella dell'asse istantaneo intorno al quale ha luogo la rotazione (iniziale)».

6) *Sulle tangenti sfero-conjugate* (Annali di scienze matem. e fis., **6,** 1855).

posseduta dal Nostro nell' associare in fecondo connubio cinematica e geometria. Ma in questo momento richiamano l' attenzione nostra due lavori, pieni di vedute originali, uno datato da «Pisa, Maggio 1865»[1]), l'altro letto a Venezia il 10 Agosto del medesimo anno[2]): essi concordano nella sostanza, ma differiscono per la forma; hanno per soggetto la flessione che può subire una superficie rigata quando si impone alle sue generatrici di conservarsi rettilinee.

«La difficoltà [della teoria delle superficie flessibili]», nota il Beltrami nell' esordio del meno conosciuto di quei lavori[2]), «per quanto mi sembra, procede principalmente da ciò, che non possedendo noi una chiara idea del modo in cui, nel caso generale, può effettuarsi la flessione di una superficie curva, anco in un tratto di poca estensione, siamo obbligati ad affidarci intieramente alla nuda analisi, partendo dalle formole che caratterizzano la inestendibilità; e non possiamo quasi mai giovarci di quelle considerazioni ausiliari, dirette ed indirette, che, nella maggior parte degli ordinari problemi di geometria analitica, conducono così prontamente ed elegantemente allo scopo finale.» Ma quando si tratti di superficie generabili dal moto di una retta «la difficoltà della questione viene in gran parte rimossa dal fatto che, se si fa astrazione da quelle flessioni per effetto delle quali le generatrici primitive cessano d'essere rettilinee, ci è possibile avere un' idea ben chiara e facile del modo in cui la flessione può prodursi. Infatti ogni superficie di questa classe si può decomporre mentalmente in un numero infinito di zone infinitamente sottili, ciascuna compresa fra due generatrici contigue, e si può immaginare che la flessione della superficie avvenga mediante una rotazione infinitesima eseguita da ciascun di queste zone intorno alla generatrice che essa ha in comune con la zona precedente». Appunto grazie a questa relativa facilità che presenta, il problema della deformazione delle superficie rigate venne risolto sin dall' anno 1838 da F. Minding[3]), il quale mostrò potersi esprimere analiticamente mediante un' unica funzione arbitraria le innumerevoli forme che può assumere, per semplice flessione, una superficie rigata. Ma il determinare tale funzione per modo che la superficie corrispondente soddisfaccia a condizioni prestabilite offre difficoltà di regola grandi e talvolta insormontabili, onde il Beltrami credette opportuno sostituire il procedimento di calcolo ideato dal ricordato geometra tedesco con altro meno rigido, che

1) *Sulla flessione delle superficie rigate* (Annali di matem. 7, 1865, p. 105—138).

2) *Intorno alla flessione delle superficie rigate* (Atti dell' Ateneo Veneto 2_2, 1865, p. 503—518).

3) V. gli articoli *Über die Biegung gewisser Flächen* (Journ. f. Mathem. 18, 1838).

porta oggi il nome di *metodo di* BELTRAMI.[1]) Il concetto di esso è così semplice e limpido che non riuscirà discaro al lettore il trovarlo qui ricordato in poche linee.

Rappresentiamo con ξ, η, ζ le coordinate ortogonali di un punto di una linea qualsivoglia (direttrice) tracciata sopra una data superficie rigata, linea soggetta all'unica condizione di non confondersi con una generatrice. Della generatrice passante nel punto (ξ, η, ζ) chiamiamo (x, y, z) un punto qualsivoglia e l, m, n i coseni di direzione. Sarà quindi

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

e come rappresentazione analitica della rigata si potrà assumere la seguente terna di equazioni:

$$x = \xi + v\,l, \quad y = \eta + v\,m, \quad z = \zeta + v\,n,$$

v essendo un parametro di evidente significato geometrico. Supponendo tanto l, m, n quanto ξ, η, ζ espressi in funzione dell'arco u della direttrice, e indicando con accenti le derivate rispetto a u, si avrà

$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = 1$$

Si ponga ora:

$$l'\,\xi' + m'\,\eta' + n'\,\zeta' = \varkappa, \quad l'^2 + m'^2 + n'^2 = \varepsilon'^2, \quad l\,\xi' + m\,\eta' + n\,\zeta' = \cos\Theta;$$

Θ sarà l'angolo della generatrice con la direttrice e le quantità fondamentali per la rigata in questione saranno

$$E = 1 + 2\,\varkappa\,v + \varepsilon'^2\,v^2, \quad F = \cos\Theta, \quad G = 1.$$

Immaginiamo ora che qnella superficie venga deformata senza cessare di essere rigata ed indichiamo con le stesse lettere adoperate prima, munite dell'indice 1, le quantità analoghe a quelle considerate nella rigata primitiva, dopo di avere notato che le variabili indipendenti u e v assumeranno gli stessi valori nei punti corrispondenti delle due snperficie; l'identità degli elementi lineari di queste sarà espressa dalle relazioni seguenti:

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1, \quad \xi_1'^2 + \eta_1'^2 + \zeta_1'^2 = 1$$

$$l_1'^2 + m_1'^2 + n_1'^2 = \varepsilon'^2, \quad l_1\,\xi'_1 + m_1\,\eta'_1 + n_1\,\zeta'_1 = \cos\Theta, \quad l'_1\,\xi' + m'_1\,\eta' + n'_1\,\zeta' = \varkappa.$$

Le sei funzioni ξ_1, η_1, ζ_1, l_1, m_1, n_1 (di u) determinatrici della rigata trasformata, essendo in conseguenza soggette a sole cinque equazioni di condizione, una di esse è arbitraria o — per maggiore simmetria — tutte sei si possono esprimere mediante una funzione arbitraria. Ora mentre il MINDING propose di introdurre sempre nel calcolo siffatta funzione, il BELTRAMI sostenne essere preferibile ragionare sempre su quel

1) BIANCHI, *Lezioni* p. 217.

sistema di equazioni. Che egli si trovasse dalla parte della ragione è dimostrato dal fatto che pervenne così, senza ricorrere a calcoli complicati, ad un grande numero di nuovi risultamenti, la maggior parte dei quali ottennero già un posto stabile nella scienza[1]): ne riferiremo qui alcuni come prova dell'eccellenza dal metodo che il Nostro propose: «Qualsia superficie rigata può sempre venire trasformata per via di semplice flessione in modo: 1° che una sua linea geodetica divenga rettilinea o si muti in un'elica cilindrica; 2° che una linea arbitraria tracciata su di essa divenga un'asintotica od una linea di curvatura della trasformata, 3° che una sua linea qualsivoglia divenga o piana o linea di contatto della superficie trasformata con una superficie cilindrica, 4° che le generatrici conservino le loro direzioni.»

Osserva da ultimo il BELTRAMI che in generale non è possibile di trasformare la direttrice della rigata in altra linea di specie assegnata, dal momento che ciò imporrebbe due condizioni alla trasformazione, mentre non si può disporre che di una funzione; tuttavia può accadere che la trasformazione sia effettuabile, e per potere giudicare *a priori* di tale possibilità egli stabilisce un'equazione fra gli elementi intrinseci della direttrice, la quale egli a ragione considera per fondamentale nella teoria delle rigate, in quanto esprime una proprietà della direttrice la quale si conserva comunque si fletta la rigata su cui questa è tracciata.[2])

VI.

Nei lavori del BELTRAMI sin qui esaminati le considerazioni analitiche rappresentano soltanto il mezzo impiegato per giungere alla scoperta di verità geometriche; in quello di cui ora stiamo per occuparci[3]) l'intento diretto è invece il perfezionamento della teoria delle funzioni di variabili complesse, e solo incidentalmente vi si incontrano proposizioni di geometria. È desso il frutto dello svolgimento di idee consegnate nelle *Ricerche di analisi applicata alla geometria;* è ivi posto e felicemente risolto il problema di «estendere la teoria delle funzioni di variabili complesse per modo da servirsi, invece che dell'ordinario piano di GAUSS, di una superficie de-

1) DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, T. III (Paris 1894), p. 298.

2) Di questa proprietà si conosce l'espressione nel linguaggio proprio dell'algebra; ma crediamo non ne sia ancora stato dato l'enunciato in linguaggio comune: in altre parole, riteniamo tuttora ignota la completa interpretazione geometrica *dell'equazione di BELTRAMI.*

3) *Delle variabili complesse sopra una superficie qualunque* (Annali di matem. 1_2, 1868, p. 329—366); memoria datata Dicembre 1867. Le formole ivi esposte vennero più volte sfruttate da F. KLEIN nel suo bell'opuscolo *Über RIEMANNS Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale* (Leipzig 1882).

finita dal suo elemento lineare $ds^2 = E \cdot du^2 + 2F \cdot du \cdot dv + G \cdot dv^2$». Per sciogliere tale questione il BELTRAMI osserva che se si pone

$$ds^2 = (U du + V dv)(U du + V' dv)$$

$\left(\text{onde } U = \sqrt{E},\ V = \frac{F+iH}{U},\ V' = \frac{F-iH}{U},\ H = \sqrt{EG-F^2}\right)$ e se, mediante una rotazione attorno al punto (u, v) l'elemento (du, dv) si cangia nell'elemento $(\delta u, \delta v)$, il binomio differenziale complesso $U\delta u + V\delta v$ si ottiene dall'analogo binomio $Udu + Vdv$, moltiplicando quest'ultimo pel fattore $e^{i\varepsilon}$, ε essendo l'ampiezza della rotazione. È questa una proprietà analoga a quella posseduta nel piano dal binomio finito $u + iv$, considerato come raggio vettore uscente dall' origine. La medesima proprietà ha luogo anche se il binomino $Udu + Vdv$ si moltiplica per una funzione qualunque delle u, v, in particolare sussiste pel binomio

$$\varkappa(Udu + Vdv) = dp + idq = dw,$$

che si ottiene moltiplicando il binomio primitivo per uno dei suoi fattori integranti. Emerge da ciò che, quando si voglia applicare vantaggiosamente la teoria delle variabili complesse e delle loro funzioni allo studio delle superficie, non è la variabile $u + iv$ che conviene scegliere, ma bensì quella che nasce dall' integrazione del binomio $Udu + Vdv$, previamente moltiplicato per un suo fattore integrante $\varkappa$; ora, benchè la determinazione di una tale variabile dipenda da una integrazione generalmente non eseguibile, pure le funzioni di essa, considerate per rapporto alle primitive variabili, posseggono delle prerogative speciali sufficienti a definirle ed assegnabili in generale *a priori*. Tale è quella espresso dal teorema seguente: «tutte le funzioni $f = \varphi + i\psi$ di w sono caratterizzate dall'avere nullo il parametro differenziale del I ordine, mentre le funzioni reali φ e ψ hanno ciascuna nullo il parametro differenziale del II ordine.» Essendo inoltre $\Delta_1\ \varphi = \Delta_1\ \psi$ e $\Delta \cdot \varphi\,\psi = 0$ «le curve $\varphi = \text{cost.}$, $\psi = \text{cost.}$ dividono la proposta superficie in quadrati infinitesimi»; inoltre — pure analogamente a ciò che succede per le ordinarie funzioni di variabili complesse — «data una delle funzioni φ, ψ l'altra è determinata». Altre analogie delle nuove funzioni con le antiche svela la considerazione dell'integrale doppio $\Pi = \int\int \Delta \cdot \varphi\psi \cdot d\omega$, ove $d\omega = Hdu \cdot dv$; essa infatti guida alle seguenti formole (ove s è l'arco della linea di integrazione e n ne è la normale interna):

$$-\Pi \begin{cases} = \int \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} ds + \int\int \varphi \cdot \Delta_2 \psi \cdot d\omega \\ = \int \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds + \int\int \psi \cdot \Delta_2 \varphi \cdot d\omega, \end{cases}$$

e quindi a quest'altra:

$$\iint \left(\varphi \cdot \Delta_2 \psi - \psi \cdot \Delta_2 \varphi\right) d\omega + \int \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right) ds = 0.$$

Queste relazioni, di cui è palese l'affinità con altre notissime, conducono a concludere che «se in un punto O, non appartenente alla linea d'integrazione, la funzione ψ diviene infinita come $\log \frac{1}{r}$ (ove r è la distanza geodetica di O da un punto di quella linea), allora il valore φ_0 della funzione φ nel punto O è dato dalla formola

$$2\pi\varphi_0 = \iint (\varphi \cdot \Delta_2 \psi - \psi \cdot \Delta_2 \varphi)\, d\omega + \int \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right) ds,$$

generalizzazione di altra conosciutissima formola. — Aggiungiamo che, quantunque il fattore integrante $\varkappa$ non sia di regola assegnabile, $\Delta_2 \log \varkappa$ ha un espressione generale elegante, cioè la seguente

$$\frac{1}{H} \left\{ \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{U}{H} \left(\frac{\partial U}{\partial u} - \frac{\partial V}{\partial v} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{V}{H} \left(\frac{\partial U}{\partial u} - \frac{\partial V}{\partial v} \right) \right] \right\}.$$

Inoltre $\log |\varkappa|$ entra in parecchie formole notevoli: così $\Delta_2 \log |\varkappa|$ misura la curvatura della superficie nel punto (u, v) e $-\int \frac{\partial \log |\varkappa|}{\partial n} ds$ misura la curvatura integra della porzione di superficie a cui l'integrazione è estesa.

Per quanto queste relazioni siano sufficienti a porre fuor di questione la parte di protagonisti che i parametri differenziali rappresentano nella geometria sopra una superficie, pure non sono le uniche del genere. Ed il Beltrami in un altro bel lavoro[1]), scritto a Bologna il 15 Marzo 1869 per manifestare il proprio appoggio ad un nuovo grande giornale matematico, allora fondato dal Clebsch, dopo di avere compendiati, coordinandoli, molti teoremi anteriormente pubblicati, fece conoscere, assieme ad altre nuove proposizioni, la seguente formola

$$\lim_{\varrho=0} \left(\Delta_2 \log \frac{1}{\varrho}\right) = \frac{1}{3} \frac{1}{R_1 R_2},$$

ove ϱ è la distanza geodetica fra i punti (u, v) e $(0, 0)$ mentre R_1 e R_2 sono i raggi principali di curvatura in quest' ultimo punto della superficie considerata. Nello stesso scritto il Beltrami ha pure insegnate parecchie formole, in cui compare il secondo parametro differenziale, nel senso di Lamé, di una funzione di tre variabili indipendenti $\left(\text{cioè l' espressione } \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)$, somministrando così una nuova prova dell' importanza di esso nella geometria a tre dimensioni: ci asteniamo dal riferirle essendo consegnate in una raccolta scientifica che ogni matematico tiene costantemente sul proprio tavolo da lavoro.

1) *Zur Theorie des Krümmungsmaſses* (Mathem. Ann. 1, 1869, p. 575—582).

VII.

Mentre con questi scritti il BELTRAMI perfezionava in tanti punti importanti la teoria delle coordinate curvilinee sopra una superficie e — nella seduta del 18 Luglio 1868 — con altro lavoro intratteneva i propri colleghi dell' Istituto Lombardo sopra l' applicazione che può ricevere alla teoria delle linee geodetiche il nesso vigente fra le equazioni dinamiche, le equazioni isoperimetriche e le equazioni a derivate parziali[1]) del primo ordine, non perdeva d'occhio le esigenze della scuola, e proponevasi di diffondere, anche fra gli ignari dei metodi a cui s'informano le *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, i più cospicui risnltati ivi consegnati. A siffatto intendimento s'informa una lettura tennta all'Ateneo Veneto il 25 Giugno del medesimo anno[2]); nella quale egli fece conoscere un calcolo diretto per dimostrare, col semplice ausilio di coordinate cartesiane, il «celeberrimo teorema di GAUSS» sull'invariabilità per flessione della curvatura di una superficie in un suo punto e quello analogo del MINDING relativo alla curvatura geodetica di una linea qualunque tracciata su di essa.

Nello stesso anno 1868 veniva pubblicata, tra le memorie dell'Accademia di Berlino, l'*Allgemeine Theorie der geodätischen Dreiecke*, con cui il CHRISTOFFEL gettava i fondamenti della trigonometria sopra una superficie qualunque. Il BELTRAMI ne misurò subito il grande valore; e, non pago di farne argomento di un articolo bibliografico pel Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques[3]), vi arrecò dei complementi cospicui, che fece conoscere nell' adnnanza tenuta dall' Istituto Lombardo il 1° Luglio 1869.[4]) Per determinare in che cosa consistano ed a che cosa ammontino, fa duopo ricordare come sia definito il nuovo elemento introdotto nella scienza dal CHRISTOFFEL sotto il nome di lnnghezza ridotta di un arco di geodetica. Dati sopra una superficie curva due punti a, b, se intorno ad a si fa girare di un angolo infinitesimo $d\omega$ la geodetica ab, l'archetto generato dall'altro punto b, non è misnrato dal prodotto dell'arco ab per $d\omega$, come succede nel piano, ma da qnello di un'altra funzione (ab) per lo stesso $d\omega$; ora è appunto la funzione (ab) che si chiama lunghezza ridotta dell'arco ab. Essa dipende in generale da qnattro variabili, cioè dalle coordinate de' punti a, b della superficie; ma si riduce a dipendere da due sole se quei due punti

1) *Sulla teoria delle geodetiche* (Rend. del r. Instituto Lombardo 1_2, 1868, p. 708—719).

2) *Sulla teoria generale delle superficie* (Atti dell'Ateneo Veneto 5_2, 1868, p. 535—542).

3) Bulletin des sc. mathém. 1, 1870, p. 169—171.

4) *Intorno ad un nuovo elemento introdotto dal Sig. CHRISTOFFEL nella teoria delle superficie* (Rend. del r. Ist. Lombardo, 2_2, 1869, p. 853—863).

appartengono ad una assegnata geodetica. Col simbolo $[\alpha r]$ e col nome di ascissa ridotta il CHRISTOFFEL designa poi una funzione che per $\alpha < r$ differisce soltanto pel segno dalla lunghezza ridotta (αr); secondo l'or citato geometra, essa è definita dall'equazione differenziale

$$\frac{\partial^2[\alpha r]}{\partial r^2} + k_r[\alpha r] = 0 \quad \text{con le condizioni} \quad [\alpha r] = 0 \text{ e } \frac{\partial[\alpha r]}{\partial r} = 1 \quad \text{per } r = \alpha;$$

qui k_r è la curvatura della superficie nel punto r. Ma l'ascissa ridotta gode eziandio della proprietà espressa dall'equazione

$$\frac{\partial^2[\alpha r]}{\partial \alpha \cdot \partial r} = \frac{1}{[\alpha r]^2};$$

e di ciò il BELTRAMI seppe trarre profitto per concludere la seguente espressione generale dell'ascissa ridotta mediante una funzione φ di una sola variabile:

$$[\alpha r] = \frac{\varphi(r) - \varphi(\alpha)}{\sqrt{\varphi'(r) \cdot \varphi'(\alpha)}}.$$

La funzione ausiliare φ soddisfa poi all'equazione differenziale seguente:

$$\frac{2\varphi'\varphi''' - 3\varphi''^2}{\varphi'^2} = 4k_r;$$

onde, se $\bar{\varphi}$ ne è un integrale particolare e p, q, p', q' sono quattro costanti tali che $\begin{vmatrix} p & q \\ p' & q' \end{vmatrix} \neq 0$, sarà

$$\frac{p\bar{\varphi} + q}{p'\bar{\varphi} + q'}$$

l'integrale generale. Nel caso speciale in cui la superficie considerata sia di curvatura costante k, si ritrova così la formola

$$[\alpha r] = \frac{\operatorname{sen}\left(\overline{r - r_0}\sqrt{k}\right)}{\sqrt{k}}$$

dovuta al CHRISTOFFEL. Nel caso generale poi, se si scrive l'equazione differenziale del terz'ordine soddisfatta dalla φ sotto la forma

$$\frac{\varphi'''}{\varphi'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^2 = 2k_r,$$

si ravvisa tosto nel primo membro la funzione che CAYLEY ha chiamato Schwarzian derivative[1]) per ricordare che lo SCHWARZ la studiò in una memoria[2]) circa contemporanea a quella del BELTRAMI che attualmente ci occupa: la presenza di siffatta funzione in una ricerca di geometria differenziale non recherà alcuna meraviglia a chi ricordi come essa s'in-

1) *On the Schwarzian derivative and the polyedral functions* (Trans. of the Cambridge philos. society, **13** : 1, 1881; oppure *The collected mathem. Papers*, T. XI, p. 149 e seg.).

2) *Über einige Abbildungsaufgaben* (Journ. für Mathem. **70**, 1869).

contri[1]) già nelle antiche indagini di LAGRANGE *Sur la construction des cartes géographiques* (Mém. Berlin 1779).

Di altre formole eleganti ottenute dal BELTRAMI ci esoneriamo dal parlare; ma ciò che va ricordato è il legame che più tardi (4 Marzo 1872) egli seppe stabilire fra esse e quelle su cui si erige la geometria metrico-projettiva di CAYLEY-KLEIN. La breve nota[2]) in cui è consegnata tale osservazione precede di poco l'ultimo lavoro[3]) che il BELTRAMI consacrò alla Geometria infinitesimale. Esso concerne uno dei temi più elevati ed importanti di tale disciplina, un tema che il Nostro aveva già sfiorato nelle *Ricerche di analisi applicata alla geometria*, cioè la teoria delle linee e superficie ortogonali. Il BELTRAMI lo ha trattato servendosi di due triedri trirettangoli, uno dei quali sia mobile con una legge determinata della variazione di tre parametri indipendenti; introducendo poi alcune quantità già considerate dal BERTRAND, nonchè altre di carattere più generale o di più palese significato geometrico, egli arrivò per la via più naturale al teorema di DUPIN sui sistemi tripli ortogonali ed alle non meno celebri formole di LAMÉ. «La semplicità colle quali queste relazioni vengono qui dimostrate», nota egli finendo, «potrà forse conciliare qualche attenzione sul processo analitico esposto»; che non errasse in tale apprezzamento del proprio metodo è dimostrato dal fatto che, indipendentemente da lui, il DARBOUX, per stabilire le formole fondamentali della teoria dei sistemi ortogonali, ricorse appunto[4]) ad un triedro trirettangolo, la cui posizione nello spazio è funzione di tre parametri.

VIII.

Se con le opere sin qui discorse il BELTRAMI arrecò dei contributi di valore permanente alle principali sezioni della teoria generale delle superficie, con quelli a cui ora ci vogliamo mostrò di non sdegnare lo studio di certe classi di superficie.

Nel primo, che in ordine cronologico incontriamo (fu scritto a Pisa il 14 Aprile 1865) estese a tutte le superficie di rotazione una bella proprietà scoperta da LIOUVILLE[5]) in quella generata dalla rotazione della trattrice attorno al proprio asintoto; gli si offerse così l'occasione per sta-

1) SCHWARZ, *Gesammelte mathemat. Abhandlungen* (Berlin 1890), p. 351.

2) *Sulla teoria analitica della distanza* (Rend. del r. Istituto Lombardo, 5_2, 1872, p. 294—296).

3) *Di un sistema di formole per lo studio delle linee e delle superficie ortogonali* (Id. p. 474—484).

4) *Leçons sur les systèmes orthogonales et les coordonnées curvilignes*, T. I (Paris 1898), p. 184.

5) V. la Note IV all' *Application d'analyse à la géométrie* di MONGE (Paris 1850).

bilire alcune proprietà di questa curva, tanto eleganti e pur così poco note, che meritano di venire riferite: «I. La differenza fra la lunghezza (infinita) della trattrice e quella (parimente infinita) del suo asse è finita ed equale a $2r$ $(1 - \log 2)$, r essendo la lunghezza costante delle tangenti della curva.[1]) II. Il solido generato dalla detta trattrice ha la stessa superficie e lo stesso volume di una sfera di raggio r.» La ricerca dell' evoluta della trattrice guida ad una curva notissima (la catenaria); mentre quella delle sue evolventi mena a curve ognuna delle quali rotando è capace di generare una superficie per cui è costante la differenza fra i raggi di curvatura in qualunque punto: così il Beltrami fu ricondotto ad occuparsi di una classe di superficie che aveva incontrato nelle sue *Ricerche* (cf. § III) e di cui in tale occasione notò una nuova generazione.

La superficie di rotazione avente per meridiano la trattrice venne studiata ancora dal Beltrami per altri scopi, come diremo più avanti (v. § X); ma ora vogliamo rilevare come lo studio della memoria del Dini *Sulle superficie nelle quali la somma dei due raggi di curvatura principale è costante*[2]) lo abbia indotto a proporsi di «trovare tutte le superficie gobbe i cui raggi principali di curvatura hanno fra loro in ciascuno punto una relazione costante non data *a priori*» e, contemporaneamente al Dini, trovò[3]) che le sole elicoidi godono di quella prerogativa, risultato bellissimo che ben presto venne collocato fra i teoremi classici della geometria infinitesimale.[4])

Più esteso è il lavoro sulle superficie ad area minima[5]), presentato dal Beltrami all' Accademia di Bologna il 5 Marzo 1868. «Ce beau travail», scrive il Darboux[6]), «contient une Note historique très-étendue qui nous a permis, du moins nous l'espérons, de n'oublier aucun travail important publié sur notre sujet avant 1860»; ma esso contiene altro ancora. Notiamo anzitutto alcune relazioni — le quali portano il nome di *formole di Beltrami*[7]) — che dànno i parametri differenziali misto e di

1) Benchè il Beltrami non l' abbia avvertito, pure questo teorema appartiene ad una categoria di proposizioni concernenti la differenza fra archi di curve e lunghezze di asintoti, della quale Paolo Fuss somministrò i primi elementi nella memoria intitolata *Quantum differat longitudo arcus curvae ab asymptota, utraque in infinitum extensa, inquiritur* (Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg **9**, 1824).

2) Annali di matem. **7**, 1865.

3) *Risoluzione di un problema relativo alla teoria della superficie gobbe* (Annali di matem. **7**, 1865, p. 139—150).

4) Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, T. III (Paris 1894), p. 314.

5) *Memoria sulla teoria generale delle superficie d' area minima* (Mem. della acc. delle scienze dell' Istituto di Bologna 7_2, 1868, p. 411—481).

6) Id. T. I (Paris 1887), p. 280.

7) Bianchi, *Lezioni* pag. 114.

second' ordine delle coordinate x, y, z di un punto di una superficie in funzione dei coseni di direzione X, Y, Z della normale e dei raggi principali di curvatura; sono le seguenti:

$$\Delta_1 \cdot yz = 1 - YZ \quad , \quad \Delta_1 \cdot zx = 1 - ZX \quad , \quad \Delta_1 \cdot xy = 1 - XY$$

$$\Delta_2 x = -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) X, \quad \Delta_2 y = -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) Y, \quad \Delta_2 z = -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) Z$$

le quali fanno sistema con le seguenti di BRIOSCHI:

$$\Delta_1 x = 1 - X^2 \quad , \quad \Delta_1 y = 1 - Y^2 \quad , \quad \Delta_1 z = 1 - Z^2.$$

Applicando le nuove equazioni nell' ipotesi che si tratti di una superficie ad area minima, il Nostro arriva ad una rappresentazione analitica generale di tali superficie, la quale sta in una relazione assai stretta con quella di WEIERSTRASS. Essa conduce, fra l' altre cose, ad una speciale corrispondenza univoca tra i punti di una superficie minima ed i punti di un piano, a cui giunsero per vie diverse il BELTRAMI e RIEMANN[1]); siccome essa associa ad ogni superficie minima una funzione $f(w)$ di variabile complessa, così nasce la questione di determinare quali mutazioni subisce $f(w)$ quando la superficie venga mossa comunque nello spazio: risolvendola il BELTRAMI offerse il primo esempio della ricerca generale delle relazioni che passano fra le trasformazioni della funzione $f(w)$ e quelle che in conseguenza risente la corrispondente superficie minima. Egli poi, finendo, ha considerata anche le superficie parallele a quelle d' area minima: per esse è costante la somma delle curvature principali in un punto arbitrario.

IX.

Le investigazioni del BELTRAMI, di cui additammo sin qui i felici risultati, abbracciano, si può dire, tutta la Geometria infinitesimale delle superficie e del nostro spazio. Un argomento però rimase ad esse estranee; un argomento che la traduzione da lui fatta di una celebre memoria di GAUSS[2]) ed i doveri annessi alla carica che egli ebbe di professore di Geodesia dovevano necessariamente fare entrare nell' ambito delle sue meditazioni: alludiamo alla teoria delle carte geografiche o, se meglio piace, alla rappresentazione di una superficie sopra un piano. Ora a questo soggetto il BEL-

1) Cf. DARBOUX vol. cit. p. 320.

2) *Soluzione generale del problema: Rappresentare le parti di una superficie data sopra un' altra superficie parimenti data, in guisa che la rappresentazione riesca, nelle sue parti infinitesime, una figura simile alla figura rappresentata* (Annali di matem. 4, 1861, p. 214—232).

TRAMI dedicò infatti una memoria[1]), la quale occupa un posto eminente nella collezione de' suoi scritti, non solo grazie ad una proposizione importantissima che insegna[2]), ma anche per la luce inattesa che projettò poi sopra questioni geometriche fondamentali e pel nuovo orientamento che essa diede al corso dei pensieri del suo autore.

Nell' esordio della memoria in questione (datata da Pisa, 31 Maggio 1866) il BELTRAMI osserva che nella maggior parte delle ricerche che furono istituite dai geometri sulla teoria delle carte geografiche si presero le mosse o dal principio della conservazione degli angoli o da quello della conservazione dei rapporti d' area; ma è chiaro potersene scegliere qualche altro ed è evidente che, quando si tratti di una carta destinata a servire alla misura delle distanze, sarebbe convenientissimo proporsi che alle geodetiche della superficie corrispondessero le rette del piano, giacchè, eseguita tale rappresentazione, le questioni concernenti triangoli geodetici sarebbero ridotte a semplici questioni di trigonometria piana. Ora, se si considera la superficie definita dell' elemento lineare

$$ds^2 = F \cdot du^2 + 2F \cdot du \cdot dv + G \cdot dv^2,$$

il problema di rappresentarla punto per punto sn un piano in modo che alle geodetiche corrispondano rette di questo equivale alla ricerca delle condizioni affinchè l' eqnazione differenziale di qneste linee abbia la forma

$$du \cdot dv^2 - dv \cdot du^2 = 0.$$

Paragonando questa all' eqnazione differenziale generale delle geodetiche si ottengono *quattro* eqnazioni differenziali fra *tre* funzioni incognite; da ciò emerge che il problema enunciato è in generale impossibile; ma, combinando opportunamente le equazioni trovate, si vede che affinchè il problema si possa risolvere è necessario e snfficiente che l' elemento lineare della superficie proposta sia ridncibile alla seguente forma:

$$ds^2 = R^2 \frac{(v^2 + a^2)\, du^2 - 2uv \cdot du \cdot dv + (u^2 + a^2)\, dv^2}{(u^2 + v^2 + a^2)^2};$$

la superficie stessa è qnindi di curvatura costante $\frac{1}{R^2}$. Si conclnde pertanto che «le sole snperficie suscettibili di essere rappresentate sopra un piano in modo che ad ogni punto corrisponda un punto e ad ogni geodetica nna retta sono qnelle la cui curvatura è dovunque costante.» Qnesta proposizione mostra non esistere le sperate rappresentazioni di una super-

1) *Risoluzione del problema: riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette* (Annali di matem. 7, 1865, p. 185—204).

2) Cf. DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, T. III (Paris 1894), p. 41.

ficie sopra di un piano, svela invece un' interessante proprietà caratteristica delle superficie a curvatura costante e suggerisce il bel problema — risolto poi dal Dini[1]) — di stabilire una corrispondenza fra due superficie curve, tale che ad un punto corrisponda un punto e ad una geodetica un' altra geodetica.

Ora nel torno di tempo in cui veniva composto il lavoro testè riassunto, l'Hoüel in Francia ed in Italia il Battaglini si adoperavano a diffondere le idee rivoluzionarie di Bolyai e di Lobatschewsky, e veniva dissepolta e pubblicata l' «Habilitationsschrift» di Riemann *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.* Il Beltrami seguì con interesse crescente tutte queste pubblicazioni; anzi di quest' ultima fece una traduzione commentata, della quale parla in due lettere scritte ad Angelo Genocchi[2]) e che, pel loro interesse storico, giudichiamo opportuno di qui riferire:

Bologna 9 Giugno 1868.

Dietro quanto mi scrive oggi il professore Cremona mi prendo la libertà di inviarle sotto fascia il manoscritto della traduzione di una memoria postuma del Riemann, interessantissima per la estrema importanza e vastità del suo soggetto, al quale, bisogna dirlo, è poco adeguata la brevità dello sviluppo.

Intorno alla mia traduzione debbo notare in primo luogo che ho voluto essere fedelissimo al testo, pel timore che altrimenti facendo io potessi alterare il vero senso di un dettato che in molti punti dà luogo a dubbiezza di interpretazioni. Quindi la traduzione non potè riuscire il più delle volte schiettamente italiana. Mi sono permesso alcune innovazioni di linguaggio che sono prontissimo a ritirare quando me ne verranno proposte di migliori, ma sono poche, anzi forse due sole: la parola *metricità*, nell' immaginare la quale mi corse al pensiero la sua sorella atomicità, già adottata dai chimici, e che può all' uopo essere surrogata da *rapporti metrici*, traduzione letterale di *Mafsverhältnisse*; e le parole *stero* e *costruzioni steriche* per tradurre *Raumgröfsen* e *Raumkonstruktionen*, al posto delle quali si potrebbe dire *grandezze spaziali* e *costruzioni spaziali*.

A fianco della traduzione ho inserite delle annotazioni, stese *currenti calamo* e per *uso interno* (usando la frase degli speziali), vale a dire destinate propriamente per me solo. Quindi tali note o non dovrebbero esser lette, o non lo dovrebbero essere che con molta e molta indulgenza, perchè le più fra esse sono piuttosto indicazioni destinate a servirmi come di guida per fare attenzione a quei punti che mi cagionarono le maggiori difficoltà, di quello che commenti propriamente detti e definitivi. Vi sono poi moltissimi altri punti che meriterebbero dilucidazione ed ai quali

1) Annali di matem. 3_2, 1869.

2) Gli originali di tutte le lettere del Beltrami al Genocchi sono conservati nella Biblioteca Comunale Passerini-Landi di Piacenza.

mi riservo di pensare in seguito, giacchè il soggetto non è di quelli che invitino senza stento ad una continuata meditazione, come avverrebbe se l'esposizione fosse bensì concisa ma corredata di tutti gli elementi indispensabili all' intelligenza, anzichè enigmatica perfino nelle definizioni di alcuni enti, come Ella ben vedrà.

La parte III ed ultima è quella che mi è sembrata meno accessibile delle altre, cosa tanto più spiacevole in quanto che è quella che accenna lontanamente a risultati di estrema importanza. In quella parte, più che nelle altre, diventerebbe indispensabile di avere almeno le basi del metodo generale con cui Riemann deve avere studiato le varietà molteplicemente estese.

Ella troverà in due mie annotazioni qualche allusione ad nn mio modo di interpretare i risultati della geometria così detta non-Euclidea. Se Ella desidera qualche cenno intorno a ciò potrà rivolgersi al prof^{re} Cremona che ha avuto fra le mani un mio manoscritto contenente la completa costruzione *reale* della planimetria di Lobatschewsky. Il fondo delle ricerche di Lobatschewsky ricade indubbiamente nella dottrina toccata da Riemann, ma con questa differenza che Riemann fa vedere perfettamente bene quali siano i postulati dell' ordinaria matematica, mentre Lobatschewsky non precisa in alcun punto le sue premesse. Ma su questo argomento parmi inutile entrare in ulteriori particolari, tanto più che non sono lontano dall' intenzione di pubblicare alcuni dei miei studi in proposito, incoraggiato appunto dall' appoggio che essi trovano nel lavoro di Riemann, venuto da poco soltanto a mia conoscenza.

Godo che questa occasione mi abbia permesso di rivolgere direttamente la parola ad una persona che altamente stimo, e mi è grato che essa siami stata fornita du un altra non meno egregia persona, qual' è l' ottimo amico mio il prof^{re} Cremona.

Ella non si dia alcuna premura pel rinvio del manoscritto, del quale non ho bisogno, avendo il testo tedesco.

Bologna 23 Luglio 1868.

Ricevetti a suo tempo la graditissima sua lettera dell' 11 Luglio, insieme colla traduzione manoscritta della Memoria di Riemann che Ella poteva tenere anche più a lungo, avendo io la Memoria originale.

Già Ella avrà ben rilevato che di qnesta Memoria non ho inteso che in alcuni punti il senso (o almeno ho creduto di capirlo): mentre in parecchi altri pnnti, e dei più importanti i miei sforzi sono per adesso riusciti vani. Ciò vale sopratutto per la terza sezione, che dovrebbe essere la più importante, concernendo le applicazioni al mondo sensibile. Lasciamo al Sig^{r}. Dedekind la cura di pubblicare il commento promesso alla Memoria in discorso: egli è a ciò molto idoneo, primieramente per essere stato conoscente di Riemann e allievo della stessa scuola, e in secondo lnogo per aver già dato saggio di sapere lucidamente esporre argomenti non facili.

L' anno scorso, quando nessuno sapeva di questo lavoro fondamentale di Riemann, io aveva comunicato all' ottimo Cremona un mio scritto nel quale davo un interpretazione della planimetria non-euclidea, che mi sem-

brava soddisfacente. Il CREMONA non ne giudicò diversamente, ma mi fece una obbiezione di massima, dicendomi che poichè io usavo l' ordinaria analisi, che è fondata sul concetto euclideo, non potevo tenermi certo che con ciò solo io non avessi pregiudicato il finale risultamento.

Questo discorso per verità non mi soddisfaceva, perchè mi pareva che quando uno spiega un nuovo fenomeno col mezzo di leggi note, non si può legittimamente pretendere che egli debba ancora provare non potersi lo stesso fenomeno spiegare con altre leggi, rimote dalle comuni. In questo caso non vi potrebbe mai essere alcuna ipotesi scientificamente provata. Comunque sia, quell' obbiezione fece sì che io lasciassi dormire lo scritto, e di ciò sono ora contento perchè alla fine del medesimo avevo arrischiato un giudizio sulla stereometria non-euclidea, che adesso non credo equo. Ma lo scritto, purgato di questo fallo, uscirà sul Giornale di Napoli, nella sua forma originale, salvo qualche aggiunta che posso azzardare ora, perchè sostanzialmente concordante con alcune delle idee di RIEMANN.

Stante la prossima pubblicazione di questa qualunque siasi ricerca sul soggetto, credo inutile di dargliene un cenno sommario qui, ciò che forse non potrei fare chiaramente. Ma le dirò che vi troverà la piena conferma di quanto Ella scrive, cioè che il postulato della retta non sia sufficiente a definirla. Anzi questa considerazione è stata precisamente il punto di partenza delle mie ricerche.

Un punto dove io non mi troverei perfettamente d' accordo con Lei, sarebbe nella grande ripugnanza che Ella mostra ad invocare le osservazioni astronomiche in appoggio dei principii della geometria. Forse LOBATSCHEWSKY e RIEMANN non hanno bene esternato il loro pensiero in tal proposito (supposto che io dal canto mio lo interpreti rettamente). I postulati della meccanica si fondano su fatti esterni, su esperienze: eppure nessuno dubita che l' imperfezione dei nostri mezzi di osservazione possa infirmare l' esattezza dei loro enunciati. In altre parole basta *concepire* che si possano provare con osservazioni e sperienze. — La cosa può considerarsi anche sotto un altro punto di vista. Data per es. una sfera materiale, la sola trigonometria sferica non può servire ad assegnarne il raggio: occorre perciò qualche misura effettiva, qualche sperienza. Nello stesso modo, se la geometria stabilisse dei teoremi relativi ad una classe di enti fra cui si trovasse il piano, non si potrebbe riconoscere il piano fra tutti questi enti se non col mezzo di qualche dato sperimentale. Non importerebbe occuparsi della precisione dei mezzi usati a rilevare questo dato; basterebbe *concepire* che questo dato occorre, e che non può venire che dal di fuori.

X.

Il lavoro di cui fa cenno questa lettera è il *Saggio d' interpretazione della geometria non-euclidea*[1]) il primo degli scritti che, per usare le belle parole di LUIGI CREMONA «diedero al BELTRAMI quasi di slancio quella

1) Giorn. di matem. 6, 1868, p. 284—312.

riputazione che si andò sempre più diffondendo sino a divenire ammirazione universale». Esso apparve nel momento in cui ferveva accanita la lotta fra gli idealisti, disposti ad accettare le nuove dottrine geometriche, benchè in aperto contrasto con i risultati dell' esperienza, ed i realisti pronti a deridere coloro che nutrivano fede nella possibilità della geometria di LOBATSCHEWSKY. Per ridurre al silenzio gli oppositori misoneisti un mezzo di irresistibile potenza si offriva spontaneo, quello cioè di presentare l' esempio di una superficie, regolare come il piano e la sfera, nella quale le linee corrispondenti alle rette di quello ed ai circoli massimi di questa, cioè le linee geodetiche, si comportassero come le rette del piano non-euclideo. Questa è l' idea geniale che balenò dinanzi alle mente del BELTRAMI; per tradurla in atto egli era mirabilmente preparato dalle ricerche che riferimmo nel § prec., e fu appunto applicando i risultati di esse che egli venne condotto ad ammettere l'esistenza di una superficie semplicemente connessa, ove l' elemento lineare fosse esprimibile sotto la forma seguente

$$ds^2 = R^2 \frac{(a^2 - v^2)\,du^2 + 2uv \cdot du \cdot dv + (a^2 - u^2)\,dv^2}{(a^2 - u^2 - v^2)^2};$$

una siffatta superficie è di curvatura costante $-\frac{1}{R^2}$ e le sue geodetiche si comportano in un modo che corrisponde esattamente a quello delle rette nella geometria di LOBATSCHEWSKY.

Quanto il BELTRAMI abbia contributo con tale osservazione, magistralmente illustrata nel suo *Saggio*, al trionfo delle idee da lui patrocinate è noto a chiunque abbia seguito, nelle varie sue fasi, lo svolgimento delle geometria non-euclidea. Ma, poco dopo la pubblicazione di quello scritto, da geometri illustri[1]) vennero manifestati dei gravi dubbî sulle premesse del BELTRAMI, venne cioè avvertito non essere certa l' esistenza di superficie del tipo a cui questi ricorse par rappresentare, senza snaturarlo, il nuovo sistema di geometria. Sembra che il BELTRAMI si sforzasse di dissiparli; pare almeno che a tentativi di tal genere debba la vita una memoria[2]), ove è studiata con cura scrupolosa la superficie generata dalla rotazione della trattrice attorno al proprio asintoto, con lo scopo di dedurne gli elementi per una costruzione semplice ed esatta della superficie medesima. Non avendo essi conseguito il fine a cui miravano, il GENOCCHI, in una delle sue migliori memorie[3]), ripetè quegli appunti in

1) HELMHOLTZ in Revue des cours scientifiques 1870, p. 499 e F. KLEIN in Bulletin des sciences mathém. et astron. 4, 1871, p. 345.

2) *Sulla superficie di rotazione che serve di tipo alle superficie pseudosferiche* (Giorn. di matem. 10, 1872, p. 146—160).

3) *Sur un mémoire de DAVIET DE FONCENEX et sur les géométries non euclidéennes* (Mem. della r. accad. delle scienze di Torino 29_2); veggasi specialmente l' *Appendice*.

modo ancora più particolareggiato ed energico, sostenendo non essere dimostrato che l' equazione a derivate parziali, caratteristica delle superficie di curvatura costante negativa, ammetta almeno un integrale soddisfacente a tutte le condizioni imposte alla pseudo-sfera per servire alla rappresentazione del BELTRAMI. Di risposte da questi date non vi è alcuna traccia, nemmeno nel carteggio che egli tenne col suo collega di Torino; forse egli s' avvide che quelle obbiezioni sgraziatamente erano fondate: ma la constatazione definitiva di tal fatto, cioè la dimostrazione completa dell' inesistenza di superficie di curvatura costante negativa regolari in tutta la loro estensione, non venne compiuta se non dopo la morte del Nostro matematico.[1]) La rappresentazione immaginata del BELTRAMI è dunque assai limitata ed il bel edificio con tanto amore elevato, se non cade al suolo, si mostra però di solidità ed estensione minore di quanto erasi creduto. Se può sembrare esagerazione il dire essere omai compiuta la missione storica dal destino affidatogli (cioè quella di validamente cooperare all' adozione generale delle idee riformatrici di LOBATSCHEWSKY), è però con un senso di profondo rammarico che si è costretti a constatare come la più popolare e geniale delle opere del BELTRAMI sia quella che maggioramente presta il fianco alla critica; nè vale a pienamente confortarci il pensiero che il difetto esistente nella sua struttura è contrabilanciato da qualità indiscutibili e che il proemio del *Saggio d' interpretazione* è destinato a prendere posto, nelle collezione dei classici italiani, accanto alle più belle pagine di GALILEO.

Da quest' epoca (1868) in poi non ha mai cessato l' interesse del Nostro per tutto ciò che riferisce, più o meno direttamente ai principî della geometria. Valga a provarlo in primo luogo un breve nota[2]), ove è insegnata una definizione della trattrice, como inviluppo delle sue tangenti, che consegue dall' espressione data da LOBATSCHEWSKY per l' angolo di parallellismo. Parrecchie prove di esso sono poi offerte dal carteggio che in quel tempo egli ebbe col GENOCCHI, nel quale troviamo[3]) additato il vizio dell' argomentazione proposta dal CARTON[4]) per dimostrare il postulato di EUCLIDE, notizie[5]) sopra ricerche intese a determinare chi fosse lo SCHWEIKART[6]), di cui è parola nella corrispondenza epistolare fra GAUSS e SCHUMACHER, ed un giudizio motivato sopra l' articolo dell HOÜEL *Sur*

1) D. HILBERT, *Über Flächen von konstanter GAUSSscher Krümmung* (Trans. of the American mathem. society 2, 1901).

2) *Teorema di geometria pseudo-sferica* (Giorn. di matem. 10, 1872, p. 53).

3) Lettera del 4 Gennajo 1869.

4) Presentata dal BERTRAND all' Istituto di Francia il 20 Dicembre 1869.

5) Lettera del 21 Gennajo 1870.

6) Individuo oggi ben noto.

l'impossibilité de démontrer par une construction plane le postulatum d'Euclide. Un attestato di pubblica ragione di tale interesse è inoltre offerto dalla bellissima comunicazione fatta all' Accademia dei Lincei il 17 Marzo 1889 per presentare, sotto la debita luce, l'opera — di cui allora erano ignoti il valore ed il significato — del P. Saccheri *Euclides ab omni naevo vindicatus.*[1]) Possiamo aggiungere che alla geometria non-euclidea il Beltrami non cessò dal pensare nemmeno quando aveva consacrate tutte le forze del proprio ingegno allo studio dei fenomeni naturali; ne è una prova la scoperta da lui fatta dell' essere le equazioni generali dell' elasticità vincolate al postulato euclideo[2]); osserva inoltre un suo egregio discepolo[3]) « come egli mostri, in qualche passo, d' avere rivolto lo sguardo al partito che la Fisica potrebbe trarre dall' ipotesi di una diversa natura geometrica dello spazio, concetto ardito, più esplicitamente avanzato da Clifford; nè egli avrebbe potuto mai perdere di vista quegli spazii curvi, dai quali aveva preso trionfalmente le mosse ».

XI.

Con questi cenni siamo ancora ben lungi dall' avere esaurito l' esame degli scritti del Beltrami dovuti all' impulso di Riemann. Al movimento intellettuale prodotto dalla celebre « Habilitationsschrift » si connette infatti anche la *Teoria fondamentale degli spazi di curvatura costante*[4]), ove le più essenziali considerazioni contenute nel *Saggio*, convenientemente generalizzate, porgono la piena giustificazione di alcuni asserti riemanniani e notevoli illustrazioni di altri. Non è questo l' unico lavoro del Beltrami ove s' incontrino considerazioni iperspaziali, ma in esso vengo-

1) *Un precursore italiano di Legendre e di Lobatschewsky* (Rend. della r. acc. dei Lincei 5 : 1, 1889, p. 441—448).

2) *Sulle equazioni generali dell' elasticità* (Annali di matem. $\mathbf{10}_2$, 1881, p. 188—211).

3) G. A. Maggi, *Commemorazione* inserita nell' Annuario della r. univ. di Pisa, anno 1900—1901.

4) Annali di matem. $\mathbf{2}_2$, 1868—1869, p. 232—235. Memoria datata da Bologna, Ottobre 1868. — Crediamo utile riferire qui una correzione ad essa dal Beltrami stesso segnalata in una lettera scritta al Genocchi da Venezia il 6 Agosto 1869: «Approfitto dell' occasione per ritirare una frase della mia memoria *Sugli spazii di curvatura costante,* che non corrisponde esattamente al mio pensiero, e che ho lasciato correre soltanto per ciò che la stampa di detta Memoria avvenne molti mesi dopo che fu composta, ed in epoca nella quale mi trovavo molto occupato di altre cose. La frase, cui alludo è contenuta nell' ultima linea della pag. 17 (dell' esemplare a parte) e nelle prime due della pag. 18. La vera considerazione che mi sembra doversi fare è quella esposta nella nuova mia Memoria *Sui parametri differenziali* (che ebbi l' onore di spedirle recentemente), dalla linea 11 (dal basso) della pag. 13 alla linea 11 (dall' alto) della pag. 15. »

no presentate con maggior coraggio e nel modo più esplicito; l' Autore che in altri scritti[1]) aveva invocata, come propria giustificazione, l' autorità di GAUSS, qui crede opportuno avvertire: «Certe locuzioni di cui per amore di brevità faccio uso frequente non parranno, io credo, nè stentate nè oscure a chi guardi più alla sostanza che alla forma. L' attento lettore non avrà da fare alcuno sforzo per intenderle senz' altra spiegazione, restandogli del resto piena facoltà di non attribuire loro che un significato meramente analitico».

Estendendo le considerazioni fondamentali del citato *Saggio* il BELTRAMI definisce uno spazio a n dimensioni mediante la seguente espressione del suo elemento lineare: .

$$ds = R\,\frac{\sqrt{dx^2 + dx_1^2 + \cdots + dx_n^2}}{x},$$

ove le $n+1$ variabili $x, x_1, \cdots, x_n$ sono fra loro legate della relazione

$$x^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = a^2.$$

È uno spazio, dall' antore ammesso per semplicemente connesso, in cui le geodetiche sono rappresentate da equazioni lineari fra le coordinate, in cui è possibile il movimento senza deformazione, in cni la distanza ϱ fra due punti (x) e (x') è determinata dalla formola:

$$\cosh\frac{\varrho}{R} = \frac{a^2 - x_1 x_1' - \cdots - x_n x_n'}{\sqrt{(a^2 - x_1^2 - \cdots - x_n^2)(a^2 - x_1'^2 - \cdots - x_n'^2)}}.$$

Lo spazio stesso si può definire anche mediante altre forme dell' elemento lineare, fra cui meritano di venire segnalate le seguenti:

$$ds^2 = \left(\frac{Ra\,dr}{a^2 - r^2}\right)^2 + \frac{R^2 r^2}{a^2 - r^2}(d\lambda_1^2 + \cdots + d\lambda_n^2),$$

con la condizione $\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2 = 1$

$$ds^2 = \frac{d\xi_1^2 + \cdots + d\xi_n^2}{1 - \frac{\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2}{4R^2}},$$

$$ds^2 = \frac{\sqrt{d\eta^2 + d\eta_1^2 + \cdots + d\eta_{n-1}^2}}{\eta};$$

la seconda venne enunciata da RIEMANN e mette in evidenza essere lo spazio considerato di curvatura costante negativa (*spazio pseudo-sferico*, secondo BELTRAMI); la terza invece prova essere $\eta = 0$ l' equazione di uno spazio piano, trajettoria ortogonale di tutte le geodetiche che passano per un

1) Alludiamo specialmente a quello sui parametri differenziali (v. § XII).

punto situato all' infinito. Cambiando nelle formole precedenti R, a, x risp. in iR, ia, ix si ottengono le formole che competono ad uno *spazio sferico*; la distanza ϱ fra due punti (x), (x') di tale spazio è determinata della formole:

$$\cos\frac{\varrho}{R} = \frac{a^2 + x_1 x_1' + \cdots + x_n x_n'}{\sqrt{(a^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2)\;(a^2 + x_1'^2 + \cdots + x_n'^2)}}.$$

Siccome le «sfere geodetiche» di uno spazio pseudosferico sono spazî sferici, così si giunge alla notevole conseguenza, che «la geometria sferica può considerarsi come contenuta nella pseudo-sferica.»

Una aggiunta rilevante alle formole ed alle proposizioni esposte nella *Teoria fondamentale* apportò lo Schläfli[1]) scoprendo che il più generale spazio a n dimensioni avente le geodetiche rappresentabili mediante equazioni lineari si ottiene assoggettando lo spazio considerato dal Beltrami ad una transformazione omografica arbitraria; e questi si affrettò a mostrare[2]) come l' espressione dell' elemento lineare del nuovo spazio si possa dedurre, con un calcolo assai elegante, dall' espressione dell' elemento lineare dell' antico.

A proposito di queste ricerche il Beltrami comunicò ad Enrico d'Ovidio, con lettera del 25 Dicembre 1872, alcune notizie che, grazie alla loro eccezionale importanza, meritano di venire qui riprodotte[3]):

„Le dilucidazioni che a lei possono occorrere, circa il punto indicatomi della mia *Memoria* sugli spazii di curvatura costante, sono tutte contenute in un' altra *Memoria* molto anteriore (del 65 o 66) intitolata: *Risoluzione del problema*, ecc., citata nella Nota 1ª al *Saggio sulla Geometria non-euclidea*, stampato nel Giornale di Napoli. Mi sia lecito il dire che questa quistione è precisamente quella nella quale, se non sono in inganno, io ho introdotto un elemento veramente nuovo nella ricerca analitica circa la natura degli spazii; e ciò è tanto vero, che gli è appunto per questa via che io sono entrato, senza volerlo e quasi senza saperlo, nelle dottrine di Lobatschewsky, Riemann, ecc., nelle quali io sono poi andato a cercare delle verificazioni, e che, alla loro volta, mi hanno suggerito altre ricerche secondarie, a cui, altrimenti, non avrei pensato. In una parola, ecco il principio che io credo enunciato e dimostrato da me per la prima

1) *Nota alla memoria del sig.* Beltrami *« Sugli spazii di curvatura costante »* (Annali di matem. 5_2, 1871—1873).

2) *Osservazione sulla precedente memoria del sig. prof.* Schläfli (Id. p. 194—198).

3) La citata lettera venne pubblicata per la prima volta nella *Commemorazione* del Beltrami letta dal Prof. d'Ovidio dinnanzi all' Accademia di Torino (Atti della r. acc. delle scienze di Torino 35, 1899—1900).

volta: *La Geometria generale*, cioè senza il postulato d' EUCLIDE, *è analiticamente, la Geometria degli spazii in cui le linee geodetiche sono rappresentate da equazioni lineari*. S' intende bene che io parlo dei soli spazii dotati di elemento lineare *quadratico*. RIEMANN ha lasciato intravedere la possibilità d' altri spazii; ma è probabilissimo che la considerazione di questi sarà per molto tempo infinitamente più inutile, se così si può dire, di quelli della Geometria non-euclidea.

Le dirò anche, e questo potrà giovare al di lei scopo, l' ordine cronologico dei miei stndî in argomento. Dapprima un' osservazione, bnttata là da LAGRANGE in una delle sue Memorie sulle carte geografiche, mi ha condotto a cercare se ci fossero superficie rappresentabili sopra un piano, per guisa che le loro linee geodetiche fossero rappresentate da linee rette; il che è quanto dire, superficie rappresentabili con coordinate curvilinee u e v, per guisa che le loro linee geodetiche fossero rappresentate da un' equazione lineare in u e v. Nella citata *Memoria* del 66 ho trovato che tali snperficie dovevano avere necessariamente la curvatura costante (positiva, negativa o nulla). Più tardi, nel *Saggio*, ho mostrato, *partendo da questo fatto*, che nella ipotesi della curvatura *negativa* la Geometria di queste superficie è identica a quella di GAUSS e di LOBATSCHEWSKY. In seguito, volendo estendere queste considerazioni allo spazio, sgomentandomi (a torto) delle difficoltà che presentava la risoluzione, nel caso di tre dimensioni, del problema già da me risoluto nel 65, tentai di costruire la soluzione *a priori*, cioè per induzione, e fortunatamente ci riuscii, osservando che in luogo della equazione (1) del *Saggio* si può scrivere:

$$ds^2 = R^2 \frac{du^2 + dv^2 + dw^2}{w^2}, \qquad a^2 = u^2 + v^2 + w^2,$$

formole che, aggiungendo una dimensione, suggeriscono di porre;

$$ds^2 = R^2 \frac{dt^2 + du^2 + dv^2 + dw^2}{w^2}, \qquad a^2 = t^2 + u^2 + v^2 + w^2.$$

Verificai dunque che *due* equazioni *lineari* fra le tre variabili t, u, v definiscono una linea geodetica, cioè rendono $\delta \int ds = 0$. Ma appena conseguito questo risultato, che io sviluppai in modo prolisso e coll' aiuto di variabili ausiliarie (specie di coordinate polari non-euclidee), cominciai a sospettare che il teorema fosse vero per n qualunque, e verificando questa congettura giunsi alla dimostrazione che forma il principio della *Memoria* sugli spazii di curvatura costante. — Più tardi, quando imparai a conoscere la teoria di CAYLEY, mi accorsi che il suo *assoluto* era precisamente quel luogo *limite* che io ottenera dall' equazione $w = 0$ ossia $x = 0$, e compresi che l' identità dei

risultati era dovuta a questa circostanza, che nella Geometria proiettiva (analitica) si ammette già per dato che le equazioni lineari rappresentino linee di minima distanza, cosicchè questa Geometria studia, inconsapevolmente, gli spazii di curvatura costante. Io ho avuto il torto di non pubblicare questa osservazione, che fu poi fatta dal KLEIN e corredata da lui di molti sviluppi, a molti dei quali io non avevo punto pensato. In questo modo il mio *principio della linearità* è stato naturalmente dimenticato, ed è stato sostituito da quello della *proiettività* che gli equivale completamente. — Dicevo che a torto io aveva temuto di non poter seguire, per $n > 2$, il processo tenuto per le superficie: infatti recentemente lo SCHLÄFLI ha svolto, sostanzialmente, questo processo per n qualunque negli Annali di matematica, ed ha così dimostrato (e generalizzato omograficamente) il punto di partenza della *Memoria* in quistione".

Quattro anni più tardi, nell' epoca in cui il Nostro aveva già scelte le questioni di filosofia naturale come principale soggetto delle sue feconde investigazioni, egli porgeva un nuovo importantissimo complemento alla sua *Teoria* stabiliendo — in una memoria presentata all' Accademia dei Lincei e di cui venne pubblicato soltanto un riassunto[1]) — le formole da porsi a base della cinematica degli spazî di curvatura costante; sono formole che comprendono come caso particolare quelle che, nella cinematica ordinaria, vanno sotto il nome di EULERO, e che ne ammettono altre correlative non somiglianti ad altre anterioremente note. Il BELTRAMI ne ha dedotte inaspettate illazioni, fra cui va notato il seguente teorema: «In un n-spazio (*sic*) di curvatura costante esiste sempre, quando n è pari, per qualsivoglia movimento elementare di un sistema rigido, un centro istantaneo di rotazione ed un piano istantaneo di scorrimento. Quando invece n è dispari, non esiste in generale alcun centro istantaneo; ma, se ve ne è uno, ve ne saranno infiniti appartenenti ad una retta». Quando lo spazio è euclideo, per $n = 2$ e $n = 3$ si traggono da questa proposizione risultati noti *ab immemorabilis*, e per n qualunque fatti osservati nel 1865 dallo SCHLÄFLI (Journ. für Mathem. 65); ma *in generale essa addita una differenza di struttura estremamente importante fra gli spazî di curvatura costante ad un numero pari e quelli ad un numero dispari di dimensioni, differenza che posteriori ricerche geometriche e meccaniche hanno confermata in più modi.*

---

1) *Formules fondamentales de cinématique dans les espaces de courbure constante* (Extrait d'un mémoire lu à l'Académie Royale des Lincei, à Rome); Bull. des sciences mathém. et astron. 11, 1876, p. 233—241.

XII.

Un legame indiscutile e profondo, quantunque non confessato e nascosto, esiste fra codeste ricerche iperspaziali del BELTRAMI ed una memoria ove si incontrano nel loro stato di completa maturità e massimo sviluppo alcune idee consegnate nelle *Ricerche di analisi applicata alla geometria* e nel lavoro che tratta *Delle variabili complesse sopra una superficie qualunque.* È la *Memoria sulla teorica generale dei parametri differenziali*[1]), letta all' Accademia di Bologna il 25 Febbrajo 1869, compendiata dal DARBOUX nella sua grande opera[2]), ed i cui risultati sono di una fecondità che «ebbe recente conferma nell' applicazione che ENRICO HERTZ fece dei principii di quella teoria alla sua nuova esposizione della Meccanica Razionale.»[3]) Serve di lontana preparazione ad essa una breve nota, scritta nel Dicembre 1866, *Intorno ad una trasformazione di variabili*[4]), avente per soggetto le forme quadratiche (finite e differenziali), delle quali appunto è esclusivamente parola nei primi due paragrafi della memoria suindicata. Questi due paragrafi sono indispensabili per «stabilire (come si propose di fare il BELTRAMI) la teoria generale dei parametri differenziali, liberandola da ogni restrizione non necessaria, sia circa il numero delle variabili, sia circa il significato delle medesime.» Applicando le proposizioni in essi esposte, il BELTRAMI, estendendo un teorema di JACOBI, dimostra la proprietà invariantiva delle funzioni

$$\Delta_1 \cdot U = \sum_{r,s} A_{rs} \frac{\partial U}{\partial x_r} \cdot \frac{\partial U}{\partial x_s}, \quad \Delta_1 \cdot UV = \sum_{r,s} A_{rs} \frac{\partial U}{\partial x_r} \cdot \frac{\partial V}{\partial x_s} \quad (r, s = 1, 2, \cdots, n)$$

ove U, V sono funzioni omogenee arbitrarie delle variabili $x_1, \cdots, x_n$, e, posto

---

1) Mem. della r. accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna, 8_2, 1869, p. 549—590.

2) *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, T. III (Paris 1894), p. 193 e seg

3) G. A. MAGGI, *Commemorazione* dianzi citata.

4) Giorn. di matem. 5, 1867, p. 24—27. Il contenuto di questo scritterello può compendirsi nel teorema seguente: «quelle relazioni fra le variabili $x_1, \cdots, x_n$, $y_1, \cdots, y_n$ che rendono identica l' equazione $\sum_{rs} A_{rs} dx_r \cdot dx_s = \sum_{rs} B_{rs} dy_r \cdot dy_s$, rendono pure identica la relazione

$$\sum_{r,s} a_{rs} \frac{\partial V}{\partial x_r} \cdot \frac{\partial V}{\partial x_s} = \sum_{r,s} b_{rs} \frac{\partial V}{\partial y_r} \cdot \frac{\partial V}{\partial y_s},$$

supposto che sia:

$$a = \begin{vmatrix} A_{11} & \cdot & A_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & \cdot & A_{nn} \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} B_{11} & \cdot & B_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ B_{n1} & \cdot & B_{nn} \end{vmatrix}, \quad a_{rs} = \frac{\partial \log a}{\partial A_{rs}}, \quad b_{rs} = \frac{\partial \log b}{\partial B_{rs}}.$$

$$ds^2 = \sum_{rs} a_{rs}\, dx_r \cdot dx_s,$$

A_{rs} è il quoziente del complemento algebrico di a_{rs} nel determinante

$$a = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

pel determinante stesso. Quelle due funzioni vengono chiamate *parametro differenziale primo* (o di *primo ordine*) della funzione U e *parametro intermedio* (o *misto*) delle funzioni U, V. Invece il *parametro differenziale secondo* (o di *secondo ordine*) della funzione U è definito dall' equazione

$$\Delta_2 U = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_r \frac{\partial (U_r \sqrt{a})}{\partial x_r}$$

e dal BELTRAMI posto sotto varie forme. — Per mostrare l' applicazione di siffatti nuovi elementi, egli considera due funzioni U, V di $x_1, \cdots, x_n$ monodrome, continue e finite in un campo S_n a n dimensioni, limitato da uno spazio ad $n-1$ dimensioni S_{n-1}; dette allora $\frac{dU}{d\nu}, \frac{dV}{d\nu}$ le derivate di U, V rispetto alla normale di S_{n-1}, sussisteranno le relazioni

$$\int (\Delta_1 \cdot UV + V \cdot \Delta_2 U)\, dS_n + \int V \frac{dU}{d\nu} \cdot dS_{n-1} = 0;$$

$$\int (\Delta_1 \cdot UV + U \cdot \Delta_2 V)\, dS_n + \int U \frac{dV}{d\nu} \cdot dS_{n-1} = 0$$

donde

$$\int (U \cdot \Delta_2 V - V \cdot \Delta_2 U)\, dS_n + \int \left(U \frac{dV}{d\nu} - V \frac{dU}{d\nu}\right) dS_{n-1} = 0,$$

formole di cui è evidente l'affinità con altre a lui pure dovute (v. § VI). — Dei tentativi fatti del BELTRAMI per generalizzare completamente la nota formola di GREEN e dei risultati che diedero riguardo agli spazî per cui l' elemento lineare è riducibile alla forma $ds^2 = dx_1^2 + \cdots + dx_n^2$ basti rammentare la presenza. E notiamo piuttosto come i suoi studî sopra l' algebra delle sostituzioni lineari, cioè quegli studî che lo guidarono a concepire la teoria dei parametri differenziali sotto la sua forma più comprensiva ed astratta, lo abbiano condotto ad altri risultati, che non è lecito di passare sotto silenzio.

Alcuni[1]) sono collegati alla celebre espressione data da LEJEUNE-DIRICHLET per la funzione potenziale d' un ellissoide. Nell' intento di

1) *Intorno ad una trasformazione di* DIRICHLET (Giorn. di matem. **10**, 1872, p. 49—52).

rendere più semplici e chiare le verificazioni che ne diedero E. PADOVA e R. DEL GROSSO, il Nostro giunse al seguente teorema generale, da cui trasse poi quella espressione: «Sia $\psi = \sum_{rs} a_{rs} x_r x_s$ $(a_{rs} = a_{sr})$ una forma quadratica a n variabili e si ponga

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Psi = - \begin{vmatrix} 0 & x_1 & \cdots & x_n \\ x_1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & & \cdots & \cdot \\ \cdot & & \cdots & \cdot \\ \cdot & & \cdots & \cdot \\ x_n & a_{nn} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}, \quad X = x_1^2 + \cdots + x_n^2;$$

se una data sostituzione lineare (diretta) converte ψ in ψ', la corrispondente sostituzione lineare inversa convertirà Ψ' in Ψ, Ψ' essendo formata con i coefficienti di ψ' come Ψ lo è con quelli di ψ; in particolare, se la sostituzione diretta è ortogonale, l' inversa sarà ad essa identica, onde ogni espressione formata con le quantità ψ, Ψ, A, X è un covariante assoluto rispetto ad ogni sostituzione lineare ortogonale.»

Altri risultati[1]) ebbero invece come loro punto di partenza le ben note ricerche di KRONECKER e CHRISTOFFEL[2]) sopra le forme bilineari. Lo scopo che si propose il BELTRAMI è di togliere l' ipotesi, ivi costantemente fatta, che le due serie di variabili siano soggette a sostituzioni lineari identiche, oppure inverse l' una dell' altra. Ammettendo invece che siano fra loro indipendenti, ma entrambe ortogonali, egli trovò che qualunque forma bilineare può ridursi, senza introdurre immaginari, ad una certa forma canonica; soltanto quando essa è della forma

$$\sum_s \frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial x_s} y_s,$$

ψ essendo una forma quadratica nelle x, le due sostituzioni lineari da impiegarsi coincidono. Se poi si fa uso di sostituzioni lineari non ortogonali fra loro indipendenti, si possono ridurre contemporaneamente a forma canonica *due* forme bilineari. Esprimendo convenientemente, nel linguaggio della geometria pluridimensionale, alcune delle proposizioni ottenute, egli giunse ai seguenti teoremi, generalizzazioni di altri noti: «con una opportuna rotazione effettuata in uno spazio lineare di n dimensioni attorno ad un centro, è possibile sostituire qualunque correlazione nella stella con una polarità rispetto ad un cono quadrico; nello spazio a n dimensioni due stelle omografiche si possono sempre sovrapporre in modo che i loro centri coincidano e che gli n raggi doppî della emergente corrispondenza costituiscano un sistema di n rette a coppie ortogonali.»

1) *Sulle funzioni bilineari* (Id. **11**, 1873, p. 98—106).

2) Journ. für Mathem. **68**, 1868.

XIII.

Se volgiamo uno sguardo all' insieme delle indagini del Beltrami sin qui analizzate non tarderemo a persuaderci che esse si seguono l' una all' altra con legge di continuità, quasi con la rigorosa concatenazione di causa ed effetto. Ed invero dalle sue investigazioni di geometria differenziale egli fu gradatamente trascinato da un lato ad occuparsi delle questioni che concernono i principî della geometria e quindi ad estendere i propri metodi agli spazî comunque estesi, dall' altro a generalizzare la teoria dei parametri differenziali e quindi, in via sussidiaria, ad occuparsi delle forme algebriche o differenziali, e così a penetrare, per un' altra porta, nella teoria delle varietà a quantesivogliano dimensioni. Ci apprestiamo ora a mostrare come una terza strada lo abbia guidato alla medesima disciplina: è per ciò necessario che torniamo addietro di molti anni, per considerarlo quasi all' essordio della sua luminosa carriera di scienziato e di insegnante.

Nella seduta che tenne l' Accademia di Bologna il 12 Marzo 1863 il nostro geometra presentava un' elaborata memoria[1]) — di cui si affrettava a pubblicare un riassunto nel periodico allora fondato dal Battaglini[2]) — intesa a trasformare omograficamente e dimostrare per via analitica il teorema che stabilisce l' esistenza del circolo dei nove punti di un triangolo. Ne è base la considerazione di un quadrangolo completo, 0. 1. 2. 3 — avente per punti diagonali i punti A, B, C — e di una retta arbitraria r del suo piano; questa sega la congiungente di due vertici del quadrangolo in un punto, del quale si può trovare il conjugato armonico rispetto a quei vertici; i sei punti così ottenuti appartengono ad una conica Γ, circoscritta al triangolo ABC: è la *conica di nove punti* di Beltrami. Se r ruota attorno ad un punto P, Γ descrive un fascio avente per punti base A, B, C ed un quarto punto P', il quale è legato al punto P da una corrispondenza quadratica, sostanzialmente identica a quella vigente fra i punti conjugati rispetto ad un fascio di coniche.[3]) Il Beltrami ne fece uno studio esauriente[4]) e ne mostrò molteplici applicazioni.

Fra le proposizioni che in tal modo egli ottenne vanno riferite due che, grazie alla loro singolare eleganza, fecero, specialmente in Germania, una grande impressione e furono punto di partenza di numerose ricerche. Ec-

1) *Intorno alle coniche di nove punti ed alcune questioni che ne dipendono* (Mem. dell' acc. delle scienze dell' Istituto di Bologna 2_2, 1863, p. 361—395).

2) *Sulle coniche di nove punti* (Giorn. di matem. 1, 1863, p. 109—118).

3) Poncelet, *Traité des propriétés projectives* (Paris 1822), n. 388.

4) Si noti che la memoria del Beltrami è anteriore a quella del Cremona sulle trasformazioni razionali fra due piani, la quale non venne presentata all' Accademia di Bologna che il 7 Maggio 1863.

cone gli enunciati: I. Il centro del cerchio circoscritto ad un triangolo è il baricentro dei centri dei circoli inscritti nel medesimo. II. Se dai vertici di un triangolo si conducono tre rette fra loro parallele e di ciascuna si trova la simmetrica rispetto alla corrispondente bisettrice si ottengono tre rette concorrenti in un punto. Sulla I attrasse l'attenzione dei geometri il GRUNERT dandone una dimostrazione analitica[1]) e provocandone così altre di vario genere[2]); a lui si deve se il BALTZER, inserendola ne' suoi reputati *Elementi di matematica*[3]), la rese famigliare persino agli studenti delle Scuole medie. Anche della II il GRUNERT diede una dimostrazione analitica[4]), eccitando altri a congegnarne una prettamente elementare; a tale invito rispose — oltre a C. SCHMIDT[5]) — il BELTRAMI stesso che, in una lettera scritta da Pisa il 7 Aprile 1865[6]), espose un ragionamento di insuperabile semplicità atto a provare la verità di quel teorema. Ci sia lecito osservare che il II dei teoremi di BELTRAMI è molto meno importante del primo, perchè è un semplice caso particolare di altro ben noto ai cultori della geometria del triangolo[7]); ma ci sembra che a *lui si debba attribuire la considerazione delle simmetrie rispetto alle bisettrici di un triangolo*, di cui è notoria l' uso fecondo in quel ramo della matematica.

Continuando nell' ordine di idee che lo guidarono alle nozione ed alle proprietà della conica di nove punti, il BELTRAMI — contemporaneamente al PROUHET[8]), ma con altri intendimenti — si proponeva di estendere allo spazio l' una e le altre.[9]) E vi giungeva partendo dalla con-

1) Archiv der Mathem. und Phys. **42**, 1865, p. 354—356.

2) V. gli articoli di NOEGGERATH, LOBATTO, C. SCHMIDT, REUSCHLE, STRUVE e STAMMER nello stesso Archiv **43**, 1865, p. 89—91, 234—235, 238, 364, 483—487; **44**, 1865, p. 119, 120—124, 335.

3) Vedi *Elemente der Mathematik*, II. Bd., 6e Aufl. (Leipzig 1883), p. 108; oppure *Planimetria* (trad. CREMONA), 2a ed. (Genova 1875) p. 176.

4) Archiv der Mathem. und Phys. **43**, 1865, p. 102—103.

5) Id. p. 290—293.

6) *Auszug aus einem Briefe des Herrn Professor EUGENIO BELTRAMI an den Herausgeber betreffend die im Archiv mitgeteilten BELTRAMIschen Sätze.* Archiv der Mathem. und Phys. **43**, 1865, p. 356—358.

7) Alludesi qui alla seguente proposizione: « Se tre rette uscenti dai vertici di un triangolo concorrono in un punto, altrettanto accadrà per le loro simmetriche rispetto alle bisettrici degli angoli del triangolo » (CASEY, *A sequel to the first six Books of the Elements of EUCLID*, V ed., Dublin 1888, p. 166; G. BRUCE HALSTED, *Elementary synthetic geometry*, New-York 1892, p. 147; etc.).

8) *Analogies du triangle et du tetraèdre. Cercle des neuf points, sphère des douze points* (Nouv. ann. de mathém. 2_2, 1863).

9) *Estensione allo spazio di tre dimensioni dei teoremi relativi alle coniche di nove punti* (Giorn. di matem. **1**, 1863, p. 208—216, 354—360).

siderazione di un sistema di otto punti, determinabili, mediante coordinate tetraedriche, come segue:

$$(a, b, c, d),\ (-a, b, c, d),\ (a, -b, c, d),\ (a, b, -c, d),\ (a, b, c, -d),$$
$$(-a, b, c, -d),\ (-a, b, -c, d),\ (-a, -b, c, d);$$

preso poi un piano arbitrario σ di equazione

$$lx + my + nz + pw = 0,$$

esso è segato dalla congiungente di due qualunque dei punti dati in un nuovo punto, del quale si può trovare il conjugato armonico rispetto ai due primi. I ventotto punti così ottenuti appartengono ad una superficie del terz' ordine contenente gli spigoli del tetraedro di riferimento, cioè sulla superficie — già prima considerata da CAYLEY[1]) — di equazione:

$$\frac{la^2}{x} + \frac{mb^2}{y} + \frac{nc^2}{z} + \frac{nd^2}{w} = 0;$$

è dessa l' analoga nello spazio della conica di nove punti. In particolare si vede che: «I punti di mezzo dei ventotto segmenti determinati dai centri delle otto sfere inscritte in un tetraedro qualunque appartengono ad una superficie del terz' ordine contenente i sei spigoli del tetraedro.[2])» Indipendentemente da HESSE[3]), BELTRAMI ha notato che quella superficie è anche il luogo dei poli del piano σ rispetto alle ∞^2 quadriche delle rete che ha per base gli otto punti di partenza; di più ha dimostrato essere

$$a\sqrt{l\lambda} + l\sqrt{m\mu} + c\sqrt{n\nu} + d\sqrt{p\pi} = 0$$

la condizione di contatto della superficie stessa col piano

$$\lambda x + \mu y + \nu z + \pi w = 0,$$

cioè l' equazione tangenziale di essa. Sopra altre eleganti proprietà da lui stabilite non ci è concesso arrestarci; ma due cose vanno rilevate. Una è che quella superficie cubica è reciproca di quella di STEINER, onde il geometra di cui ci occupiamo va annoverato fra i primi che investigarono questa importante figura geometrica. L' altra è che, se s' immagina il piano σ ruotare attorno al punto $P(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, la superficie corrispondente passerà costantemente pel punto $P'(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$, le cui coordinate sono legate a quelle di P dalle relazioni seguenti

1) *Mémoire sur les courbes du troisième degré* (Journ. de mathém. 9, 1844; *Matem. Papers* T. I, p 183 e seg.)

2) Teorema enunciato anche come *Question 663* nelle Nouv. annales de mathém. 1_2, 1863, p. 336, e ritrovato più tardi dall' ECKHARDT nel § 3 de suoi *Beiträge zur analytischen Geometrie des Raumes* (Mathem. Ann. 5, 1872).

3) L. O. HESSES *Gesammelte Werke* (München 1897), p. 346.

$$\frac{\alpha\alpha'}{a^2} = \frac{\beta\beta'}{b^2} = \frac{\gamma\gamma'}{c^2} = \frac{\delta\delta'}{d^2};$$

fra P e P' ha dunque luogo una relazione birazionale, sostanzialmente identica a quella che l' ECKHARDT[1]) incontrò quattro anni più tardi.

Dodici anni dopo il BELTRAMI, in uno scritto comunicato all' Accademia di Bologna il 25 Febbrajo 1875[2]), ritornò sopra questioni congeneri, per generalizzare il celebre teorema di FEUERBACH «il cerchio dei nove punti di un triangolo è tangente ai quattro cerchi inscritti in questo.» Ivi egli ha incidentalmente stabilite delle notevoli prerogative di una speciale curva del terz' ordine, che è la trasformazione omografica della ipocicloide tricuspide, ed ha posto sotto veste projettiva il teorema di SIMSON affermante trovarsi sopra una stessa retta le perpendicolari calate sui lati di un triangolo da un punto della circonferenza circoscritta.

Questa proposizione — che il BELTRAMI preferiva chiamare teorema di STEINER «perchè STEINER lo ha per primo completato colla considerazione essenzialissima, dell' inviluppo della retta contenente i piedi delle tre perpendicolari» — diede poco dopo argomento ad un altro suo lavoro, il quale venne comunicato all' Accademia di Bologna il 7 Novembre 1876.[3]) In esso molte delle considerazioni contenute negli scritti indicati nel presente § vengono estese ad uno spazio lineare a $n-1$ dimensioni governato da una metrica projettiva; alla conica di nove punti ed alla figura correlativa corrispondono così un luogo steineriano dell' ordine n ed un inviluppo steineriano della classe n; il primo si spezza in due luoghi degli ordini $n-1$ e 1 quando la metrica sia euclidea, nella quale ipotesi il secondo acquista uno spazio lineare a $n-2$ dimensioni multiplo secondo $n-1$.

Ed ecco in qual modo il BELTRAMI venne per un terzo cammino condotto a contribuire alla geometria pluridimensionale!

XIV.

L' eleganza dei calcoli, che rendono così piacevole ed istruttiva la lettura del gruppo di memorie esaminate nel § prec., si ritrova in una seconda piccola collezione di scritti di vario argomento, abbraccianti un periodo di tempo più che decennale.

Il più antico è consacrato alle cubiche gobbe e venne letto all' Istituto

1) *Beiträge* succitati.

2) *Su alcuni teoremi di FEUERBACH e di STEINER. Esercitazione analitica* (Mem. dell' accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna 5_3, 1875, p. 543—546).

3) *Considerazioni analitiche sopra una proposizione di STEINER* (Id. 7_3, 1876, p. 241—262).

Lombardo nelle adunanze del 20 Febbrajo e del 7 Maggio 1868.[1]) Prescindendo dalla parte critico-polemica — nella quale il Nostro prese a sostenere in modo abile e vigoroso certi diritti di priorità del CREMONA misconosciuti dal DRACH e degli illustri geometri (CLEBSCH, HESSE, NEUMANN) che se ne fecero protettori —, esso contiene una rappresentazione analitica delle curve in questione, per semplicità e duttilità non inferiore ad alcuna altra congenere. Essa consiste nel considerare qualsia cubica gobba come trasformazione projettiva della parabola cubica inviluppata degli ∞^1 piani rappresentati, al variare del parametro u, dall' equazione cartesiana

$$\frac{x}{a+u}+\frac{y}{b+u}+\frac{z}{c+u}=1.$$

In qual modo il BELTRAMI ne deduca, con la massima naturalezza, le più cospicue prerogative delle curve in questione, non ci è concesso di qui far conoscere; ma va invece rilevato *come egli abbia introdotto nella teoria delle curve gobbe del terz' ordine un nuovo importante elemento, cioè l' iperboloide determinato da tre tangenti di una tale curva*; associandolo al punto d'intersezione dei tre corrispondenti piani osculatori si ottiene una corrispondenza univoca, da lui segnalata fra i punti dello spazio e quegli iperboloidi.

Un' analisi ancora più raffinata adoperò il BELTRAMI in un breve lavoro, datato da Venezia, 15 Ottobre 1871, ed avente per soggetto la teoria delle coniche.[2]) Le nuove vedute che egli seppe introdurre in un argomento tanto trito e ritrito, le bellissime formole che egli stabilì e le geniali trasformazioni a cui egli le sottopose rendono la lettura di quel lavoro racomandabile a coloro che intraprendono lo studio della geometria analitica e non ad essi soltanto. Esso poi è sicuro di non andare sommerso nel gran mare dell' oblio per altre due ragioni. Una si è per avere provocata quella lettera del CREMONA (datata 11 Gennajo 1872) ove è segnalata la curiosa corrispondenza univoca fra la geometria dello spazio rigato e la teoria di un certo sistema di coniche, che ha poi dato origine a tante interessanti investigazioni.[3]) L' altra ragione consiste nel trovarsi

1) *Annotazioni sulla teoria delle cubiche gobbe* (Rend. del r. Ist. Lombardo **1**$_2$, 1868, p. 130—137); *Sulla teoria delle cubiche gobbe* (*Nota Seconda*; Id. p. 407—419).

2) *Alcune formole per la teoria elementare delle coniche* (Giorn. di matem. **9**, 1871, p. 341—344).

3) Pubblicando questa lettera (Giorn. di matem. **10**, 1872, p. 47—48) il BELTRAMI osserva: « Come qui si vede, la teoria degli spazii ad n dimensioni si può utilmente invocare anche nelle ricerche dell' ordinaria geometria, quando si assumano come coordinate indipendenti di tale spazio i coefficienti di una linea o di una superficie di data specie, la quale tien luogo in tal maniera dell' elemento semplice o *punto* di quello spazio. È un concetto assai fecondo, il quale del resto è già stato eminentemente utile alla scienza: ognuno vede infatti che la dottrina analitica della dualità non è che l'applicazione del concetto medesimo al caso più semplice e più immediato, a quello cioè della retta e del piano. »

in esso adombrato un importante algoritmo, la cui invenzione risale a CHELINI[1]), e che il BELTRAMI ha magistralmente svolto, prima in un corso di lezioni tenuto a Pavia l' anno 1876—1877[2]) e poi in una memoria presentata all' Accademia di Bologna il 27 Febbrajo 1879 e dedicata appunto «alla cara e venerata memoria di DOMENICO CHELINI.»[3])

L' algoritmo in discorso riposa sopra il seguente principio algebrico generale:

«Abbiasi un' equazione della forma

$$\frac{X_1 \cdot \varphi_1(\lambda)}{(\lambda - a_1)^m} + \frac{X_2 \cdot \varphi_2(\lambda)}{(\lambda - a_2)^m} + \cdots + \frac{X_n \cdot \varphi_n(\lambda)}{(\lambda - a_n)^m} = \varphi(\lambda),$$

dove $X_1, X_2, \cdots, X_n$ ed $a_1, a_2, \cdots, a_n$ sono quantità indipendenti da λ (le ultime n tutte diverse fra loro), m un numero intero e positivo e $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ sono funzioni intere di λ che supporremo prime fra loro, e tali in oltre che $\varphi_k(\lambda)$ non sia divisibile per $\lambda - a_k$. Posto

$$f(\lambda) = (\lambda - a_1)\ (\lambda - a_2) \cdots (\lambda - a_n)$$

e moltiplicata tutta l' equazione per $[f(\lambda)]^m$, essa non conterrà più che potenze intere di λ e, se si designa con p la più alta di queste potenze e con $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ le radici dell' equazione stessa, si avrà l' identità

$$\sum_{k=1}^{k=n} X_k \cdot \varphi_k(\lambda) \left[\frac{(f(\lambda)}{\lambda - a_k}\right]^m - \varphi(\lambda)[f(\lambda)]^m = M(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_p) = M \cdot F(\lambda),$$

dove M è un fattore indipendente da λ e diverso da zero. Facendo in quest' identità $\lambda = a_k$ si ottiene

$$X_k\, \varphi_k(a_k)\ [f'(\lambda)]^m = MF(a_k)$$

donde

$$X_1 : X_2 : \cdots : X_n = \frac{F(a_1)}{\varphi_1(a_1)\ [f'(a_1)]^m} : \frac{F(a_2)}{\varphi_2(a_2)\ [f'(a_2)]^m} : \cdots : \frac{F(a_n)}{\varphi_n(a_n)\ [f'(a_n)]^m}.$$

Il principio, o lemma algebrico, del quale si tratta consiste semplicemente nel passaggio dalla primitiva equazione in λ a queste ultime formole». Numerosissime ed importanti sono le applicazioni che ne fece il BELTRAMI. Quelle relative alle curve del second' ordine completano un lavoro anteriore, specialmente per quanto si riferisce ai triangoli (di PONCELET) inscritti in una conica e circoscritti ad un' altra.[4]) Di novità e valore più

1) *Sull' uso sistematico dei principii relativi al metodo delle coordinate rettilinee* (Raccolta scientifica di Roma, Agosto, Novembre 1849).

2) S. PINCHERLE, *Commemorazione di EUGENIO BELTRAMI* (Rendic. dell' acc. di Bologna, 1899—1900).

3) *Ricerche di geometria analitica* (Mem. dell' acc. delle scienze dell' Istituto di Bologna, **10**$_3$, 1879, p. 233—312).

4) Fra le proposizioni esposte dal BELTRAMI notiamo le seguente: «Quando due coniche ammettono un triangolo circoscritto alla prima ed inscritto alla seconda, le

grandi sono adorne quelle aventi per soggetti le curve razionali, piane e sghembe, in particolare le cubiche gobbe. Riguardo a queste ultime merita di essere esplicitamente notato che il Beltrami, nel § 9 delle sue *Ricerche di geometria analitica*, si occupa di quella posizione speciale in cui si trovano due cubiche gobbe quando in una è inscritto un tetraedro circonscritto alla seconda; vi sono allora ∞^1 tetraedri in analoghe condizioni. Ora la scoperta di questa particolare situazione di due curve del terz' ordine si attribuisce di consueto all' Hurwitz, il quale vi giunse nel 1875[1]), ma non la fece conoscere che in uno scritto datato 18 Dicembre 1878 e apparso nei primi mesi dal seguente anno[2]); *onde ci sembra fuor di questione che Beltrami vi giunse dal canto suo*; a lui poi spetta la considerazione della speciale superficie rigata di sesto grado costituita degli spigoli di quei tetraedri e la determinazione delle sue principali singolarità. — Che il medesimo principio si possa adoperare per investigare le proprietà di certe superficie dimostrò il Nostro nell' ultima parte delle sue *Ricerche*, ove della superficie romana di Steiner vengono stabilite, con procedimento uniforme, le più caratteristiche proprietà.

Del resto, già prima di licenziare per la stampa codesto lavoro, il Beltrami, il 2 Gennajo 1879, aveva intrattenuto i suoi colleghi del l'Istituto Lombardo sulla convenienza di invocare gli stessi concetti per risolvere questioni attinenti alla teoria delle superficie cubiche.[3]) In tale comunicazione egli dimostrò, con una eleganza ed una semplicità che possono dirsi perfette, come, partendo da un' equazione esaedrale di una superficie del terz' ordine, si possa ottenerne univocamente l' equazione pentaedrale e come, inversamente, prendendo le mosse da questa, si possa giungere alle infinite equazioni esaedrali con cui essa può rappresentarsi; non occorre dilungarci sui particolari di queste trasformazioni che il Fiedler popolarizzò, riproducendole nella sua traduzione di uno dei trattati del Salmon.[4])

Se con ciò abbiamo esaurita l' enumerazione delle principali appli-

---

tangenti della prima conica nei punti comuni ad essa ed alla seconda, incontrano di nuovo la seconda conica nei punti contatto di questa colle tangenti comuni ad essa ed alla prima conica. » Assai prima di lui essa era stata osservata da Cayley (*On the porism of the in-and circumscribed triangle*; Philos. Trans. 151, 1861; *Mathem. Papers* T. IV, 292—308; §. IV); ma il Nostro ne trasse un corollario che abilita a costruire una delle due coniche quando si conosca l' altra.

1) Cf. l' articolo *Beweis eines Satzes aus der Theorie der Raumkurven III. Ordnung* (Mathem. Ann. 19, 1882).

2) *Über unendlich-vieldeutige geometrische Aufgaben, insbesondere über die Schließungsprobleme* (Mathem. Ann. 15, 1879).

3) *Sull' equazione pentaedrale delle superficie di terz' ordine* (Rend. del r. Ist. Lombardo 12_2, 1879, p. 24—36).

4) *Analytische Geometrie des Raumes*, II. Teil, 3. Aufl. (Leipzig 1880), p. 406—410.

cazioni fatte dal Nostro di quello che potrebbe opportunamente designarsi col nome di algoritmo di CHELINI-BELTRAMI, siamo convinti di essere ben lungi dall' avere completata l' indicazione delle questioni in cui esso può venire applicato con successo; e non possiamo che associare il nostro al suo voto che altri prosegua nella via che egli ha spianata; è presumibile che in conseguenza le nostre cognizioni sulle curve e le superficie del quart' ordine, nonchè la geometria degli iperspazî, compiano qualche notevole progresso!

Prima che chiudiamo questa rassegna degli scritti di geometria analitica del BELTRAMI, ci corre l' obbligo di fare menzione di alcuni suoi scritti minori che, se non contribuirono a stabilirne la fama, servono a completare la sua fisonomia di scienziato. Poniamo fra essi anzitutto le soluzioni delle Questioni 581[1]), 610[2]), 624[3]) e 637[4]) delle Nouvelles annales de mathématiques: e vi uniremmo quella della Questione 700 ove la direzione di questo periodico, invece di fare conoscere soltanto le aggiunte suggerite del BELTRAMI all' enunciato[5]), ne avesse pubblicata integralmente la soluzione. Critiche ed osservazioni da lui fatte sopra articoli dello stesso giornale[6]) non esigono lungo discorso. Per converso vanno segnalate le argomentazioni da lui adoperate[7]) per stabilire alcuni teoremi sulle curve piane algebriche, i quali provengono dal considerare le intersezioni di una di queste con un fascio regolare di raggi ruotanto attorno al proprio centro, teoremi anteriormente noti, almeno in parte, ma di cui il BELTRAMI additò la stretta attinenza con la teoria degli invarianti. E come potrebbero passare inosservate le sottili considerazioni[8]), mediante cui egli giunse per primo a dedurre in modo soddisfacente la espressione della distanza fra due rette parallele nello spazio da quella della minima distanza fra due rette sghembe?

XV.

Quasi da *trait-d' union* fra l' opera geometrica e quella analitica dello scienziato di cui ci occupiamo fungono due scritti concernenti quel ramo

1) Nouv. ann. di mathém. $\mathbf{3}_2$, 1864, p. 64—65.

2) Id. $\mathbf{2}_2$, 1863, p. 355—362. *Soluzione di un problema relativo alle superficie del second' ordine* (Giorn. di matem. **1**, 1863, p. 68—73).

3) *Seconde solution de la question 624* (Nouv. ann. de mathém. $\mathbf{2}_2$, 1863, p. 209—212).

4) Nouv. ann. de mathém. $\mathbf{2}_2$, 1863, p. 181—184.

5) *Correspondance* (Nouv. ann. de mathém. $\mathbf{4}_2$, 1865, p. 232—233).

6) *Extrait d'une lettre de M. EUGÈNE BELTRAMI de Milan* (Id. **1**, p. 315—316; *Extrait d'une lettre* (Ivi p. 449); v. anche Nouv. ann. de mathém. $\mathbf{3}_2$, p. 187, e Giorn. di matem. **12**, 1874, p. 204—205.

7) *Di alcune proprietà generali delle curve algebriche* (Giorn. di matem. **4**, 1866, p. 76—92).

8) *Sulla minima distanza di due rette* (Id. **5**, 1867, p. 351—354).

di scienza che giace sulla linea di confine fra l' algebra e la geometria analitica, cioè la rappresentazione geometrica dei numeri complessi. Che questa abbia attratta l' attenzione di chi fu ammiratore e studiosissimo di GAUSS non deve recare meraviglia, tanto più quando si rifletta che egli, nei primordi del suo insegnamento, dovette diffondere dalla cattedra quel potente mezzo d' investigazione delle verità matematiche. Tale osservazione concorda col fatto che il primo di quegli scritti[1]), porta la data « Bologna, 15 Aprile 1863 » ed ha un' impronta indiscutibilmente didattica. Osserva ivi il BELTRAMI che il modo consueto per dimostrare i teoremi di COTES e DE MOIVRE, essendo fondato sulla forma che hanno le radici di un' equazione binomia, può indurre a ritenere che di essi non esistano gli analoghi nelle equazioni algebriche complete, cioè della forma $f(z) \equiv z^n + A_1 z^{n-1} + \cdots + A_{n-1} z + A_n = 0$. Per sradicare questo preconcetto basta notare che, dette $z_1, z_2, \cdots, z_n$ le radici di $f(z) = 0$ e posto $|z - z_k| = \varrho_k$, si ha $|f(z)| = \varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_n$, e quest' equazione dice che « se nel primo membro di una equazione algebrica a coefficienti reali o complessi si sostituisce al posto di z il numero complesso $x + iy$ reppresentata dal punto Z, il modulo dell' espressione risultante eguaglia il prodotto delle distanze del punto Z dagli n punti radici dell' equazione proposta. » Supponendo in particolare $A_1 = \cdots = A_{n-1} = 0$, dal *teorema di BELTRAMI* scaturiscono immantinente quelli superiormente indicati.

Più elaborato ed esteso è l' altro dei lavori del Nostro sulla rappresentazione delle quantità complesse sopra i punti di un piano.[2]) Letto all' adunanza tenuta dall' Accademia di Bologna il 10 Febbrajo 1870, esso ha lo scopo di mostrare sopra un esempio l' utilità di sfruttare nella teoria delle forme algebriche l' osservazione — fatta prima da BELLAVITIS e MÖBIUS — che la detta rappresentazione abilita a trasformare le relazioni fra punti di una stessa retta in altrettante relazioni fra punti di un piano. L' esempio prescelto è offerto dalla funzione razionale intera di terzo grado e le sue forme invariantive. Lo spazio di cui disponiamo non è sufficiente per dar notizia di tutte le belle proposizioni geometriche a cui per tal modo il BELTRAMI pervenne; basti dire che nella memoria in questione, forse più che in qualunque altra, rifulge la possente fantasia di geometra di cui egli era dotato; se per l' eleganza del dettato e dei calcoli egli ivi si accosta al CHELINI, al CREMONA assomiglia nella sicurezza e genialità delle considerazioni geometriche! Una cosa però deve venir qui osservata, ed è l'applicazione che egli fa per incidenza della

---

1) *Sulle equazioni algebriche* (Giorn. di matem. 1, 1863, p. 123—124).

2) *Ricerche sulla geometria delle forme binarie cubiche* (Mem. della r. acc. dell' Istituto di Bologna 9_2, 1869, p. 607—657).

teoria delle coordinate trilineari allo studio delle figure connesse ad un triangolo rettilineo, la quale sfuggì anche ai più dotti cultori della geometria recente: se in avvenire essi vi dedicheranno la debita attenzione, non solo vi incontreranno certi punti e certe rette a cui di consueto si attribuisce un' origine diversa e meno antica[1]), ma ancora altri elementi a cui sarebbe opportuno di accordare un posto stabile nella scienza. Nè va taciuto che i metodi adoperati dal BELTRAMI sono indubbiamente suscettibili di altre applicazioni; onde è strano che essi siano stati tosto abbandonati e quindi siano caduti in una immeritata e deplorevole dimenticanza.[2])

XVI.

I lavori del BELTRAMI di cui ci resta ancora di parlare appartengono tutti all' analisi.

Sorvolando sopra una questione che egli propose nel Giornale di matematiche[3]) e che fu tosto risoluta da tre giovani destinati a prendere più tardi un posto onorevole nella schiera degli scienziati[4]), spenderemo qualche parola intorno ad un lavoro giovanile del BELTRAMI, che benchè abbia un' umile origine, merita se ne narri la breve storia per assegnarne il posto e determinarne il valore.

Nelle Nouvelles annales de mathématiques il VALTON propose (Question 654) di dimostrare che

$$\text{se } \varphi(2\omega) = \varphi(\omega) \cdot \cos\omega, \quad \text{si ha } \varphi(\omega) = \frac{\operatorname{sen}\omega}{\omega}\varphi(o).$$

Trasformato questo teorema in problema nasce la questione di «determinare la funzione φ soddisfacente all' equazione funzionale $\varphi(2\omega) = \varphi(\omega) \cdot \cos\omega$». Ora siffatto problema venne incontrato sin dalla fine del sec. XVIII da GREGORIO FONTANA, in una memoria[5]) ove egli giunse alla curva trascendente chiamata oggi cocleoide, e venne risolto in una maniera concordante con quella che risulta dall' enunciato Valtoniano. Or-

1) Citiamo ad esempio il così detto punto di LEMOINE, o punto d' intersezione delle simmediane di un triangolo.

2) Dopo che le linee precedenti erano state scritte uscì alla luce l' elegante nota di E. CESÀRO, *Sulle radici dell' Hessiana d' una cubica in relazione con quelle della cubica stessa* (Giorn. di matem. 39, 1901), la quale dimostra non prive di fondamento le qui fatte previsioni sopra l' avvenire del metodo di BELTRAMI [Luglio 1901].

3) *Questione 167*; p. 189.

4) G. ASCOLI, A. ROITI e E. PADOVA; Giorn. di matem. 5, 1867, p. 254—255.

5) *Sopra l' equazione di una curva, sopra la falsità di due famosi teoremi, e sopra le serie armoniche a termini infinitamente piccoli* (Mem. della soc. italiana delle Scienze 2, 1784).

bene il BELTRAMI[1]), con un ragionamento semplice e convincente, ha fatto vedere che la soluzione FONTANA-VALTON è ben lungi dall' essere la soluzione generale, giacchè l' espressione completa delle funzioni soddisfacenti al quesito è $\frac{\operatorname{sen} \omega}{\omega} \cdot \Theta\left(\operatorname{sen} \frac{2\pi \log \omega}{\log 2}, \cos \frac{2\pi \log \omega}{\log 2}\right)$, Θ essendo simbolo di una funzione arbitraria di due variabili.[2])

Per incontrare altri scritti analitici del BELTRAMI è mestieri che saltiamo un intervallo di tempo che comprende non meno di sedici anni; tocchiamo così all' epoca della sua vita in cui egli era totalmente assorbito da ricerche fisico-matematiche; ed infatti è agevole persuadersi che i lavori di analisi del Nostro non sono che diramazioni laterali di quelli che egli consacrò all' interpretazione matematica dei fenomeni della Natura (e di cui per scarsità di competenza non ci è dato di occuparci).

Un gruppo considerevole riflette le funzioni sferiche. Il più antico elemento di esso[3]) venne presentato all' Istituto Lombardo addì 5 Giugno 1879 ed ha per iscopo di dare una dimostrazione diretta della formola

$$\int_0^\pi (z - \cos\zeta\sqrt{z^2-1})^n \, d\zeta = \int_0^\pi \frac{d\varphi}{(z+\cos\varphi\sqrt{z^2-1})^{n+1}},$$

che l' HEINE[4]) aveva stabilito con un' argomentazione non esente da obbiezioni; quella suggerita dal Nostro, meriterebbe di prendere posto in tutti i trattati sulla teorica delle funzioni di variabili affatto libere, come esempio di integrazione nel campo complesso.

Importanza ancora maggiore possiede una comunicazione fatta all' Istituto Lombardo il 16 Giugno 1887[5]) ed intesa a mettere in piena luce la parte fondamentale che rappresentano nella teoria delle funzioni sferiche

---

1) *Remarques au sujet de la question 654* (Nouv. ann. de mathém. 2_2, 1863, p. 302—307).

2) Ci sia lecito notare che il risultato ottenuto dal BELTRAMI è un semplice corollario di una proposizione stabilita da LAPLACE nel 1773. Se infatti si designa con $\varphi_0(\omega)$ una soluzione particolare dell' equazione funzionale $\varphi(2\omega) = \varphi(\omega)\cdot\cos\omega$, si ha $\frac{\varphi(\omega)}{\varphi_0(\omega)} = \frac{\varphi(2\omega)}{\varphi_0(2\omega)}$ onde la funzione $\frac{\varphi(\omega)}{\varphi_0(\omega)}$ non muta cambiando ω in 2ω, grazie a quella proposizione essa è quindi una funzione arbitraria dei dne argomenti sen $\frac{2\pi\log\omega}{\log 2}$, cos $\frac{2\pi\log\omega}{\log 2}$. Scegliendo ora per $\varphi_0(\omega)$ la soluzione FONTANA-VALTON si conclude con BELTRAMI $\varphi(\omega) = \frac{\operatorname{sen}\omega}{\omega}\cdot\Theta\left(\operatorname{sen}\frac{2\pi\log\omega}{\log 2}, \cos\frac{2\pi\log\omega}{\log 2}\right)$.

3) *Intorno ad una formola integrale* (Rend. del r. Ist. Lombardo 12_2, 1879, p. 421—426).

4) *Handbuch der Kugelfunktionen* (II ed., Berlin 1878, p. 34—42).

5) *Sulle funzioni sferiche di una variabile* (Rend. del r. Ist. Lombardo 20_2, 1887, p. 469—478).

le due seguenti equazioni differenziali (dovute a F. NEUMANN)[1]):

$$\frac{dR_{n+1}}{dx} = x\frac{dR_n}{dx} + (n+1)R_n$$

$$\frac{dR_{n-1}}{dx} = x\frac{dR_n}{dx} - n\;R_n,$$

ove $R_n = AP_n(x) + BQ_n(x)$, essendo A, B due costanti arbitrarie e $P_n(x)$, $Q_n(n)$ funzioni sferiche d' ordine n risp. di I e II specie. Le molteplici applicazioni fattene dal BELTRAMI in quella nota ed in altre posteriori[2]) dimostrano che con piena ragione egli ravvisò in esse l' attitudine di esercitare una parte fondamentale nella teoria delle funzioni sferiche. In tale teoria egli ha poi introdotte le funzioni $S_n = \frac{R_n + R_{n-1}}{2}$, $T_n = \frac{R_n - R_{n-1}}{2}$, ha risolta la questione « sotto quali condizioni l' equazione differenziale delle funzioni sferiche a due variabili è soddisfatta da una funzione di una sola variabile? » ed ha suggerita una nuova definizione delle funzioni sferiche dei tre coseni di direzione di un raggio.

Di un' altra classe di funzioni il BELTRAMI fu condotto ad occuparsi[3]) studiando l' articolo di ABEL intitolato *Résolution d'un problème de mécanique* (Journ. für Mathem. **1**, 1826; *Oeuvres* T. I, p. 27 delle I[a] ed. e p. 97 delle II[a]). In esso il grande geometra norvegese ha stabilito un teorema di calcolo integrale il quale permette in molti casi di determinare la forma di una funzione esistente sotto il segno d' integrale definito, quando si conosca l' espressione di questo mediante un parametro che entra nell' integrale stesso. Il BELTRAMI ne ha trasformato convenientemente l' enunciato e quindi lo ha applicato alle due funzioni cilindriche:

$$I_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x \operatorname{sen}\Theta)\cdot d\Theta, \quad I_1(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \operatorname{sen}(x \operatorname{sen}\Theta)\operatorname{sen}\Theta\cdot d\Theta;$$

ottenne così lo sviluppo di una funzione di una variabile reale in serie trigonometrica di seni e coseni degli argomenti $v_1 x, v_2 x, \cdots$, le v essendo radici di una delle equazioni $I_0(x) = 0$, $I_0'(x) = 0$, $I_0''(x) = 0$: tale sviluppo offre grande analogia con quelli in serie di FOURIER. Di funzioni

1) *Beiträge zur Theorie der Kugelfunktionen* (Leipzig 1878, p. 61 e 65).

2) *Quelques remarques au sujet des fonctions sphériques* (Comptes rendus Paris **110**, 1890, p. 934—938); *Sur la théorie des fonctions sphériques* (Id. **116**, 1893, p. 181—183); *Sulla teoria delle funzioni sferiche* (Rend. del r. Ist. Lombardo **29**$_2$, 1896, p. 793—799).

3) *Intorno a un teorema di ABEL e ad alcune sue applicazioni* (Rend. del r. Ist. Lombardo **13**$_2$, 1880, p. 327—338); *Intorno ad alcune serie trigonometriche* (Ivi p. 402—413).

cilindriche il Nostro si è poi occupato anche più tardi[1]), ottenendo col loro ajuto una nuova espressione del potenziale di un anello.

L' ultimo ordine di investigazioni del Beltrami di cui ci rimane da rendere conto è consegnato in una terna di memorie recanti il medesimo titolo.[2]) Osserva l' autore, nell' esordio della prima, che alla teoria delle ordinarie funzioni potenziali a tre coordinate indipendenti si fa di solito corrispondere quella delle funzioni potenziali logaritmiche e che, per quanto questo riscontro sia da ritenersi per molti rispetti il più legittimo ed ovvio, non è escluso che si possano concepire altre maniere di corrispondenza; quella che egli propone presenta la circostanza notevole che l' equazione differenziale facente riscontro a quelle di Laplace e Poisson è di primo ordine invece che di secondo. Per definire le nuove funzioni $U(x, y)$, si indichino con a, b le coordinate rettangolari di un punto generico di una qualunque regione finita σ del piano, e x, y quelle di un punto arbitrario di questo stesso piano. Si ponga $c = a + ib$, $z = x + iy$ e si chiami h una funzione, reale o complessa, di a, b, supposta monodroma finita e generalmente continua. Pongasi

$$U(x, y) = \int \frac{h \cdot d\sigma}{c - z};$$

all' infinito si avrà

$$\lim\,(zU) = -\int h \cdot d\sigma,$$

inoltre

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y} = \begin{cases} -2\pi h & \text{pei punti } (x, y) \text{ appartenenti a } \sigma \\ 0 & \text{,, ,, ,, esterni ,, ,,;} \end{cases}$$

se s' è una linea chiusa qualunque limitante un' area σ' e $\zeta = \xi + i\eta$ il numero complesso relativo ad un punto qualunque del piano e con ε si designa 1 o 0 secondochè quel punto è interno od esterno a σ', si avrà:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{s_1} \frac{U\,dz}{z - \zeta} = \varepsilon\; U(\xi, \eta) - \int \frac{h \cdot d\sigma'}{z - \zeta'} = \varepsilon\; U(\xi, \eta) + \frac{1}{2\pi}\int \left(\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y}\right)\frac{d\sigma}{z - \zeta}:$$

per la validità di questa formola — da riguardarsi come la generalizzazione del noto teorema di Cauchy per le ordinarie funzioni di una variabile complessa — si richiede che U sia una funzione monodroma continua e finita in tutta la regione σ e che le sue derivate prime siano ivi finite e generalmente continue. In qual modo si possa determinare una funzione potenziale complessa nel caso in cui σ sia

---

1) *Sulle funzioni cilindriche* (Atti dell' acc. d. sc. di Torino **16**, 1881, p. 201—205).

2) *Sulle funzioni complesse* (Rend. del r. Ist. Lombardo $\mathbf{20}_2$, 1887, p. 624—635; $\mathbf{24}_2$, 1891, p. 1188—1195; $\mathbf{27}_2$, 1894, p. 337—344).

limitata da una linea assegnata, vedrà il lettore nelle due ultime note del Beltrami, ove è esaurientemente trattato il caso in cui essa sia un' ellisse.

Noi non ne compendieremo i risultati, come non faremo più di un cenno fugace delle traduzioni da lui fatte[1]) e dei suoi lavori biografici[2]) e bibliografici[3]), ritenendo che il fin qui esposto porga già un' idea adeguata della somma dei contributi che egli diede, in circa otto lustri di ininterrotto lavoro, al patrimonio intellettuale dell' umanità.

Infatti, scaturisce dalle pagine precedenti non esservi quasi diramazione delle scienze esatte al cui progresso egli non abbia notevolmente contribuito: dalla geometria elementare alla teoria degli iperspazî, dalla modesta teoria delle sezioni coniche a quella delle funzioni più elevate dell'analisi, dai fondamenti della geometria alla teoria delle forme algebriche, dalle geometria analitica elementare alla geometria infinitesimale, dalla teoria delle equazioni a quella delle curve e superficie! Ed in ciascuna di queste svariate ricerche egli seppe adoperare i procedimenti più consentanei alla natura del soggetto, palesandosi pienamente padrone tanto dei metodi astratti dell' analisi, quanto di quelli che i geometri ricavarono dalla intuizione spaziale; in tutte egli seppe scoprire la via che mena al midollo della questione trattata, e condurre i propri lettori con mano così esperta e sicura, con passo così scevro da tentennamenti ed incertezze, da far nascere in essi l' illusione che essi avrebbero potuto fare anche meno di una guida tanto sapiente; strana illusione che solo è capace di produrre l' arte più perfetta, che, ove tutto fa, meno si mostra!

La matematica è un' arte ed una scienza ad un tempo, dice una massima antica; se tutta l' odierna letteratura matematica venisse ad un tratto a scomparire, e sole superstiti rimanessero le opere del Beltrami, la verità di quel principio sarebbe sufficientemente dimostrata.

Genova, 21 Aprile 1901.

1) Giornale di matem. **11**, 1873, p. 153—179; Annali di matem. **6**$_2$, 1875, p. 153—215.

2) Alfredo Clebsch (Giorn. di matem. **10**, 1872, p. 347—349); Domenico Chelini (Id. **16**, 1878, p. 345). — *Commemorazione di D. Chelini* (Collectanea mathematica p. I—XXVIII). — Enrico Betti (Rendic. del circolo matematico di Palermo **6**, 1892, p. 245—246). — Ernesto Padova (Rendic. della r. acc. dei Lincei **5**$_5$:1, 1896, p. 284—285). — Francesco Brioschi (Ann. di matem. **26**$_2$, 1897, p. 343—347 e Rendic. dell' adunanza solenne della r. acc. dei Lincei, 12 Giugno 1898). — Sophus Lie (Rend. della r. acc. dei Lincei **8**$_5$:1, 1899, p. 281). — *Parole dette in onore di Lord Kelvin* (Ivi p. 419—420).

3) Giornale di matem. **1**, 1863, p. 319—320 (Chelini) e T. VII, 1869, p. 29—41 (Casorati); veggansi poi nei Rendiconti dell' acc. dei Lincei le parole di presentazione per parecchie opere offerte in omaggio.

Kleine Mitteilungen.

Kleine Bemerkungen zur zweiten Auflage von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik".

Die erste (fette) Zahl bezeichnet den Band, die zweite die Seite der „Vorlesungen".
BM = Bibliotheca Mathematica.

Über die Bemerkungen zu den Bänden **1, 2, 3 : 1—2** der „Vorlesungen" siehe S. 351—360.

3:521. Die Worte: „eigenthümlich genug, daſs ein Schriftsteller des 18. Jahrhunderts uns einen bisher unverstandenen Ausdruck des 13. Jahrhunderts deutlicher machen muſste" sollen unserer Ansicht nach in Fortfall kommen, da es wenig wahrscheinlich sein dürfte, daſs die „minor guisa" des Leonardo Pisano wirklich „welsche Praktik" bedeutet (vgl. BM 2_3, 1901, S. 144).
G. Eneström.

3:636—637. Herr Cantor lenkt hier die Aufmerksamkeit auf eine in den *Opera* des Johann Bernoulli vorkommende Aufgabe aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung, deren Sinn nicht ganz deutlich ist, und giebt eine Erklärung derselben. Mit dieser Erklärung sind wir einverstanden, aber wenn dieselbe richtig ist, muſs wohl die gesuchte Wahrscheinlichkeit nicht $\frac{1+n}{5+3n}$, wie Bernoulli angiebt, sondern $\frac{2}{5+3n}$ sein. In der That bemerkt Bernoulli selbst, daſs seine Lösung zu einem Resultat führt, „quod paradoxum esse videtur".
G. Eneström.

3:660. In Bezug auf Johann Bernoullis Veröffentlichung einer Methode der Summierung der reziproken Quadratzahlen bemerkt Herr Cantor: „Die einzige Erklärung dieser auffallenden Nachveröffentlichung kann darin gefunden werden, daſs Bernoulli durch Euler nur von dem Ergebnisse der Summirung Kenntniſs erhalten haben dürfte." Das Wort „dürfte" scheint uns hier unangemessen, da Johann Bernoulli in seinem Briefe an Euler vom 2. April 1737 ausdrücklich sagt: „cum primum [meus Daniel] mihi nominasset summam a te inventam $\frac{cc}{6}$, praetereaque nihil ... mox ipse proprio meo Marte totum detexi mysterium" (vgl. Biblioth. Mathem. 1890, S. 23). G. Eneström.

3:667. Bezüglich der Eulerschen Abhandlung *Variae observationes circa series infinitas* (Comment. Petrop. 9) bemerkt Herr Cantor, daſs in derselben

„die erste uns bekannte öffentliche Benutzung des Buchstabens e für die Basis des natürlichen Logarithmensystems sich findet". Aber schon 1892 lenkte Herr Rudio in seiner Schrift über die Kreismessung (S. 53) die Aufmerksamkeit auf das Vorkommen dieser Bezeichnung im Bande 7 der Comment. Petrop., der 1740 erschien. Wir erlauben uns hinzuzufügen, dafs die von Herrn Rudio citierte Seite nicht die erste Stelle dieses Bandes ist, wo die Bezeichnung vorkommt. Schon auf S. 146 benutzt Euler sie, und zwar ohne jede Erklärung, er sagt nämlich: „quae integrata dat $s = cl\,\frac{s - ax - ac + c}{c - ac}$, seu $e^{\frac{s}{c}}(c - ac) = s - ax + c - ac$"; in der That kommt die Bezeichnung in Eulers Briefen aus dem Jahre 1739 (z. B. an Goldbach und Joh. Bernoulli) häufig vor. Dagegen bezeichnet Euler noch im 6. Bande der Comment. Petrop. (gedruckt 1738) die Basis des natürlichen Logarithmensystems mit dem Buchstaben c. G. Eneström.

3:689. Il convient de faire observer que la formule $e^{xi} = \cos x + i \sin x$ a été signalée sous la forme

$$\log\,(\cos x + i \sin x) = ix$$

déjà par Cotes dans l'*Harmonia mensurarum* (1722), p. 28. Voici le passage dont il s'agit: „Si quadrantis circuli quilibet arcus, radio CE descriptus sinum habeat CX, sinumque complementi ad quadrantem XE; sumendo radium CE pro Modulo, arcus erit rationis inter $EX + XC\sqrt{-1}$ et CE mensura ducta in $\sqrt{-1}$." Voir I. Timtchenko, Histoire de la théorie des fonctions (1899, en russe) p. 527—528 et G. Vacca dans la Revue de mathématiques 7, 1900, p. 65.

3:695. Le développement du nombre e en fraction continue sous la forme

$$2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cdots}}}}}$$

a été trouvé déjà par Cotes. En effet sa *Logometria* (p. 7) publiée dans les Philosophical transactions 29, 1714, et reproduite dans l'*Harmonia mensurarum* (1722) contient le passage suivant: „Dividatur 2, 71828 etc. per 1 ··· et rursus minor per numerum qui reliquus est et hic rursus per ultimum residuum, atque ita porro pergatur: et prodibunt quotientes 2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, 1, 12, 1, 1, 14, 1, 1, 16, 1, 1, etc." Ce passage, reproduit par M. Peano (*Formulaire de mathématiques* 2:3, 1899), avait été observé déjà par W. R. Hamilton (voir R. P. Graves, *Life of Sir W. Rowan Hamilton* t. III [Dublin 1889], p. 596). G. Vacca.

3:774. Nachdem Herr Cantor über die Schrift *Flores geometricae* (1728) des G. Grandi berichtet hat, bemerkt er, dafs derselbe Verfasser später (1737)

eine *Sectionum conicarum synopsis* herausgab. Aber nach RICCARDI (*Bibliot. matem. ital.* I, 624) ist die *Synopsis* nur eine Übersetzung des *Compendio delle sezioni coniche*, der schon 1722 erschien, und gehört also eigentlich der vorigen Abteilung des 3. Bandes der *Vorlesungen* an. G. ENESTRÖM.

3:798. Herr CANTOR giebt an, dafs in einer Schrift von L. CARRÉ ein gewisser „Koenersma" erwähnt wurde, und fügt hinzu: „der richtige Name dürfte KOËRSMA sein". Aber in der von Herrn CANTOR citierten Abhandlung sagt CARRÉ (S. 57): „J'ai appris qu'un géomètre nommé M. KOËRSMA [*sic*] en a parlé", und, soweit uns bekannt ist, kommt die Form „Koenersma" zuerst in der 1. Auflage der CANTORschen *Vorlesungen* vor. G. ENESTRÖM.

3:848. Zeile 19 steht $N\gamma = Nc - b\beta - c\gamma$, aber aus der Figur geht deutlich hervor, dafs $N\gamma = Nc - c\gamma$. Freilich trifft diese Anmerkung nur die Darstellungsweise, und ebenso könnte man bemerken, dafs es vielleicht angemessener gewesen wäre, statt des Ausdruckes: „Pd ist gegen das frühere Pd um $c\gamma$ gewachsen" den folgenden zu setzen: „$Dd - Cc$ ist in $Dd - C\gamma = Pd + c\gamma$ übergegangen." G. ENESTRÖM.

3:881. Den Satz, der in moderner Bezeichnung $\frac{\partial^2 A}{\partial t\,\partial u} = \frac{\partial^2 A}{\partial u\,\partial t}$ lautet, hat Herr CANTOR zum ersten Male in der EULERschen Abhandlung *De infinitis curvis ejusdem generis* (Comment. Petrop. **7** [gedruckt 1740]) gefunden. Dafs aber dieser Satz damals gar nicht neu war, sondern schon 1721 (Acta Erud. Supplem. **7**, S. 311) als ein Axiom angeführt und benutzt worden war, ist in dem Briefe von NIKOLAUS I BERNOULLI an EULER vom 6. April 1743 hervorgehoben (FUSS, *Correspondance mathématique* II [1843], S. 704). In diesem Briefe giebt BERNOULLI einen geometrischen Beweis des Satzes, der auch unmittelbar aus einer Stelle der Abhandlung *Exercitatio geometrica de trajectoribus orthogonalibus* II (Acta Erud. Supplem. **7**, 1721, S. 307—308) von NIKOLAUS II BERNOULLI hervorgeht. G. ENESTRÖM.

3:IV (Vorwort). Schon vor MERCATOR hatte BRIGGS in seiner *Arithmetica logarithmica* (1624) S. 4, 21, ferner in der *Trigonometria britannica* (1633), S. 52 den ganzzahligen Bestandteil seiner Logarithmen mit dem Namen „Charakteristik" bezeichnet (vgl. z. B. WOLF, *Handbuch der Astronomie* I, S. 75). M. KOPPE.

Vermischte historische Notizen.

Zur Optik des Robertus Linconiensis. Ich habe kürzlich bemerkt, dafs der von Herrn M. CURTZE in dieser Zeitschrift $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 55—59 veröffentlichte *Tractatus* LINCONIENSIS *de fractionibus et reflexionibus radiorum* bereits im Jahre 1503 publiziert worden ist. Der Titel der kleinen offenbar sehr selten gewordenen Schrift lautet:

LIBELLVS LINCONIENSIS DE PHISI | CIS LINEIS ANGVLIS ET FIGVRIS PER | QVAS OMNES ACCIONES NATVRA | LES COMPLENTVR [Holzschnitt $12 \times 9^1/_2$ cm, einen radius reflexus und einen radius refractus darstellend]. 4°, 6 ungez. Bl., letztes weiſs.

Das Colophon auf Bl. 5ᵛ sagt aus, daſs das Büchelchen in Nürnberg gedruckt wurde: „... impressus Nurenberge Anno ſalutis MCCCCC · III · Quarta Auguſti".

Der Herausgeber war Andreas Stiborius, der auf Bl. 1ᵛ die Schrift dem Ratsherrn in Nürnberg Joh. Fuxmagen widmet, wobei er dieselbe damals schon ein „libellum ... rariſſimum" nennt.

Panzer, Brunet und Grässe verzeichnen den Druck unter Stiborius, ebenso der *Catalogue of the Crawford Library*, was nicht richtig ist.

Der 1503 publizierte Text stimmt mit demjenigen des Münchener Codex lat. 534 ziemlich gut überein. Wahrscheinlich ist dieser „tractatus" nur ein Teil eines gröſseren optischen Werkes von Robert Grosseteste, von dem sich weitere Stücke in den Digby Mss. 98, 104, 190 und 220 erhalten haben. Dieselben handeln *de luce, de colore, de iride.* Vermutlich hat Roger Baco von dem 40 Jahre älteren Bischof von Lincoln, den er als Gelehrten aufs höchste preist, gerade in der Optik Manches gelernt. G. Hellmann.

Anfragen.

96. Über die Summierung zweier trigonometrischer Reihen. Bekanntlich sind seit der Mitte des 18. Jahrhunderts die Reihen, deren allgemeines Glied von der Form $A_x \sin(\alpha + \beta x)$ oder $A_x \cos(\alpha + \beta x)$ ist, in der angewandten Mathematik von groſser Bedeutung. Für den Fall $A_x = 1$ hat Euler in den Miscellanea Berolinensia 7, 1743, S. 133—134, 142—143, die Summe einer endlichen Anzahl von Gliedern angegeben. Da aber der Fall $\alpha = 0$ für die erste Reihe schon von Archimedes (*De sphaera et cylindro* I, prop. 22; *Opera omnia* ed. Heiberg I, S. 98—101) und für die zweite Reihe von Snellius (siehe Braunmühl, *Gesch. d. Trigonometrie* I, S. 240) erledigt war, und da man aus diesem Spezialfall leicht die Formeln für beliebiges α herleiten kann, so waren die Eulerschen Resultate im Wesentlichen nicht ganz neu. Auf der anderen Seite gab Archimedes seinen Satz nur in rein geometrischer Form an, und Snellius leitete seine Formel her, nur um gewisse numerische Berechnungen zu erleichtern, so daſs man in keinem Falle von einer *bewuſsten* Summierung einer trigonometrischen Reihe sprechen kann. Dagegen konnte man vermuten, daſs irgend ein Mathematiker des 18. Jahrhunderts vor Euler die fraglichen Summen absichtlich gesucht und wirklich gefunden hätte.

Ist die Vermutung richtig, und wenn dies der Fall ist, welche Methoden wurden bei der Summierung angewendet? G. Eneström.

Recensionen.

Moritz Cantor. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Dritter Band. Zweite Auflage. Dritte Abteilung. Abschnitt XVIII (1727—1758). Leipzig, Teubner 1901. 8⁰, X S. + S. 493—923. Mark 12,40.

Im Vorwort zur ersten Auflage dieser Abteilung hat Herr CANTOR über die immer wachsende Sehnsucht berichtet, womit er seit einigen Jahren der Beendigung des dritten Bandes der Vorlesungen entgegensah. Die Wahrhaftigkeit seines Berichtes war der aufmerksame Leser der genannten Abteilung auch selbst im stande zu bestätigen, denn bei einem so hervorragenden Verfasser konnte an einigen Stellen die Behandlung des vorhandenen Materials nur durch diese Sehnsucht nach der Beendigung erklärt werden. In der That war man nicht selten versucht anzunehmen, dafs Herr CANTOR durch diese unangenehme Empfindung bewogen worden war, zuerst die Résumés der gröfseren in Betracht kommenden Werke zu verfertigen, und sich dadurch ein Gerippe bildete, worin er nachträglich das Übrige so gut, als es ihm möglich war, einfügte, ohne Gelegenheit zu haben, das neue Material mit dem alten organisch zu verbinden. Es ist klar, dafs ein solches Verfahren leicht dazu führt, dem Leser mehr einen Bericht über den Stand der Mathematik an gewissen Zeitpunkten der behandelten Periode, als eine wirkliche Geschichte der Mathematik zu bieten, und dafs es auch in Bezug auf die Darstellungsweise einige Übelstände mit sich bringt. In unserer Besprechung der ersten Auflage (Biblioth. Mathem. 1898, 53—61) haben wir diese Sache mit Stillschweigen übergangen und zwar aus dem Grunde, weil Herr CANTOR durch seine offenherzige Erklärung im Vorworte seiner Schrift die Kritik im voraus entwaffnet hatte.

Sehen wir jetzt nach, wie Herr CANTOR bei der Herausgabe der neuen Auflage verfahren ist, so finden wir — übereinstimmend mit dem, was im neuen Vorworte ausdrücklich hervorgehoben wird —, dafs er zwar an Einzelheiten die bessernde Hand gelegt, aber sonst die Darstellung unverändert gelassen hat. Die Mängel derselben, die der Leser der ersten Auflage verpflichtet war, als *damals* unvermeidlich zu betrachten, finden sich also in der zweiten Auflage wieder. So z. B. giebt Herr CANTOR S. 750—753 ein Résumé des Inhalts des 1. Kapitels der *Institutiones calculi differentialis*, das möglicherweise den Stand der betreffenden Theorie im Jahre 1755 charakterisieren kann, aber fast gar keinen Aufschlufs über die Entstehung der einzelnen Sätze bringt. Zwar weifs der Leser des 3. Bandes der *Vorlesungen* aus S. 343—347 (vgl. S. 755), dafs JAKOB BERNOULLI eine Formel hergeleitet hat, aus welcher unmittelbar der Wert von $\Sigma(x^n)$ hervorgeht; aus S. 385—386 (warum fehlt S. 753 der Verweis hierauf?), dafs NICOLE sich mit finiter Integration von Faktorialausdrücken beschäftigte; und aus einigen Worten auf S. 753 kann man folgern, dafs bei TAYLOR etwas über die Differenzenrechnung vorkommt.

Da man aber aus dem Berichte über die *Methodus incrementorum* nur ersieht (vgl. S. 381), dafs sich die Formel für $y^{(n)}$ dort findet, so hat man keine Möglichkeit zu entscheiden, ob die übrigen Sätze auf S. 750—753 von EULER selbst herrühren oder nicht. — S. 758—759 erfahren wir, dafs und wie der sog. EULERsche Satz von den homogenen Funktionen in den *Institutiones calculi differentialis* bewiesen ist, ferner dafs EULER diesen Satz schon in seiner *Mechanica* (1736) für den Fall einer Funktion von zwei Veränderlichen andeutete, und dafs FONTAINE denselben Satz vor 1740 nachentdeckte; S. 888 — 889 bringt uns noch Aufschlüsse über denselben Gegenstand, aber dafs EULER den Satz schon in der Abhandlung *De linea brevissima in superficie quacumque dua quaelibet puncta jungente* (Comment. acad. Petrop. 3 [gedruckt 1732], S. 120) für eine homogene Funktion nullter Dimension, und in der Abhandlung *De infinitis curvis ejusdem generis* (Comment. acad. Petrop. 7 [gedruckt 1740], S. 185) für eine beliebige homogene Funktion von zwei Veränderlichen behandelt hatte, wird nicht erwähnt.

Auf der anderen Seite sind gewisse Punkte auch in der zweiten Auflage mit einer Ausführlichkeit behandelt, welche wir nur in der Weise erklären können, dafs Herr CANTOR bei der Bearbeitung der ersten Auflage gewisse Stücke so spät einfügte, dafs es ihm unmöglich wurde, das schon fertige mit Bezugnahme hierauf zu ändern. So z. B. ist die EULERsche Summenformel an vier verschiedenen Stellen behandelt. Zuerst begegnet sie uns S. 657, wo ihr Vorkommen in den Comment. acad. Petrop. 6 erwähnt wird, dann finden wir S. 664—665 den EULERschen Beweis in den Comment. acad. Petrop. 8 ausführlich dargestellt, weiter S. 683—685 einen ebenso ausführlichen Bericht über den MACLAURINschen Beweis im *Treatise of fluxions* § 828—831, und endlich S. 764—767 noch einen Beweis aus den *Institutiones calculi differentialis*, dessen Grundgedanke von dem des früheren kaum verschieden ist; bezüglich der Entwickelungen S. 766 mag beiläufig bemerkt werden, dafs die Herleitung der Koeffizienten der Summenformel aus dem Ausdruck $\frac{u}{1-e^{-u}}$ schon früher von MACLAURIN im *Treatise of fluxions* § 847 und von EULER in den Comment. acad. Petrop. 12 erledigt worden ist. — Ob die EULERsche Definition: „die Summe einer Reihe ist der geschlossene Ausdruck, aus welchem sie durch Entwickelung hervorgebracht werden kann", so wichtig ist, dafs dieselbe zweimal (vgl. S. 692 und 734), und zwar beidemal in gesperrter Schrift dem Leser vor die Augen gestellt werden mufs, scheint uns auch fraglich zu sein.

Wir haben schon auf einen Umstand hingewiesen, der bewirkt, dafs man leicht irre geführt werden kann, wenn man in der Schlufsabteilung der CANTORschen *Vorlesungen* genaue Aufschlüsse über die Entstehung eines besonderen Satzes sucht. Es giebt aber noch einen anderen Umstand, der eine ähnliche Wirkung haben kann, wenn auch auf einem sehr beschränkten Gebiete, nämlich die Folgerung, die Herr CANTOR stillschweigend oder ausdrücklich aus dem Datum auf dem Titelblatte der einzelnen Bände der Comment. acad. Petrop. zieht. S. 652 schreibt er mit Bezugnahme auf EULERS Abhandlung in den Comment. acad. Petrop. 5 (ad annos 1730 et 1731): „Die Thätigkeit EULERS auf dem Gebiete der Reihenlehre beginnt 1730 ... Wir sind nicht im Stande zu entscheiden, ob EULER damals schon Kenntnifs von STIRLINGS ebenfalls von 1730 datirten *Methodus differentialis* besessen haben kann."

S. 760 bemerkt Herr CANTOR bezüglich einer Abhandlung aus dem Comment. acad. Petrop. 6 (ad annos 1732 et 1733): „Wir werden uns im 117. Kapitel überzeugen, dafs EULER schon 1732 von dem Dasein eines integrirenden Factors zum Mindesten eine Ahnung hatte", und S. 882 hebt er ausdrücklich hervor, dafs die Zeit der Einreichung einer gewissen Abhandlung — aus dem Zusammenhange geht hervor, dafs er diese Zeit mit dem Datum auf dem Titel der betreffenden Veröffentlichung identifiziert —, das Erfinderrecht ihres Verfassers aufser Zweifel gestellt hat. Aber Herr CANTOR hat selbst S. 843 darauf aufmerksam gemacht, dafs eine in den Comment. acad. Petrop. ad annum 1728 publizierte Abhandlung sicherlich nicht vor 1729 in Angriff genommen wurde, und dafs dieser Fall gar nicht ungewöhnlich war, lehrt uns die von FUSS herausgegebene, von Herrn CANTOR vielfach erwähnte *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIe siècle* (St. Pétersbourg 1843). Dort erfahren wir nämlich u. a. (II, S. 18), dafs die erste Abteilung der *Dissertatio hydraulica* des JOHANN BERNOULLI, die in den Comment. acad. Petrop. ad annum 1737 veröffentlicht ist, erst am 7. März 1739 eingereicht wurde, ferner (II, S. 42), dafs die zweite Abteilung derselben *Dissertatio*, die in den Comment. acad. Petrop. ad annum 1738 gedruckt ist, erst am 31. August 1740 fertig war, und in einem Briefe vom 17. Juli 1730 (II, S. 377) ersucht GOLDBACH DANIEL BERNOULLI ihm mitzuteilen, ob ein [damals noch nicht redigierter] Artikel in den Comment. acad. Petrop. ad annum 1728 publiziert werden könne. Unter solchen Umständen dürfte es kaum ratsam sein, die von Herrn CANTOR angewandte Methode zur Sicherstellung des Erfinderrechtes zu empfehlen, und die Resultate, wozu er dadurch gelangt ist, sind also nur mit Vorsicht zu benutzen.

Unter den ziemlich zahlreichen Druckfehlern der ersten Auflage sind zwar einige jetzt verbessert, aber viele derselben sind in der neuen Auflage stehen geblieben. Wir erlauben uns die von uns notierten hier aufzuführen. S. 518 Z. 20 statt 1682 lies 1683. — S. 519 Z. 22 statt 1682 lies 1683. — S. 584 Z. 23 statt 1737 lies 1637. — S. 649 Z. 14 statt $\frac{1}{2}$ lies $\frac{1}{z}$. — S. 666 Anm. statt 1739 lies 1737. — S. 667 Anm. 1) statt 1739 lies 1737. — S. 689 Z. 15 statt $z^{+\sqrt{-1}} + z^{-\sqrt{-1}}$ lies $2^{+\sqrt{-1}} + 2^{-\sqrt{-1}}$. — S. 762 Z. 3 statt <1 lies $<x$. — S. 777 Z. 23 statt Christophle lies Christophe. — S. 822 Z. 28 statt *Istituzioni* lies *Instituzioni*. — S. 823 Anm. 2) dieselbe Verbesserung. — S. 829 Z. 17 ist nach dem Bruche der Faktor y^{v-s-1} hinzuzufügen. — S. 845 Z. 5 statt CB lies CP. — S. 871 Anm. 1) statt Max lies Mac. — S. 891 Z. 17 statt αdv^2 lies $-\alpha dv^2$. — S. 903 Z. 14 statt DE lies dE. — Auch der Schreibfehler „kürzeste" S. 845 Z. 14, der den betreffenden Passus sinnlos macht, findet sich in der zweiten Auflage.

Wenn wir also bedauern müssen, dafs die jetzt besprochene Abteilung der *Vorlesungen* zuweilen keine zuverlässigen Aufschlüsse über die Entstehung der einzelnen Sätze und Methoden giebt, so sollen wir doch auf der anderen Seite anerkennen, dafs dieselbe eine grofse Anzahl von wertvollen historischen Notizen enthält, und aus diesem Grunde freuen wir uns über das Erscheinen der neuen Auflage. Wir würden uns noch mehr gefreut haben, wenn sie als selbständige Schrift unter dem Titel: „Beiträge zur Geschichte der Mathematik 1727—1758" erschienen wäre.

G. ENESTRÖM.

Neuerschienene Schriften.

Das Zeichen * bedeutet, dafs die betreffende Schrift der Redaktion nicht vorgelegen hat.

Autoren-Register.

Adam, 28.
Anarillus, 18.
Barbarin, 54.
Beman, 38.
Berberich, 64.
Björnbo, 15.
Bobynin, 3, 46.
Boll, 14.
Brillouin, 51.
Bryan, 50.
Burkhardt, 35
Cantor, 6, 7, 62.
Ceretti, 17.
Cremona, 50.
Curtze, 18.
Descartes, 28.
Doolittle, 39.
Duran Loriga, 58.
Eneström, 1, 32, 47.
Eukleides, 13.
Fantasia, 8.
Favaro, 23.
Fazzari, 37.
Frizzo, 21.
Fuchs, 58.
Gauss, 42.
Gherardo Cremonese, 18.
Godefroy, 34.
Gravelaar, 24.
Halsted, 63.
Hardcastle, Frances, 45.
Hoffmann, 30
Hultsch, 10.
Jahnke, 55.
Jordan, 58.
Joubert, 58.
Kapteyn, 5.
Klein, 41
Klimpert, 8.
Kluyver, 5.
Koppe, 31.
Korteweg, 5
Kötter, 40.
Kutta 29
Lampe, 4, 58.
Loria, 2, 70.
Mach, 9.
Mansion, 43.
Mascheroni, 37.
Mehmke, 27.
Mittag-Leffler, 58.
Müller, Felix, 68, 69.
Netchajeff, 65.
Papperitz, 20.
Peirce, 19.
Schmidt, M., 11.
Schmidt, W., 12
Schoute, 5.
Simon, 13.
Sintzoff, 48.
Stark, 61, 66.
Sturm, 23.
Suter, 16.
Tannery, 28
Tichomandritzky, 52
Vacca, 33.
Valentin, 25.
Wallenberg, 4
Wertheim, 22, 36
Wölffing, 44, 49
Zeeman, 5.

a) Zeitschriften. Allgemeines.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Herausgegeben von G. Eneström. Leipzig (Stockholm). 8°. [1
$\mathbf{2}_3$ (1901) : 2/3. — [Recension des Heftes $\mathbf{2}_1$: 1:] Zeitschr. für mathem. Unterr. 32, 1901, 282—283. (G. Wertheim.)

Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche pubblicato per cura di G. Loria. Torino (Genova). 8°. [2
1901 : 2—3.

Физико-математическія науки въ ходѣ ихъ развитія. Журналъ издаваемый В. В. Бобынинымъ. Москва. 8°. [3
$\mathbf{1}_2$: 7. — Die physisch-mathematischen Wissenschaften im Laufe ihrer Entwickelung. Zeitschrift herausgegeben von V. V. Bobynin.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik herausgegeben von E. Lampe und G. Wallenberg. Berlin. 8°. [4
30 (1899) : 1—2. — Die Seiten 1—62 enthalten Referate der im Jahre 1899 erschienenen mathematisch-historischen Schriften.

Revue semestrielle des publications mathématiques, rédigée sous les auspices de la société mathématique d'Amsterdam par P. H. Schoute, D. J. Korteweg, J. C. Kluyver, W. Kapteyn, P. Zeeman. Amsterdam. 8°. [5
9 : 2 (octobre 1900 — avril 1901).

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Dritter Band. Zweite Auflage. Dritte Abtheilung. Abschnitt XVIII (1727—1758). Leipzig, Teubner 1901. 6]
8° X S. + S. 493—923. — [12, 40 M.] = $\mathbf{2}^3$ (1900) [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. $\mathbf{2}_3$, 1901, 351—359 (G. Eneström, M. Curtze, A Favaro, H. Reuter, G. Wertheim, H. Bosmans, F. Müller, G. Vacca.) = $\mathbf{3}^3$: 1—2 (1900—1901). [Recension oder kleine Bemerkungen:] Liter. Centralbl. 1900, 2170 (A. W . . . s) — Zeitschr. für mathem. Unterr. 32, 1901, 284 (G. Wertheim.) — Biblioth. Mathem. $\mathbf{2}_3$, 1901, 359—360. (F. Müller, G. Eneström, M. Koppe.)

Cantor, M., Origines du calcul infinitésimal. Paris 1901. [7
8°, 25 S. — Bibliothèque du congrès international de philosophie. III. Logique et histoire des sciences.

Klimpert, R., Storia della geometria ad uso dei dilettanti di matematica e degli alunni delle scuole secondarie. Traduzione dal tedesco con note ed appunti di P. Fantasia. Bari, Laterza 1901. [8
8°, (7) + 324 + (1) + X S. — [4 lire.]

***Mach, E.,** Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt. Vierte verbesserte und vermehrte Auflage. Leipzig, Brockhaus 1901. [9
8°, XII + 550 S. — [8 M.] — [Recension:] Naturwiss. Rundschau 16, 1901, 488—489 (E. Lampe.)

b) Geschichte des Altertums.

Hultsch, F., Neue Beiträge zur ägyptischen Teilungsrechnung. [10
Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, 177—184.

Schmidt, M. C. P., Realistische Chrestomathie aus der Litteratur des klassischen Altertums. 1, 2 (1900, 1901). [Recension:] Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, 362—363. (G. Eneström.) — Zeitschr. für mathem. Unterr. 32, 1901, 380—381. (E. Meyer.) [11

Schmidt, W., Bericht über griechische Mathematiker und Mechaniker (1890—1901). [12
Jahresber. über die Fortschr. der class. Altertumswiss. 108, 1901, 59—128.

Simon, M., Euclid und die sechs planimetrischen Bücher (1901). [Recension:] Mathesis 1_3, 1901, 199—200. (P. M.) — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1901, 62—63. [13

Boll, F., Die Sternkataloge des Hipparch und des Ptolemaios. [14
Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, 185—195.

Björnbo, A. A., Hat Menelaos aus Alexandria einen Fixsternkatalog verfasst? [15
Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, 196—212.

c) Geschichte des Mittelalters.

Suter, H., Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke (1900). [Recension:] Bullet. d. sc. mathém. 25_2, 1901, 55—56 (P. T.) — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1901, 62. [16

Ceretti, U., Sopra alcune formole di matematici arabi. [17
Rivista di fisica (Pavia) 2, 1900, 97—110; 3, 1900, 107—120.

Anaritii in decem libros priores Elementorum Euclidis commentarii. Ex interpretatione Gherardi Cremonensis edidit M. Curtze (1899). [Recension:] Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, 363—366. (A. A. Björnbo.) [18

Peirce, C. S., Campanus. [19
Science (New York) 13_2, 1901, 809—811.

d) Geschichte der neueren Zeit.

Papperitz, E., Über die wissenschaftliche Bedeutung der darstellenden Geometrie und ihre Entwickelung bis zur systematischen Begründung durch Gaspard Monge. Rede. Freiberg i./S. 1901. [20
8°, 24 S.

Frizzo, G., De numeris libri duo authore Ioanne Noviomago, esposti ed illustrati. Verona, Druckor 1901. [21
8°, (7) + 174 S. — [3 lire.]

Wertheim, G., Die Logistik des Johannes Buteo. [22
Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, 213—219.

Sturm, A., Über den Ursprung der Benennung „Radius" für Halbmesser. [23
Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, 361. — Antwort auf eine Anfrage.

Gravelaar, N. L. W. A., Stevins' Problemata geometrica. [24
Amsterdam, Wisk. Genoots., Nieuw Archief 5_2, 1901, 103—191.

Valentin, G., Über den geometrischen Quadranten (1594). [25
Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, 360. — Anfrage.

Favaro, A., Galileo Galilei e Simone Mayr. [26
Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, 220—223.

Mehmke R., [Über die Erfindung des logarithmischen Rechenstabes durch E. Gunter]. [27
Zeitschr. für Mathem. 46, 1901, 383. — Anfrage.

Œuvres de Descartes publiées par Ch. Adam et P. Tannery sous les auspices du ministère de l'instruction publique. Correspondance. IV. Juillet 1643—avril 1647. Paris, Cerf 1901. [28
4°, (6) + 708 + (1) S.

Kutta, W., Elliptische und andere Integrale bei Wallis. [29
Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, 230—234.

Hoffmann, J. C. V., Der englische Philosoph Hobbes als Mathematiker. [30
Zeitschr. für mathem. Unterr. 32, 1901, 262—267.

Koppe, M., Über Huygens' Näherungsmethoden bei Kreis- und Logarithmen-Berechnung. [31
Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, 224—229.

Eneström, G., Über elementare Herleitung von Maximalwerten. [32
Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, 360. — Anfrage.

Vacca, G., Sulla versiera. [33
Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1901, 33—34. — Historische Notiz.

Godefroy, M., La fonction gamma. Théorie, historique, bibliographie. Paris, Gauthier-Villars 1901. [34
8°, VII + 94 S. — Inauguraldissertation.

Burkhardt, H., Entwicklungen nach oscillirenden Funktionen. Bericht. Erste Hälfte. [35
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 10 : 2, 1901, 1—176.

Wertheim, G., Über den Ursprung des Ausdruckes: „Pellsche Gleichung". [36
Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, 360—361. — Anfrage.

***Mascheroni, L.,** La geometria del compasso. Nuova edizione pubblicata da G. Fazzari. Palermo, Era nuova 1901. [37
8°, XVI + 152 S. — [2 lire.]

Beman, W. W., On the term „differential quotient". [38
Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, 361 — Antwort auf eine Anfrage.

Doolittle, C. L., Some advances made in astronomical science during the nineteenth century. [39
Science (New York) 14_2, 1901, 1—12.

Kötter, E., Die Entwickelung der synthetischen Geometrie. I. Teil: Von Monge bis auf Staudt, 1847. 2. Lieferung. [40
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 5 : 2 1901, XXVIII S. + S. 129—486. — [14. 40 *M.*]

Klein, F., Über den Stand der Herausgabe von Gauss' Werken. Vierter Bericht. [41
Göttingen, Gesellsch. d. Wissensch., Nachrichten

1901; Geschäftl. Mitt. 12—15. — [Wieder abgedruckt:] Mathem. Ann. 55, 1901, 139—142.
Gauss, C. F., Werke. Band VIII (1900). [Recension:] Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, 366—369. (F. Engel.) [42

Mansion, P., Sur la géométrie non euclidienne de Gauss. [43
Bruxelles, Soc. scient., Annales 25, 1900, A: 104—109.

Wölffing, E., Bericht über den gegenwärtigen Stand der Lehre von den cyklischen Kurven. [44
Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, 235—259.

Hardcastle, Frances, Report on the present state of the theory of point-groups. [45
British association, Report 70 (1900), 121—131.

Бобынинъ, В. В., Литература и дѣятели исторіи математики въ XIX вѣкѣ. Самсонъ Поль Таннери. [46
Fiziko-matem. naouki 1_2, 1901, 205—217. — Bobynin, V. V., Die Litteratur und die Arbeiter auf dem mathematisch-historischen Gebiete im 19. Jahrhundert. Samson Paul Tannery.

Eneström, G., Bio-bibliographie der 1881—1900 verstorbenen Mathematiker. [47
Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, 326—350.

Sintzoff, D., Bibliographia mathematica rossica 1899. [48
Kasan, Fiz.-matem. obchtch., Izvjestia 10_2, 1901. 25 S.

Wölffing, E., Abhandlungsregister 1900—1901. [49
Zeitschr. für Mathem. 46, 1901, 390—418. — Aus dem Gebiete der angewandten Mathematik.

e) Nekrologe.

Eugenio **Beltrami** (1835—1900). [50
London, Mathem. soc., Proceedings 32, 1900, 436—439. (G. H. Bryan.) — Giorn. di matem. 38, 1900, 355—375. (Abdruck des Nekrologes von L. Cremona.)

Joseph Louis François **Bertrand** (1822—1900). [51
Torino, Accad. d. sc., Atti 35, 1900, 690—691. — Revue génér. d. sc. 12, 1901, 115—124. (M. Brillouin.)

Eugen von **Beyer** (?—1899). [52
Charkoff, Matem. obchtch., Soobchtch. 7_2, 1900, 20—22. (M. A. Tichomandritzky.)

Otto **Böklen** (1821—1900). [53
Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1901, 58.

Georges **Brunel** (1856—1900). [54
L'enseignement mathém. 3, 1901, 237—239. (P. Barbarin.)

Ferdinand **Caspary** (1853—1901). [55
L'enseignement mathém. 3, 1901, 376—379. (E. Jahnke.)

Elwin Bruno **Christoffel** (1829—1900). [56
Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1901, 57.

George Francis **FitzGerald** (1851—1901). [57
Nature 61, 1901, 445—447.

Charles **Hermite** (1822—1901). [58
Roma, Accad. d. N. Lincei, Atti 54, 1901, 99—102. (Ch. Joubert.) — Acta Mathem. 24, 1901, 395—396. (G. Mittag-Leffler.) — Journ. de mathém. 7_5, 1901, 91—95. (C. Jordan.) — Journ. für Mathem. 123, 1901, 174. (L. Fuchs.) — Naturwiss. Rundschau 16, 1901, 333—335, 348—350. (E. Lampe.) — Science (New York) 13_2, 1901, 883—885. (Übersetzung des Nekrologes von J. J. Durán Loriga durch G. B. Halsted.)

John Viriamu **Jones** (1856—1901). [59
Science (New York) 13_2, 1901, 997—998.

Albino **Nagy** (1866—1901). [60
Revue de mathém. 7, 1901, 111. (V.)

Henry Augustus **Rowland** (1848—1901). [61
Naturwiss. Rundschau 16, 1901, 362—363. (J. Stark.)

Oskar **Schlömilch** (1823—1901). [62
Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, 260—281 [mit Porträt]. (M. Cantor, mit Schriftverzeichnis von G. Eneström.) — L'enseignement mathém. 3, 1901, 296.

Franz **Schmidt** (1826?—1901). [63
The americ. mathem. monthly 8, 1901, 107—110 [mit Porträt]. (G. B. Halsted.)

Wilhelm **Schur** (1846—1901). [64
Naturwiss. Rundschau 16, 1901, 450. (A. Berberich.)

Alexandr **Shbikowskij** (1829—1900). [65
Kasan, Fiz.-matem. obchtch., Izvjestia 10_2, 1900, B: 39—46. (N. Netchajeff.)

Peter Guthrie **Tait** (1831—1901). [66
Naturwiss. Rundschau 16, 1901, 462. (J. Stark.) — Science (New York) 14_2, 1901, 77.

John James **Walker** (1825—1900). [67
London, Mathem. soc., Proceedings 32, 1900, 439—442. (R. T.) — *London*, Royal soc., Year-Book 1901, 225.

f) Aktuelle Fragen.

Müller, Felix, Vocabulaire mathématique français-allemand et allemand-français, contenant les termes techniques employés dans les mathématiques pures et appliquées. — Mathematisches Vokabularium französisch-deutsch und deutsch-französisch, enthaltend die Kunstausdrücke aus der reinen und angewandten Mathematik. Zweite Hälfte. Leipzig, Teubner 1901. [68
8°, S. XI—XIII + 133—314 + 2 S. — [11 M.] — [Recension:] Deutsche Litteraturz. 22, 1901, 1178.

Müller, Felix, Über die mathematische Terminologie. Eine historisch-linguistische Skizze. [69
Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, 282—325.

Loria, G., Il catalogo internazionale della letteratura scientifica. [70
Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1901, 65—74.

Wissenschaftliche Chronik.

Ernennungen.

— Professor A. Chessin in Baltimore zum Professor der Mathematik an der „Washington university" in St. Louis.

—Professor A. D. Cole an der „Denison nniversity" zum Professor der Physik an der „Ohio state university".

— Professor Th. Des Coudres in Göttingen zum Professor der Physik an der Universität in Würzburg.

— Privatdocent J. Geitler von Arminoen in Prag zum Professor der Physik an der deutschen Universität in Prag.

— K. E. Guthe zum Professor der Physik an der Universität von Michingan.

— P. Haag in Paris zum Professor der deskriptiven Geometrie an der polytechnischen Hochschule in Paris.

— Professor J. von Hepperger in Graz zum Professor der Astronomie an der Universität in Wien.

— Dr. P. Janet zum Professor der Physik an der Universität in Paris.

— Professor G. Jaumann in Prag zum Professor der Physik an der technischen Hochschule in Brünn.

— Privatdocent G. Kowalewski in Leipzig zum Professor der Mathematik an der Universität in Greifswald.

— Dr. J. G. Love in Cambridge U.S.A. zum Professor der Mathematik an der „Harvard university" in Cambridge.

— Professor J. G. MacGregor in Halifax zum Professor der Physik an der Universität in Edinburg.

— Dr. H. C. Morene an der „Clark nniversity" zum Professor der Mathematik an der „Leland Stanford university" in Californien.

— Dr. F. H. Seares an der Universität von Californien zum Professor der Astronomie an der Universität von Missouri.

— Dr. O. M. Stewart an der „Cornell university" zum Professor der Physik an der Universität von Missouri.

— Professor Ch. B. Thwing am „Knox college" zum Professor der Physik an der „Syracuse university".

— Professor R. W. Wood an der Universität von Wisconsin zum Professor der Physik an der „Johns Hopkins university" in Baltimore.

Todesfälle.

— Ferdinand Caspary, früherer Oberlehrer am Humboldt-Gymnasium in Berlin, zuletzt bei Siemens und Halske in Charlottenburg angestellt, geboren in Unruhstadt den 29. December 1853, gestorben in Berlin den 17. Juli 1901.

— C. S. James, früherer Professor der Mathematik am „Bucknell college", gestorben den 8. Juni 1901.

— John Viviamu Jones, Professor der Physik am „University college of south Wales" in Cardiff, geboren in Pontreporth bei Swansea 1856, gestorben in Genève den 2. Juni 1901.

— Ignaz Klemenčič, Professor der Physik an der Universität in Innsbruck, geboren in Treffen (Krain) den 6. Februar 1853, gestorben 1901.

— Franz Melde, Professor der Physik an der Universität in Marburg, geboren in Grossenlüder den 11. März 1832, gestorben in Marburg den 17. März 1901.

— Henry Truman Safford, Professor der Astronomie am „Williams college" in Williamstown, Mass., geboren in Royalton den 6. Januar 1836, gestorben in Williamstown den 13. Juni 1901.

— Wilhelm Schur, Professor der Astronomie an der Universität in Göttingen, geboren in Altona den 15. April 1846, gestorben in Göttingen den 1. Juli 1901.

— James Hamblin Smith, Lehrer am

„Cains college" in Cambridge, gestorben 1901.

— William Walton, früherer Professor der Mathematik an der Universität in Cambridge, geboren in Pendleton bei Manchester den 16. September 1813, gestorben in Little Shelford bei Cambridge Mai(?) 1901.

— Otto Wiedeburg, Professor der Physik an der technischen Hochschule in Hannover, gestorben den 30. Juni 1901, 34 Jahre alt.

Demnächst erscheinende mathematisch-historische Arbeiten.

— Eine italienische Übersetzung von W. W. R. Balls *Account of the history of mathematics* durch D. Gambioli in Mailand ist unter der Presse und wird voraussichtlich am Ende dieses Jahres erscheinen.

Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.

— At the „Cornell university" (Ithaca) Prof. G. A. Miller has delivered in the summer session (July 5th—August 16th) a course of lectures (five hours) on the history of mathematics.

— At the „Columbia university" (New York) Prof. D. E. Smith will deliver during the academic year 1901—1902 a course (two lectures each week) on the history of mathematics.

This course is designed to give a general view of the historical development of the elementary branches of mathematics —arithmetic, algebra, synthetic and analytic geometry, trigonometry, and the differential and integral calculus, from the earliest times to the present. The rise and growth of the higher mathematics, chiefly in the 19th century, will also briefly be considered.

Mathematikerversammlungen im Jahre 1901.

— *Deutsche Mathematikerversammlung 1901.* Die Jahresversammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung fand dieses Jahr zu Hamburg 22.—28. September statt, in Gemeinschaft mit der Abteilung I der 73. Deutschen Naturforscherversammlung. Dabei wurden von den Herren W. Fr. Meyer, F. Klein, A. Sommerfeld Berichte über den Stand der *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* erstattet. Herr P. Stäckel referierte über die Entwickelung des Unterrichtsbetriebes in der angewandten Mathematik an den deutschen Universitäten, und Herr D. Hilbert besprach einige neuere mathematische Dissertationen, die im Laufe der zwei letzten Jahre von seinen Schülern verfaſst worden sind. Es wurden noch Vorträge gehalten von den Herren A. Adler, C. V. L. Charlier, V. Eberhard, W. Ebert, F. Engel, J. Halm, E. Hartwig, G. Hauck, E. Jahnke, R. von Lilienthal, F. London, A. Marcuse, W. Fr. Meyer, G. Mittag-Leffler, E. Müller, F. Schilling, P. H. Schoute, H. Schubert, P. Stäckel, E. Study, J. Torka und E. Zermelo. In der Geschäftssitzung wurde beschlossen, den Jahresbericht vom Band XI ab in ein monatlich erscheinendes Organ umzuwandeln, das neben dem bisherigen Inhalte besonders noch Mitteilungen aktuellen Interesses bringen soll, und zum Herausgeber wurde Herr A. Gutzmer gewählt.

— *Mathematics at the British association meeting 1901.* The British association met at Glasgow 1901, September 11th—18th. In section A (mathematics and physics), the president Mr. P. A. MacMahon gave an account of the Mathematical society of Spitalfields (1717—1845), made some remarks upon the present state of mathematics and physics in Great Britain, and concluded by considering the work of a mathematical specialist in relation to the general advance of scientific knowledge. Several papers were presented, by Mr. A. Cunningham, Mr. G. H. Darwin, Mr. A. G. Greenhill, Mr. R. W. H. T. Hudson, Mr. G. Mittag-Leffler and others.

— *Mathematics at the American association meeting 1901.* The section A of the American association for the advancement of science held its meeting 1901 at Denver, August 24th—31th. The program of the section consisted of 25 papers, among which were 10 on pure mathematics, 13 on astronomy, and 2 on the metric system. Mr. G. A. Miller read a paper *On the history of several fundamental theorems in*

the theory of groups of finite order and Mr. A. Macfarlane gave an account of a proposed bibliography of quaternions and allied systems of mathematics. Other papers were presented by Mr. F. Cajori, Mr. G. B. Halsted, Mr. L. E. Dickson, Mr. C. J. Keyser, Mr. A. Emch, Mr. A. C. Smith and Mr. J. I. Hutchinson. The next meeting of the Association will be in Pittsburg June 28 — July 3 1902.

— *Session de l'association italienne „Mathesis" en 1901.* La 2e session de l'association „Mathesis", fondée par des professeurs de mathématiques aux écoles moyennes de l'Italie, a été tenue à Livorno 17—22 août 1901, en présence des membres de l'association et de plusieurs autres professeurs. En premier lieu des rapports sur l'enseignement mathématique aux différents établissements d'instruction (lycées, écoles techniques, écoles normales, universités) ont été présentés par MM B. Bettini, G. Sforza, S. Ortu-Carboni, A. Conti et G. Pittarelli. Puis des communications ont été faites par MM. G. Loria, F. Giudice, P. Caminati, G. Vailati et A. Padoa. Enfin M. G. Peano a présenté à l'association un spécimen (8 pages in-8°) d'un dictionnaire mathématique qu'il prépare en moment, et qui sera rédigé par lui avec le secours d'autres professeurs aux universités et aux écoles moyennes de l'Italie.

Gekrönte Preisschriften.

— *Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen.* Herr Ph. Furtwängler in Potsdam hat für die Beantwortung der Aufgabe: „Es soll für einen beliebigen Zahlkörper das Reciprozitätsgesetz der l-ten Potenzreste entwickelt werden, wenn l eine ungerade Primzahl ist" den Preis bekommen.

Preisfragen gelehrter Gesellschaften.

— *Académie des sciences de Danemark à Kjöbenhavn.* Concours de l'année 1901. On demande une réponse bien établie à la question si, d'après la classification ordinaire, chaque famille de courbes gauches contient des formes limites composées de droites. Dans le cas d'une réponse négative à cette question, on demande de plus des recherches soit sur la condition qu'une famille doit remplir pour en contenir, soit sur la limitation éventuelle de quelques résultats trouvés au moyen de ces formes limites.

Vermischtes.

— Auf der Hamburger Naturforscher-Versammlung, September 1901, ist eine Deutsche Gesellschaft für Geschichte der Medizin und der Naturwissenschaften begründet. In den Vorstand ist u. a. Herr Emil Wohlwill in Hamburg gewählt. Die Gesellschaft beabsichtigt eine Zeitschrift herauszugeben, deren 1. Heft voraussichtlich Anfang 1902 erscheint.

— Am 31. Oktober 1901 konstituierte sich in Berlin eine neue wissenschaftliche Vereinigung unter dem Namen „Berliner Mathematische Gesellschaft"; zum Vorsitzenden wurde Herr J. Weingarten, zu Schriftführern die Herren A. Kneser und E. Jahnke erwählt; die Zahl der Teilnehmer betrug 41. Im wissenschaftlichen Teil der Sitzung sprachen Herr Weingarten über eine neue Ableitung des Hauptsatzes der Helmholtzschen Wirbeltheorie, und Herr Kneser über die Begründung der geometrischen Proportionslehre unabhängig vom Axiom des Archimedes im Anschluss an Untersuchungen von H. Grassmann, R. Hoppe, K. Kupffer und D. Hilbert.

— Un congrès international d'histoire des sciences mathématiques, physiques et naturelles, constitué comme 14e section du congrès international des sciences historiques, sera tenu à Rome en avril 1902. D'après le programme, le congrès a pour but de discuter les questions d'importance principale pour le développement de l'étude de l'histoire des sciences (p. ex. l'établissement d'une bibliothèque particulière à cet effet), puis de donner lieu à des communications s'y rapportant et à des résumés des recherches faites dans ce domaine pendant la seconde moitié du 19e siècle. M. V. Cerruti présidera à la 14e section et M. A. Favaro à la sous-section pour l'histoire des sciences mathématiques et physiques.

Namenregister.

Abba Mari Chalfan, 72.
d'Abbadie, A. Th., 327, 329.
Abdalrahman al-Sufi, siehe al-Sufi.
Abdank-Abakanowitz, B., 327, 373.
Abdelmelik, 147.
Abdelrahman, 46, 47.
Abderrahman al-Sufi, siehe al-Sufi.
Abel, N. H., 292, 308, 310—312, 318, 438.
Abenragel, siehe ibn Ridjal.
Abhabucher, siehe Abubekr.
Abolfazen, 200.
Abraham (Jbrahim), 45—47, 371.
Abraham bar Chijja (Savasorda), 64, 75, 171.
Abraham ben Jakob, 68.
Abraham Conti, 65.
Abraham ibn Esra, 63, 64, 67, 143.
Abraham Jagel, 67.
Abraham Sakut, 68, 69, 71, 198—200.
Abraham Viceno, 69.
„Abthiniatus", 11.
Abubekr, 46, 47, 72.
Abu Bekr, siehe el-Hassâr.
Abû Ga'far, siehe el-Châzin.
Abu Kamil Schudjâ ben Aslam, 60.
Abulfarag, 162, 201.
Abul Fath, 147.
Abu'l Fida, 162.
Abul Hosein (Husein) [= al Sufi], 199—201.
Abu'l Mahasin, 162.
Abûl'-Wefa el-Bûzgânî, 163.
Abuothman, 47.
Abn Zakarija, siehe el-Hassâr.
Achilles Tatins, 385.
Adam, Ch., 448, 449.
Adams, J. C., 327.
Aderamen, siehe Abdelrahman.
Adler, A., 452.
Adriaenz, Adriaenszoon, Adriani, siehe Metins.
„Aganis", 9, 10, 363, 371.
Agapius, 11.
Agnesi, Maria Gaetana, 172, 301.
Agrippa von Bitbynien, 195, 198, 203, 207, 210, 211, 390.
Ahmed ben Jnsuf, 364.
Ahmes, 177—184.
Ahrens, W., 338, 358, 374.
Airy, G. B. 327.
Airy, W., 327.
Aken, H. von, 249.
Alasia, Cr., 376.
al-Batani, 158, 195, 198, 200, 202—209, 211, 352, 387.
Albeggiani, G., 327.
Albertus (der heilige), 387.
Albohazen, 200.
Albubater, 72.
Albuhassin (Albu Hosein) [= al-Sufi], 197—201.
Alcuin, 358.
d'Alembert, J., 111—115, 117—119, 165, 290—292, 308.
Alexander der Grofse, 202, 204.
Alexander VI., 72.
al-Fergani, 62, 72, 364, 365.
Alfonso, 76.
Alfonso X., 59, 62, 66, 72, 198—201, 387.
al-Gazzali, 66, 69.
al-Hadschdschadsch, 9, 170, 171.
Albazen, siehe ibn Haitam.
Ali ibn Rogeil, 199.
Alkalasadi, 15—18, 21, 22, 27, 28, 30, 31, 36—38, 40.
Alkarkbi, 21, 33.
Alkbwarizmi, 15, 21, 32, 46, 284, 361.

Alkindi, 46, 364.
al-Mamun, 202.
al-Narizi, siehe Neirizi.
Alnasawi, 21, 352.
Alsdorf, 384.
Alsted, J. H., 357.
al-Sufi, 199—204, 206—209.
al-Zarkali, siehe Zarkali.
Ames, J. S., 370, 374.
Ameseder, A., 327.
Ammonius, 11.
Ampère, A. M., 289, 290, 310.
Amstein, H., 239, 249.
Anaritius, siehe Neirizi.
Anatolius, 141.
Andrejeff, K. A., 329, 336.
Anna (die heilige), 387, 391.
Anthoniszoon, A., 146.
Antoninus I., 195, 199, 201, 204.
Anzoletti, Laura, 170, 172.
Aoust, L., 237, 240, 241, 249.
Apianus, P., 321.
Apollonios, 8, 9, 147, 161, 175, 292, 300—302, 318, 321, 354, 377.
„Aposedanius“, 11.
Appell, P., 329, 370, 374.
Arago, F., 342.
Aratoribus, G. de, 171.
Aratos, 185, 188, 189, 191—194, 362, 387.
d'Arcais, F., 340.
Archibald, R. C., 235, 249.
Archimedes, 5, 6, 48, 77, 161, 171, 213, 224, 249, 251, 298, 300, 302, 303, 305, 318, 352, 353, 387, 444, 453.
Argoli, A., 141.
Aristarchos, 387.
Aristoff, L. von, 328.
Aristoteles, 5, 8, 49, 53, 76, 141, 161, 171, 284, 378, 383.
Aronhold, S. H., 306, 307, 319, 327, 370, 373.
Artzt, A., 302.
Arzachel, siehe Zarkali.
Arzberger, J., 247, 249.
Aschenburg, S., 73.
Ascher, 199.
Aschieri, F., 330.
Ascoli, G., 436.
Asmus, Pauline, 260.
Assemani, S., 66, 67, 69, 70, 75.
Assmann, R., 345.
Astruc, siehe Jehuda ben Salomo.
Athanasius, 390.
Aubry, A., 170, 171, 242, 244, 249, 370, 372.
Audibert, 242, 243, 249.
Auer, Chr., 186.
August, F. W. O., 239, 249, 288.
Augustinus, 387.
Aumer, J., 204.
Autolykos, 160, 364.
Averroes, 61, 66, 76.
Avicenna, 65, 76.
Avogadro, A., 291.
Azarchel, siehe Zarkali.
Azzarelli, M., 245, 249, 327.

Bachet de Méziriac, C. G., 148, 292, 357, 358.
Bachmann, P., 286.
Bäcklund, A. W., 312.
Backlund, O., 335.
Bacon, R., 444.
Baehr, G. F. W., 327.
Baillet, A., 148.
Baillet, J., 177, 178, 181, 182.
Bakhuyzen, E. F. v. d. S., 222, 327, 347.
Balbin, V., 373, 375.
Baliani, G. B., 301.
Ball, R. S., 297, 304.
Ball, W. W. R., 152, 370, 452.
Balthasar (der heilige), 391.
Baltzer, R., 97, 327, 428.
Banning, E., 338.
Baraniecki, M. A., 327, 349.
Barbarin, P., 330, 448, 450.
Bardey, E., 327.
Bardey, G., 327.
Barfufs, F. W., 264, 266.
Barisien, E. N., 243, 249.
Barozzi, Elisa, 392.
Barozzi, F., 59.
Bartels, J. M. Ch., 123, 127.
Bartolomeo dei Manfredi (degli Orologi), 59, 60.
Baruch ben Salomo ben Joab, 61.
Basso, G., 329, 334.
Battaglini, G., 301, 328, 333, 414, 427.
Baur, C. W. von, 245, 249, 328.
Bayer, J., 188, 191, 194, 387.

Bayes, Th., 292.
Bayma, J., 249.
Bealnaeus, R., 357.
Beaune, siehe Debeaune.
Beck, L., 379.
Beda Venerabilis, 387.
Beer, R., 364.
Bellacchi, G., 170, 173, 331.
Bellavitis, G., 106, 110, 242, 246, 249, 252, 287, 373, 435.
Bellermann, G., 236—238, 240, 242, 243, 246, 249.
Beltrami, E., 170, 173, 328—330, 338, 373, 392—414, 416—421, 423—440, 450.
Beltrami, G., 392.
Beman, W. W., 170, 361, 370, 448, 449.
Benedictis, B. de, 336.
Benjacob, I., 67, 68, 73, 74.
Benjamin ben Immanuel de Norzi, 68.
Berberich, A., 448, 450.
Berger, A. Fr., 375.
Bergery, L., 249.
Bernardi, V., 267.
Bernoulli, D., 151, 152, 441, 447.
Bernoulli, Jakob, 151, 231, 241, 250, 263—265, 270, 271, 288, 292, 301, 305, 308, 319, 359, 445.
Bernoulli, Johann I, 111, 150—152, 154, 155, 237, 247, 248, 250, 252, 255, 285, 292, 310, 311, 441, 442, 447.
Bernoulli, N. I., 288, 443.
Bernoulli, N. II., 153, 155, 443.
Berry, A., 370, 371.
Berteu, A., 333.
Berthelot, D., 142.
Berthelot, M. P. E., 328.
Bertini, E., 331.
Berto, E., 241, 250.
Bertrand, J. L. F., 173, 225, 302, 303, 328, 329, 332, 338, 341, 342, 373, 398, 410, 418, 450.
Berzolari, L., 392.
Besant, W. H. A., 240, 245, 246, 250.
Bessel, F. W., 271, 293, 303, 308, 310, 319, 370, 373.
Besthorn, R. O., 9—11, 160, 170, 171, 363, 364.
Betti, E., 329, 394, 440.
Bettini, B., 453.
Beyer, E. von, 450.
Bézout, E., 290, 292, 307.
Bianchi, L., 131, 139, 338, 399, 400, 402, 404, 411.
Bianchini, J., 60, 196, 353.
Biel, B., 246, 250.
Bierens de Haan, D., 329.
Biernatzki, K. L., 143.
Billwiller, R., 58, 349.
Binet, J. Ph. M., 293, 308.
Biörklund, J., 339.
Biot, J. B., 87, 98, 291.
Birkenmajer, L. A., 353, 370, 372.
Bislichi, 60.
Bitterli, E., 392.
Bizance, 150.
Bjerknes, C. A., 292, 330, 336, 337.
Björnbo, A. A., 195, 196, 366, 448, 449.
Blancanus, J., 387.
Blumenthal, O., 235, 247, 250.
Blümner, H. 379.
Bobek, K., 329, 373.
Bobilier, 292, 319.
Bobynin, V. V., 329, 332, 345, 370, 372, 373, 448, 450.
Bode, J. E., 291.
Bodemann, E., 156.
Bögehold, H., 170, 172.
Bohlin, K., 335.
Böhme, E. M., 250.
Böklen, G. H. O., 174, 242, 245, 246, 250, 329, 333, 343, 373, 450.
Boll, Fr., 185, 196, 203, 209, 448, 449.
Bolton, H. C., 370, 372.
Boltzmann, L., 291, 339, 370, 373.
Bolyai, J., 369, 414.
Bolyai, W., 142, 170, 172, 369, 370, 373, 375.
Bombelli, R., 147.
Boncompagni, B., 144, 152, 215, 329, 341, 351, 357.
Bonet de Latas, 72.
Bongodes (= Jehuda), 64.
Bonnet, O., 125, 312, 329, 345, 401.
Bool, W. von, 244, 250.
Boole, G., 292, 376.
Booth, J., 289, 292.
Borchardt, C. W., 135, 308.
Borda, J. C., 311.

Bordoni, A., 395.
Borelli, G. A., 147.
Borgia, C., 72.
Börsch, A., 172, 368.
Boschi, P., 329.
Boscovich, R. G., 106, 107, 301.
Bosmans, H., 235, 250, 356—358, 370—372, 448.
Bossut, Ch., 151.
Bougainville, L. A., 119.
Bouley, H., 345.
Boullian, I., 45, 141, 147, 221, 387, 391.
Bouniakowskij, V., 329.
Bouquet, J. C., 329.
Bonquet de la Grye, J. J. A., 329.
Bour, J. E. E., 130.
Bourget, J., 329.
Boussinesq, J., 343.
Bonvelles, Ch., 301.
Boyer, J., 328, 331, 337, 370.
Bradley, J., 205, 293.
Brahe, T., 141, 145, 157, 172, 199, 372, 386, 387, 391.
Braschmann, N., 128.
Brassinne, E., 330.
Braunmühl, A. von, 86, 97, 103, 152, 153, 170, 171, 370—372, 444.
Brechtel, St., 146.
Brendel, M., 172.
Bresse, J. A. C., 330.
Brewster, D., 250, 291.
Brialmont, A., 338.
Brianchon, C., J., 280, 289, 292, 295.
Briggs, H., 86. 88, 226, 227, 360, 443.
Brill, A., 307, 346, 349.
Brillouin, M., 174, 448, 450.
Bring, E. S., 292, 307, 309.
Brinkmann, A., 379.
Brioschi, F., 135, 173, 307, 329—332, 335, 344, 393—395, 397, 400, 412, 440.
Briot, Ch. A. A., 330.
Brisse, C. M., 330.
Brisson, B., 290.
Brocard, H., 240, 244, 250, 280, 294, 295, 297, 299, 301, 302, 318, 319, 370, 371.
Broch, O. J., 330.
Brockmann, F. J., 330.
Brooksmith, J., 330.
Brouncker, W., 311.
Brown, E. W., 171, 371.
Brudzewo, A. de, 370, 372.
Brüll, A., 67, 75.
Brunel, G., 173, 174, 330, 336, 450.
Brunet, C., 444.
Bruno, G., 330.
Bryan, G. H. 328, 448, 450.
Bucca, F., 173, 331.
Bücheler, F., 381, 382.
Buchheim, A., 331.
Budan, F., 292, 319.
Budde, E., 327.
Buka, F., 331.
Bungus, P., 149.
Burali-Forti, C., 176.
Burattini, T. L., 141.
Burchardus, J., 151.
Burckhardt, J., 61.
Burg, A. von, 331.
Bürgi, J., 86, 226.
Bürja, A., 322.
Burkhardt, H., 89, 111, 120, 448, 449.
Bürmann, J. H., 268, 311.
Burmester, L., 236—238, 243—245, 247, 250, 297.
Burnside, W., 250, 338.
Busche, 393.
Buteo, J., 213—219, 449.
Büttner, Fr., 175.

Cagnoli, A., 292.
Cailler, C., 343.
Cajori, F., 453.
Callandreau, O., 335, 347.
Callegari, P., 242, 250.
Caminati, P., 453.
Campanus, J., 50, 56, 60, 300, 449.
Campbell, J. R., 331.
Cantor, G., 292, 344.
Cantor, M., 4, 5, 8, 15, 18, 19, 33, 38, 41, 77, 89, 97, 98, 104, 142—145, 147, 149—152, 154, 155, 158, 161, 170—172, 176, 180, 213, 218, 224, 225, 231, 234, 260, 263, 329, 334, 344, 351, 352, 354, 356, 357, 359, 370, 371, 441—443, 445—448, 450.
Capelli, A., 328, 330, 343, 347, 370, 374.
Capellini, G., 347.
Caporali, E., 331, 394.

Carbonnelle, I., 331.
Cardano, G., 97, 101, 146, 213, 215, 235, 250, 284, 293, 309.
Cardenas, A. R. de, 250.
Cardinaal, J., 170, 171.
Cardinal, von, 244, 250.
Carlheim-Gyllensköld, V., 335.
Carlini, L., 370, 372.
Carnot, L. N. M., 286, 292.
Carnot, S., 289, 292.
Carpenter, J., 391.
Carré, L., 443.
Carton, J., 418.
Caesar, 387.
Casey, J., 331, 428.
Casiri, M., 162.
Casorati, F., 331, 394, 395, 399, 400.
Caspary, F., 450, 451.
Cassini, J. D., 141, 142, 301, 302, 315, 342, 389, 391.
Castillon, J., 292.
Caswell, J., 108, 152, 158, 245, 250, 372.
Catalan, E., 148, 331, 342.
Cataldi, P. A., 146, 147.
Cauchy, A. L., 111, 112, 120, 172, 262, 285, 289, 290, 292, 293, 305, 307, 308, 311, 318, 319, 439.
Caussin de Perceval, A. P., 201, 206, 209.
Cavalieri, B., 148, 149.
Cavani, F., 342, 343.
Caverni, R., 173, 331.
Cayley, A., 236, 297, 301—307, 319, 331, 347, 376, 409, 410, 422, 429, 433.
Celoria, G., 328.
Ceretti, U., 448, 449.
Cerruti, V., 328, 329, 453.
Cesaro, E., 236, 238, 240, 241, 246, 248, 250, 436.
Ceulen, L. van, 224, 225, 305.
Ceva, G., 292.
Challis, J., 332.
Charlier, C. V. L., 452.
Chasles, M., 140, 147, 242, 244, 251, 288, 292, 296, 301, 303, 312, 319.
Chelini, D., 394, 402, 432, 434, 435, 440.
Chessin, A., 451.
Chisholm-Young, Grace, 344.
Chistoni, C., 370, 372.
Christian IV., 386.
Christoffel, E. B., 332, 373, 408, 409, 426, 450.
Chrystal, G., 339.
Chuquet, N., 148, 213, 214.
Cicero, 361, 385.
Clairaut, A. C., 111, 112, 246, 248, 251, 292, 308, 310.
Clapeyron, B. P. E., 292.
Clarke, S., 303.
Clausen, Th., 265.
Clausius, R. J. E., 289, 292, 299.
Clavius, Chr., 106, 359.
Clebsch, A., 135, 307, 407, 431, 440.
Clerval, 170, 171.
Clifford, W. K., 292, 304, 376, 419.
Cockle, J., 332.
Codazzi, D., 126, 293.
Coignet, M., 356, 372.
Cole, A. D., 451.
Cole, F. N., 170, 173.
Collignon, E., 247, 251.
Collingwood, S. D., 333.
Collins, Joh., 87, 98.
Columbus, Chr., 68, 69, 387.
Comtino, Mordechai, 63, 64, 70.
Confucius, 143.
Conti, A., 453.
Copeland, R., 327.
Copernicus, siehe Koppernicus.
Cordier, H., 143.
Coriolis, G. G., 292.
Cornu, A., 328, 347.
Corradi, A., 395.
Cossali, P., 144.
Cosserat, E., 346.
Cotes, R., 88, 91—94, 292, 301, 435, 442.
Cotterill, T., 251, 332.
Couturat, L., 170, 173.
Craig, J., 93.
Craig, Th., 332.
Cramer, G., 290.
Cranz, C., 248, 251, 328.
Crawford, 444.
Credaro, L., 333.
Crelle, A. L., 124, 280, 319, 322, 367.
Cremona, L., 170, 173, 312, 328, 330, 338, 345, 346, 393—395, 402, 414—416, 427, 428, 431, 435, 448, 450.
Crescas Natan ben Don Isak, 62, 64.

Crofton, M. W., 292.
Crönert, W., 8.
Cullis, C. E., 174.
Culmann, K., 303.
Cumont, Fr., 186.
Cunningham, A., 452.
Curran Sharp, siehe Sharp.
Curtius, A., 387.
Curtze, M., 9—11, 41, 48, 65, 141, 145, 146, 148, 160, 170—172, 251, 342, 354, 356, 358, 363—365, 370—372, 443, 448, 449.
Czuber, E., 170, 173, 339, 349.

Dahl, W., 251.
Damaskios, 11.
Damianos, 7.
Danckwortt, O., 205.
Dandelin, G. P., 292, 319.
Daniel ben Peracha, 71.
Darboux, G., 131, 134, 135, 247, 251, 303, 309, 328, 338, 345, 370, 374, 399—402, 405, 410—413, 424.
„Dardi", 60, 152.
Darwin, G. H., 452.
Daug, H. T., 332.
Dauge, F., 332.
David ben Joab Finzi, 68.
David, 339.
Davidoff, A., 332.
Debeaune, Fl., 149.
Dechales, M., 284.
Dedekind, R., 415.
Deinostratos, 300.
De la Gournerie, J. M., 332, 401.
Delambre, J. B., 88, 195—198, 203, 319.
De la Roche, E., 215, 272.
Delaunay, Ch. E., 302.
Delaunay, N., 170, 172, 243, 246, 251, 347.
Del Grosso, R., 426.
Della Nave, A., 354.
Del Pezzo, P., 341.
Desargues, G., 235, 247, 292, 319.
Descartes, Francine, 148.
Descartes, R., 77, 148, 149, 284, 286, 290, 292, 299, 301, 304, 318, 319, 372, 448, 449.
Des Coudres, Th., 451.
Devic, M., 163.
„Diachasimus", 11.
Dickson, L. E., 453.
Dickstein, S., 172, 327, 347, 348.
Diday, 393.
Diekmann, J., 335.
Diels, H., 381.
Dienger, J., 332.
Dienger, K., 332.
Dieu, T., 241, 247, 251.
Dini, U., 328, 370, 374, 411, 414.
Diofantos, 141, 293, 318, 357, 359, 362, 363.
Diokles, 300.
Dionisius (der heilige), 387.
Dirichlet, P. G. L., 165, 262, 276, 291—293, 308, 311, 318, 425.
Djabir, siehe Dschabir.
Dodgson, C. L., 333.
Dominicus (der heilige), 387.
Don Boniac Astruc Nasi, 64.
Donat, 163.
Donner, A., 334.
Doolittle, C. L., 448, 449.
Doppler, Chr., 290.
Doubiago, D. J., 334.
Drach, C. A., von, 431.
Drach, S. M., 235, 237, 251.
Drake, A. von, 247, 251.
Dreyer, J. L. E., 344.
Drobisch, M. W., 333.
Drohojowska (Frau), 342.
Dschabir ibn Aflah, 71, 292.
du Bois Reymond, E., 335.
du Bois Reymond, P., 333.
Duclaux, P. E., 328.
Duffield, J. Th., 375.
Duhamel, J. M. C., 291.
Duhem, P., 170, 171, 173, 330, 340.
Dumas, J. B., 346.
Duméril, A., 330.
Dunkin, E., 327.
Dupin, F. P. Ch., 292, 301, 304, 399, 402, 410.
Duporcq, E. Q., 240, 243, 251.
Dupuis, J., 292.
Duran Loriga, J. J., 370, 374, 448, 450.
Duraeus, S., 242, 251.
Dureau, 141.
Durège, H., 236, 237, 245, 251, 333.
Dürer, A., 167, 235, 251, 253, 300, 321.

Dyck, W., 344.
Dyson, F. W., 332.
Dziwinski, P., 350.

Eben ha-Eser, 65.
Eberenz, J. B., 251.
Eberhard, V., 452.
Ebert, W., 452.
Eckhardt, F. E., 240—244, 251, 429, 430.
Efraim Misrachi, 73.
Eger, J. C., 267.
Eggers, H., 240, 252.
Ehrentreu, H., 199.
Eichler, C., 237, 247, 252.
Eisenlohr, A., 178—181, 184.
Eisenstein, F. G. M., 292, 311.
Ekama, H., 237, 238, 241, 245, 248, 252.
el-Bardjendi, 163.
el-Bistani, 17.
el-Chazin, 11.
el-Fazari, 163.
el-Hassâr, 12, 13, 15—22, 24, 27, 28, 37, 39, 40, 61, 371.
„Eli“, 74.
Elia, 61.
Elia Alfadji ben David ha-Levi, 73.
Elia Baschiatschi, 62, 70, 71.
Elia ben Isak, 73, 75.
Elia Schubschi (Gibbor ben Jehuda), 72, 73.
Elisabeth (Prinzessin), 148.
Elliott, E. B., 341, 342, 347.
Ellis, A. J., 333.
el-Qalasadi, siehe Alkalasadi.
el-Qasrani, 163.
el-Sachawi, 13, 14.
Elvius, P., 235, 252.
Emanuel (König von Portugal), 68.
Emch, A., 174, 453.
Emsmann, A. H., 333.
Eneström, G., 1, 8, 47, 86, 89, 93, 94, 97, 142, 144, 150—153, 156, 169, 170, 171, 173, 174, 213, 326, 348, 351—357, 359—361, 363, 370—374, 441—444, 447—450, 453.
Engel, Fr., 170, 172, 338, 369, 370, 373, 450, 452.
Engler, E. A., 375.
Enneper, A., 248, 252, 304, 402.
Epping, J., 156, 158.
Epstein, Th., 289.
Eratosthenes, 185, 188, 189, 362, 387.
Ernst, M., 335.
Ersch, J. S., 67, 70, 258.
Escherich, G. von, 342, 346.
Espanet, G., 243, 252.
Ettingshausen, A. von, 241, 252.
Endemos, 161.
Eudoxos, 192, 300.
Eukleides, 8—11, 46, 49—53, 55, 56, 64, 71, 74, 76, 160, 161, 170, 171, 213, 219, 285, 287, 303, 305, 318, 320, 355, 362—366, 371, 387, 415, 418, 419, 422, 428, 448, 449.
Euler, L., 78, 102, 105, 111, 113, 115—119, 123, 124, 165, 236, 241, 244, 248, 252, 264, 265, 285, 286, 289, 290, 292, 293, 297, 301, 305, 308, 310, 311, 318, 319, 361, 368, 372, 376, 423, 441—444, 446, 447.
Entokios, 213, 377.
Eytelwein, P. A., 244, 252.

Faà di Bruno, F., 333.
Fabbri, E., 170, 172.
Fabri, R., 236, 252.
Fagnano, G. C., 245, 258, 276, 292.
Fambri, P., 328.
Fantasia, P., 448.
Farey, J., 311.
Faught, J. B., 174.
Faure, H., 239, 252.
Favaro, A., 141, 170, 171, 173, 220, 329, 331, 340, 348, 354, 370, 372, 448, 449, 453.
Favilla, A., 275.
Faye, H., 327, 329, 339, 345.
Fazzari, G., 448, 449.
Fechner, G. Th., 291.
Fehr, H., 373, 374.
Ferdinand I., 65, 147.
Ferdinand III., 386.
Fergola, E., 333, 348.
Fermat, P., 8, 143, 147—149, 277, 292, 301, 359, 373.
Ferrari, L., 235, 309.
Ferrers, N., 252.
Feuerbach, K. W., 292, 295, 297, 301, 302, 319, 430.

Fibonacci, siehe Pisano.
Fiedler, W., 288, 398, 433.
Filon von Byzanz, 377—380, 382, 383.
Filonides, 8.
Filoponos, Johannes, 190.
Fine, H. B., 337.
Fink, K., 170, 333, 370.
Finzi (Angelo), Mordechai, 59, 60, 75, 76, 152.
Finzi, vgl. David.
Fitz-Gerald, G. Fr., 373, 375, 450.
Flamant, A., 343.
Fleischmann, A., 333.
Floquet, G., 340.
Flügel, G., 207.
Folie, F., 336.
Foncenex, F. D. de, 292, 417.
Fontaine, A., 446.
Fontana, G., 436, 437.
Fontès, J., 353.
Forcadel, P., 353.
Forestier, Ch., 330.
Förster, W., 370, 371.
Forsyth, A. R., 332.
Fort, O., 269.
Fouret, G., 236, 237, 241, 243, 245, 247, 252.
Fourier, J. B. J., 266—268, 292, 311, 319, 438.
Franchis, M. de, 170, 173, 331.
Franciscus (der heilige), 387.
Franco von Lüttich, 146.
Françoise, E., 237, 239, 243, 252.
Franklin, F., 347.
Franz, I., 339.
Frattini, G., 328, 339, 394.
Frégier, 292, 296, 302.
Frénicle de Bessy, B., 359.
Fresnel, A. J., 304, 311.
Fricke, R., 172, 334, 368.
Friedlein, G., 8.
Friesendorff, Th., 96.
Frizzo, G., 448, 449.
Frobenius, G., 337.
Frost, P., 333.
Frullani, G., 120, 121, 293.
Fuchs, L., 308, 312, 330, 332, 335, 344, 448, 450.
Fuhrmann, W., 301.
Furnerius, J., 387.
Furtwängler, Ph., 453.
Fuſs, N., 237, 240, 242, 248, 252.
Fuſs, P. H., 151, 153, 411, 443, 447.
Fuxmagen, J., 444.

Galdeano, Z. G. de, 170, 173, 328, 331, 337, 339, 370, 374, 376.
Galenos, 7.
Galilei, G., 170—172, 220—222, 301, 305, 370, 372, 387, 389, 391, 418, 449.
Galli, I., 329.
Gallian, M., 141.
Galois, E., 290, 307—309, 312, 319.
Gambioli, D., 267, 370, 373, 452.
Gariel, Ch. M., 347.
Gascó, L. G., 333.
Gasparis, A. de, 333.
Gassendi, P., 385—387, 391.
Gauſs, C. F., 112, 123, 124, 132, 142, 165, 166, 170, 172, 262, 286, 288, 291—293, 297, 305, 306, 308, 309, 311, 318, 319, 366—370, 373, 397, 405, 408, 412, 418, 420, 422, 435, 448—450.
Gautsch von Frankenthurm, P., 168.
Gay-Lussac, L. J., 291, 319.
Gebbia, M., 327.
Geber, siehe Dschabir.
Geer, P. van, 252.
Geiger, A., 58.
Geiser, C. F., 332, 370, 373.
Geitler von Armingen, J., 451.
Geminos, 8—11, 160, 161, 188, 190, 362, 363, 371.
Genocchi, A., 333, 342, 414, 417—419.
Genoveva (die heilige), 390.
Gérard, L., 371.
Gerbert, 43.
Gergonne, J. D., 295.
Gerhardt, K. J., 149, 150, 155, 334.
Gerland, E., 170, 172.
Germanicus, 187—189.
Gerono, C., 302, 334.
Gherardo Cremonese, 9, 11, 46, 196, 363—365, 448, 449.
Gherardo di Sabionetta, 60, 61.
Gibbs, J. W., 341.
Gierster, J., 334.
Gigon, 245, 252.

Gilbert, Ph., 244, 252, 334, 342.
Gildemeister, S. H., 236, 238, 240, 242, 245, 253.
Gilman, D. C., 370, 374.
Girard, A., 358, 359.
Giudice, F., 453.
Glaisher, J. W. L., 235, 253, 327, 332, 345.
Glazebrook, R. T., 336.
Gmeiner, J. A., 375.
Gob, A., 244, 253.
Godefroy, A. N., 334, 373.
Godefroy, M., 448, 449.
Godin, L., 253.
Goldbach, Chr., 151, 153, 291, 292, 442, 447.
Goldberg, Adeline, 370, 371.
Goldberg, N., 74.
Goldhammer, D. A., 346.
Golius, J. 147.
Gompertz, B., 293.
Gordan, P., 292, 307, 311.
Görland, A., 170, 171.
Gosselin, G., 357.
Gottignies, G. F., 384.
Govi, G., 334.
Graf, J. H., 344, 349.
Graindorge, J., 277, 334.
Gram, J. P., 341.
Grandi, G., 237, 442.
Grane, N., 241, 246, 253.
Grässe, J. G. Th., 444.
Grafsmann, H., 287, 453.
Grafsmann, J. (?), 339.
Grafsmann, R., 322.
Grätz, H., 68, 69.
Gravelaar, N. L. W. A., 370, 372, 448, 449.
Graves, Ch., 292.
Graves, R. P., 442.
Grebe, E. W., 295, 319.
Green, G., 175, 289, 292, 293, 308, 425.
Greenhill, A. G., 452.
Gregory, J., 77—88, 372.
Gretschel, H., 334.
Grienberger, Chr., 388.
Griefs, J., 334.
Griffith, F. L., 177, 178.
Grinwis, C. H. C., 334.
Grofe, G. von, 334.
Gronau, J. F. W., 334.
Grofs, 65, 66.
Grofseteste, siehe Robertus Linconiensis.
Gruber, J. G., 67, 70, 258.
Grunert, J. A., 105, 135, 176, 398, 428.
Grusintzeff, A. P., 335.
Grufs, G., 345.
Guilelmus Anglicus, 171.
Guimarães, R., 168—170, 172, 370, 373.
Guldin, P., 319.
Gundormann, G., 370, 371.
Günther, P., 334.
Günther, S., 141, 160, 176, 253, 300, 348, 369—372, 379, 383.
Gunter, E., 449.
Günzburg, D., 64.
Gurland, J., 63, 64, 67, 71.
Guthe, K. E., 451.
Gutzmer, A., 170, 173, 333, 334, 345, 452.
Guyou, E., 247, 253.
Gyldén, H., 238, 334.

Haag, P., 451.
Habich, E., 246, 253.
Häbler, A., 58, 170, 171.
Hachette, J. N. P., 248, 253.
Hadamard, J., 176, 292, 319.
Hagen, J. G., 170, 172.
Hagi Khalfa, 162, 207, 208.
Hahn, J., 345.
Halberstam, S. J., 59.
Hall, F., 170, 172, 367.
Haller, S., 106.
Halley, E., 147, 245, 253, 293.
Hallström, M. F., 237, 253.
Halm, J., 452.
Halma, N. B., 5, 192, 195, 196, 206, 211.
Halphon, G. H., 329, 335, 338.
Halsted, G. B., 170, 172, 332, 338, 347, 370, 428, 448, 450, 453.
Hamilton, W. R., 287, 290, 291, 308, 310, 312, 319, 376, 442.
Hammer-Purgstall, J. von, 162.
Hankel, H., 287.
Hann, I., 349.
Hansen, P. A., 293.
Hardcastle, Frances, 448, 450.
Harnack, C. G. A., 335.
Harriot, Th., 290, 292.

Hartwig, E., 452.
Hathaway, A. S., 370, 374.
Haton de la Goupillière, J. N., 235, 240, 241, 243, 245, 247, 253.
Hatzidakis, N. J., 139, 370, 374.
Hauck, G., 331, 452.
Hauréau, B., 42.
Haussner, R., 168, 372.
Heath, T. L., 353.
Heen, P. de, 331.
Heger, R., 269, 278.
Heiberg, J. L., 5, 8—11, 141, 160, 170, 171, 206, 213, 341, 352, 353, 363, 364, 371, 444.
Heilermann, H., 335.
Heine, H. E., 311, 335, 437.
Heinrich, G., 77, 87, 370, 372.
Heinze, M., 333.
Heis, E., 191.
„Helias", 61.
Hellmann, G., 370, 371, 444.
Helm, G., 370, 374.
Helmert, F. R., 336.
Helmholtz, H. von, 116, 289, 290, 292, 326, 335, 417, 453.
Helmling, P., 375.
Hengel, J. van, 240, 253.
Henke, R., 275.
Hennequin, E., 338.
Hennig, R., 237, 245, 253.
Henoch, M., 335.
Henrici, O., 343, 347.
Hepperger, J. von, 451.
Herigone, P., 284.
Hermann, J., 94, 247, 253, 289.
Hermann, L., 335.
Hermite, Ch., 174, 272, 290—292, 302, 307—309, 311, 319, 329, 330, 332, 333, 335, 337, 343, 348, 374, 450.
„Heromides", 11.
Heron, 6, 7, 10, 11, 161, 171, 293, 302, 318, 363, 370, 371, 377, 378, 382, 383.
Hertz, H., 424.
„Herundes", 11.
Herz, N., 391.
Hesse, L. O., 262, 291, 299, 302, 304, 306, 310, 312, 318, 323, 429, 431.
Heulen, J. van, 253.
Heun, K., 175.
Heus, 46.
Hevelius, J., 384, 387, 389.
Hicks, W. M., 242, 253.
Hiern, W. P., 240, 253.
Hilbert, D., 348, 418, 452, 453.
Himstedt, Fr., 237.
Hindenburg, C. F., 286, 361.
Hipparchos, 156—158, 185—197, 203, 206, 207, 209—211, 284, 387, 449.
Hippokrates von Chios, 153, 300, 318.
Hippokrates von Kos, 61.
Hirst, T. A., 335.
Hobbes, Th., 359, 449.
Hoffmann, J. C. V., 327, 345, 448, 449.
Hoffmann, O., 248, 254.
Holditch, H., 241, 254.
Holmgren, Hj., 335.
Holst, E., 236—239, 254, 338.
Holtzmann, siehe Xylander.
Holzmüller, G., 170, 236, 254, 289.
Hommel, J., 145.
l'Hôpital, H. F. de, 150, 151, 245, 250, 254, 293.
Hopkinson, J., 336.
Hoppe E., 370, 372.
Hoppe, R., 135, 173, 176, 336, 374, 453.
Hoppe, R. H., 374.
Horner, W. G., 290.
Hornstein, K., 336.
Horrebow, P., 95.
Horsley, S., 89.
Horta, Fr. da Ponte, 336.
Hoüel, G. J., 336, 414, 418.
Houzeau, J. C., 69, 336, 384.
Huber, G., 239, 254.
Hudde, J., 290.
Hudson, R. W. H. T., 452.
Hugo, 43, 44, 371.
Hugo de Saint-Victor, 41—44.
Hugo physicus, 41—44, 352.
Hugo Sanctelliensis, 41.
Hultsch, Fr., 5, 6, 10, 11, 177, 195, 370, 371, 448, 449.
Humbert, G., 239, 242, 245, 254.
Humboldt, A. von, 220, 221.
Hurwitz, A., 433.
Hüser, A., 336.
Hutchinson, J. I., 453.
Hutton, Ch., 290, 360.

Huygens, Chr., 77, 78, 81, 82, 84, 85, 150, 221, 224, 225, 227, 228, 245, 290, 291, 293, 370, 372, 387, 449.
Hyde, E. W., 254.
Hyginus, 189.
Hypatia, 387.
Hypsikles, 320.

Ibn abi Oseïbia, 162.
ibn Albanna, 12, 15, 16, 18, 21, 27, 28, 34, 39, 40.
ibn Chaldun, 12, 39.
ibn en-Nedîm, 162.
ibn Haitam, 200, 293.
ibn Khalikan, 162.
ibn Ridjal, 72, 199, 200.
Ide, H., 336.
Ideler, Ch. L., 159, 190.
Ignatius (der heilige), 387.
Immanuel ben Jakob, 64, 66, 71, 73.
Imschenetzkij, W., 336.
Initius Algebras, 146, 358.
Innocentius X., 386.
Isabella (Infantin von Spanien), 389.
Isak, 65.
Isak Abravanel, 67.
Isak abul-Kheir ben Samuel, 72.
Isak Arama, 73.
Isak ben Elia Kohen, 71, 72, 74.
Isak ben Elia ben Ahron Kohen, 74.
Isak ben Meir ben Isak Dieulosal, 67, 75.
Isak ben Moses, 74.
Isak ben Sid, 59.
Isak Loanz ben Jechiel, 72.
Isak Papano (Pipino), 72.
Isnoskoff, J. A., 336.
Ivory, J., 292, 319.

Jacobi, C. G. J., 165, 262, 290, 292, 296, 302—304, 306—309, 318, 319, 323, 424.
Jacobus (der heilige), 387.
Jacobus Cremonensis, 352.
Jahnke, E., 176, 370, 374, 418, 450, 452, 453.
Jakob ben Ascher, 62.
Jakob ben Immanuel, 72.
Jakob ben Machir, 60, 64.
Jakob ben Soliman, 47.
Jakob Leon de Cavaillon, 66.
Jakob Levi, 63.
Jakob Poël, 60.
James, C. S., 451.
Janet, P., 451.
Janisch, E., 174, 243, 245, 254.
Janni, V., 336.
Janssen, J., 347.
Jaumann, G., 451.
Jeans (nicht Heans), J. G., 143.
Jeaurat, E. S., 391.
Jeffery, H. M., 240, 248, 254, 336.
Jehuda ben Elasar, 62.
Jehuda ben Jechiel, 67.
Jehuda ben Mose Kohen, 72, 198—200.
Jehuda ben Samuel Schalom (Astruc), 61.
Jehuda Farissol, 75.
Jehuda Verga, 62, 67.
Jellett, J. H., 336.
Jerabek, V., 242, 254, 295, 297, 302.
Jeremias Kohen, 69.
Jerrard, G. B., 272, 290, 292, 307, 309.
Jezdegird, 64.
Joachimsthal, F., 292, 301, 304.
João II., 69, 72.
Job filius Salomonis, 45, 47.
Jochanan Alemanno, 67.
Johannes Danck de Saxonia, 62.
Johannes de Lineriis, 171.
Johannes de Muris, 171.
Johannes de Sanct Archangel, 62.
Johannes Hispalensis, 21.
Johnson, W. E., 176.
Jones, H. C., 373.
Jones, J. V., 450, 451.
Jones, W., 88, 90, 99.
Jonquières, E. de, 312, 375.
Jordan, C., 135, 335, 343, 345, 370, 374, 448, 450.
Jordan, W., 336.
Jordanus Nemorarius, 60, 171, 300, 351, 354.
Jorini, A. F., 248, 254.
Josef ben Schemtoh ben Jeschua, 71.
Josef ben Zedaka, 58.
Josef Rachizi, 63.
Josef Taitazak, 74.
Josef Vicinius (de Voisin), 69.
Joubert, Ch., 448, 450.
Joule, J. P., 289, 291.

Judaeis, C. de, 360.
Juel, C., 240, 244, 254.

Kahl, E., 263.
Kaleb Afendopolo ben Elia, 62, 64, 70.
Kallippos, 387.
Kalonymos, D., 65, 66.
Kapteyn, J. C., 222.
Kapteyn, W., 170, 448.
Karl I. (König von England), 386.
Karl (Herzog von Lothringen), 386.
Kasankin, N. P., 345.
Kasselblatt, A., 123.
Kästner, A. G., 357.
Katharina (die heilige), 390, 391.
Kauffmann, E. F., 244, 248, 254.
Kayserling, M., 68, 69, 72.
Kelvin, W., 347, 402, 440.
Kempe, A. B., 349.
Kenyon, F. G., 177.
Keppler, J., 141, 167, 275, 291, 293, 302, 310, 319, 321, 387.
Kerbetz, Eugenie de, 337.
Kessler, O., 246, 254.
Keyser, C. J., 453.
Kiepert, L., 238, 241, 242, 244, 246, 254, 302.
Kies, J., 254.
Kikuchi, D., 170, 172.
Killing, W., 348.
Kircher, A., 387.
Kirkman, Th. P., 292, 293, 295, 337.
Kleiber, J., 337.
Klein, B., 337.
Klein, F., 135, 287, 308, 312, 343, 344, 366, 370, 373, 374, 405, 410, 417, 423, 448, 449, 452.
Klemenčič, I., 451.
Kleomedes, 7, 362, 387.
Klimpert, R., 448.
Klug, J., 170, 171.
Klug, L., 174.
Klügel, G. S., 224, 282, 321, 361.
Kluyver, J. C., 170, 329, 448.
Knauff, F., 170, 171, 370, 371.
Kneser, A., 122, 124, 170, 172, 174, 334, 453.
Knoblauch, E., 125.
Kobell, F. von, 335.
Köchly, H., 378—380, 383.
Koërsma, J., 443.
Koehler, C., 344.
Koehler, J., 337.
Kohn, G., 349.
Koláček, F., 345.
Kommerell, V., 402.
Koenigs, G., 289.
Konon, 300.
Konstantin der Grofse, 363.
Koppe, M., 86, 224, 226, 227, 360, 443, 448, 449.
Koppernicus, N., 141, 198, 235, 251, 257, 372, 387.
Korteweg, D. J., 170, 329, 370, 373, 448.
Kosta ben Luka, 69.
Kötter, E., 448, 449.
Kovalevski, Sonja, 337.
Kowalewski, G., 451.
Kramer, 236.
Krates, 362.
Kraus, L., 337.
Krause, M., 340, 370, 374.
Krimmel, O., 340.
Kroll, G., 371.
Kronecker, L., 135, 311, 333, 337, 426.
Krüger, L., 172, 368.
Krüger, S., 372.
Ktesibios, 377, 379, 382, 383.
Kucharzewski, F., 171, 371.
Kugler, F. X., 156, 157, 369—371.
Kühn, C. G., 7.
Kuhn, H. W., 375.
Kummer, E. E., 262, 303, 304, 310, 319, 337.
Künssberg, H., 341.
Kunze, L., 337.
Kupffer, K., 453.
Kürschák, J., 170, 171.
Kuschjar ben Labban al Djili, 61.
Kutta, W., 230, 448, 449.

Laboulaye, E., 339.
Ladislaus IV., 386, 391.
Lagout, E., 338.
Lagrange, J. L., 95, 96, 111—113, 117—119, 124, 165, 172, 285, 290—293, 307, 310, 311, 318, 368, 372, 410, 422.
Laguerre, E., 288, 289, 312, 338.

La Hire, Ph., 235, 236, 240, 241, 245, 247, 251, 253, 255, 318.
Lais, G., 343.
Laisant, C. A., 245, 254, 305, 320, 324, 334.
Lalande, A., 141.
Lalande, J. de, 390.
Lalanne, L., 338.
La Loubère, A., 142.
Lamb, H., 342, 347.
Lambert, J. H., 77, 119, 273, 279, 288, 291, 292, 310, 311, 368, 372.
Lamé, G., 289, 291, 302—305, 308, 310, 311, 318, 399, 407, 410.
Lampe, E., 170, 173, 176, 327, 328, 332, 335—338, 347—349, 370, 373, 374, 448, 450.
Lancret, M. A., 292.
Landen, J., 309.
Landshuth, S. L., 63.
Lang, A., 340.
Lange, J., 370, 373.
Langrenus (van Langeren), M. F., 384—391.
Lansberg, Ph., 387, 391.
Laplace, P. S., 111, 165, 288—290, 292, 293, 308, 310, 311, 318, 437, 439.
Laurent, P. A., 292, 311.
Laussedat, A., 170, 171, 370, 371.
Léauté, K. E. V. J., 247, 254.
Lebon, E., 172, 370, 371.
Lechalas, G., 176.
Leclerc, L., 200, 202, 365.
Lecornu, L., 242, 247, 254.
Lécrivain, 347.
Leeuwen, J. H., 246, 255.
Leffler, Anna Charlotta, 337.
Lefort, F., 87, 98.
Legendre, A. M., 77, 172, 265, 281, 286, 288, 291, 292, 308, 310, 311, 318, 322, 368, 419.
Legnazzi, E. N., 334.
Lehmann, J. G., 292.
Leibniz, G. W., 87, 98, 111, 149, 150, 155, 172, 234, 235, 255, 285—287, 311, 357, 366, 376.
Lemaitre, J., 328.
Lemoine, E., 289, 295, 297, 301, 302, 319, 436.
Leneveu, 247, 255.
Lenthéric, J., 245, 255.
Leon („Messer"), 67.
Leonardi (Abbot), 293.
Leonelli, G. Z., 319, 367, 368.
Leopold (Prinz), 147.
Leotaud, V., 359.
Lepaige, C. M. M. J., 255.
Lerch, M., 175.
Lessing, G. E., 366.
Letnikoff, A., 338.
Leverrier, U. J. J., 205, 342.
Levi ben Gerson, 66, 67, 74, 75, 145, 171, 371.
Lévy, L., 329, 337.
Lévy, M., 131, 170, 173, 328, 342, 343, 370, 373.
Lewicky, Wl., 370, 374.
Lexell, A. J., 248, 255, 292.
Lhuilier, S., 292.
Liagre, J., 336, 338.
Liapunoff, A. M., 347.
Libri, G., 45, 354.
Lie, S., 131, 172, 173, 290, 292, 311, 338, 373, 440.
Lieber, H., 339.
Liebmann, H., 124.
Ligowski, W., 339.
Lilienthal, R. von, 452.
Lindemann, F., 344.
Lindman, K. F., 174.
Lionnet, F. J., 339.
Liouville, J., 135, 290, 292, 304, 339, 410.
Lipschitz, R., 111, 115, 125.
Lissajous, J. A., 237, 302.
Listing, J. B., 287.
Littrow, J. J. von, 246, 255, 288, 390, 391.
Lobatschefskij, N. I., 287, 369, 414—419, 421, 422.
Lobatto, R., 428.
Loewy, M., 329, 347, 385.
Löfmark, J. M., 255.
Lommel, E. von, 339.
London, F., 452.
Longchamps, G. de, 297, 301, 302, 329—331, 342.
Longomontanus, Chr., 387.
Loomis, E., 339.
Lorenz, F., 370, 374.
Lorenz, J. F., 286.
Loria, G., 120, 142, 150, 170, 171, 328,

330, 331, 338, 345, 370, 371, 374, 392, 448, 450, 453.
Loucheur, L., 243, 255.
Love, J. G., 451.
Lovett, E. O., 170, 173.
Löw, E., 341.
Lucas, E., 301, 302, 339, 358.
Ludovicus (der heilige), 387.
Ludwig XIV., 386, 391.
Lugli, A., 339.
Lühmann, F. von, 339.
Luther, E., 339.
Lymnaeus, G., 146.

Maas, E., 185, 186, 189, 194.
Macaulay, F. S., 343.
Mac Cay, W., 301.
Mac Coll, H., 176.
Macdonald, Ch., 375.
Macfarlane, A., 176, 376, 453.
Mac Gregor, J. G., 451.
Mach, E., 448.
Machovec, Fr. 339.
Maclaurin, C., 255, 268, 292, 293, 301, 303, 311, 319, 446.
Maclay, J., 375.
Mac Mahon, P. A., 346, 347, 452.
Maggi, G. A., 419, 424.
Magini, G., 387.
Magistrini, G., 288.
Magnus, 213.
Magnus, L. I., 240.
Magold, M., 255.
Maier, F. C., 93, 104, 110.
Maimonides, 59, 64, 71.
Mainardi, G., 126.
Majer, L., 160.
Makeham, W. M., 293.
Malfatti, G., 172, 307.
Malinin, A., 339.
Mallock, A., 245, 255.
Malmsten, K. J., 311, 339.
Maltbie, W. H., 170, 173.
Malus, E. L., 304, 399.
Mancini, C., 333.
Mandart, H., 302.
Manfredi, G., 150, 151, 154.
Mangelsohn, Maria, 122.
Manilius, M., 190.
Manitius, K., 190.
Mannheim, A., 235, 236, 240, 241, 243, 245, 248, 255.
Mansion, P., 86, 241, 255, 329, 331, 334, 339, 345, 347, 362, 370, 372, 374, 448, 450.
Marco Lipomanno, 71.
Marcus (der heilige), 386, 387, 391.
Marcuse, A., 452.
Margoliouth, G., 75, 76.
Maria (die heilige), 387, 391.
Maria (römische Kaiserin), 386.
Maria (Prinzessin von Mantua), 386.
Marie, M., 339.
Mariotte, E., 291, 319.
Marius, siehe Mayr.
Markoff, A. A., 96.
Marre, A., 14, 15, 148, 339, 370, 373.
Marsiliensis, siehe Guilelmus Anglicus.
Marten, F., 238, 255.
Martin, Th. H., 147, 160.
Martins da Silva, J. A., 339.
Martinus de Zorawica (de Premislia), 353.
Maschallah, 67.
Mascheroni, L., 289, 448, 449.
Maschke, H., 307.
Masdea, A., 255.
Maslama el-Madjriti, 76, 163.
Masoni, U., 343.
Matheson, P. E., 347.
Mathieu, E. L., 340.
Mauduit, A. R., 105, 106.
Maupertuis, P. L. M., 255.
Maurer, L., 332, 370, 373.
Maximowitsch, Wl., 340.
Maxwell, Cl., 290, 291, 293.
Mayer, K., 244, 255.
Mayer, R., 289, 292.
Mayr [= Marius], S., 220—223, 449.
Mazarin, J., 386.
Meder, J., 170, 173.
Medici, Leopoldo de', 221.
Mehler, G. F., 340.
Mehmke, R., 176, 263, 448, 449.
Meir ben Isak, 65.
Meir Spira, 75.
Meister, A. L. F., 382.
Melde, Fr., 451.
Menachem (Tamar), 63, 64.
Menaichmos, 321.

Mendenhall, T. C., 335.
Menelaos, 195—199, 201—211, 292, 364, 365, 449.
Mennesson, 241, 255.
Mensinger, J. A. M., 58.
Mercator, G., 258.
Mercator, N., 284, 311, 443.
Merecki, R., 372.
Merkelbach, W., 246, 255.
Merrifield, Ch. W., 340.
Merrill, Helen, 375.
Mersenne, M., 147, 149.
Messedaglia, A., 330.
Messerschmidt, 349.
Metius, A., 146.
Meton, 318, 387.
Metrodoros, 363.
Meurice, L., 253.
Meusnier, J. B. M. Ch., 292.
Meyer, A., 340.
Meyer, E., 449.
Meyer, Friedrich, 340.
Meyer, J., 222.
Meyer, W. Fr., 89, 176, 342, 452.
Michael (der heilige), 387.
Milhaud, G., 170, 171, 176, 370, 371.
Millaeus [= Menelaos], 196—198, 364.
Miller, G. A., 170, 172, 173, 175, 375, 452.
Miller, W. J. C., 255.
Millosevich, E., 339.
Milone, Fr., 343.
Minding, F., 123, 124, 130, 172, 292, 403, 404, 408.
Minich, S. R., 340.
Minnigerode, B., 340.
Miquel, A., 292, 301.
Mister, J. N., 340.
Mitchell, O. H., 340.
Mittag-Leffler, G., 292, 330, 332, 335, 337, 339, 348, 448, 450, 452.
Mlodzjcjowskij, B. K., 122, 131.
Möbius, A. F., 165, 286, 287, 304, 312, 435.
Moigno, Fr. N. M., 340.
Moivre, A. de, 97—102, 288, 293, 372, 435.
Molenbroek, P., 255.
Mollweide, K. B., 103—105, 293, 319.
Monge, G., 164—166, 168, 286, 290, 293, 301, 303, 310, 410, 442.
Monro, C. J., 340.
Monteser, F., 375.
Montessus, M. R. de, 237, 255.
Montferrat, Wilhelm von, 197.
Montferrier, A. de, 282.
Montmort, P. R. de, 150.
Montucla, J. E., 62, 77, 230.
Mordechai, 64, 65.
Mordechai Comtino ben Elieser, siehe Comtino.
Mordechai Finzi, siehe Finzi.
Mordechai Todros Natan, 64, 65.
Morene, H. C., 451.
Morera, G., 174.
Moret, Th., 387.
Moret-Blanc, A., 241, 255, 340.
Morgan, A. de, 376.
Morley, F., 237—239, 242, 244, 247, 256.
Mose Kohen, 199.
Moses, 72.
Moses ben Abraham, 62, 66.
Moses ben Jakob, 70.
Moses ben Salomo Waschfun, 69.
Moses ben Tibbon, 12, 39, 40.
Moses Botarel, 66.
Moses Chandali, 72.
Moses Farissol Botarel, 66.
Moses Narboni, 59.
Moses Provinciale, 59.
Moses Sahlun ben Abraham, 73.
Mossotti, O. F., 394.
Motot, S., 59.
Mourlon, M., 331.
Moutard, Th. Fl., 374, 375.
Mouton, G., 88.
Muhammed ben Musa, siehe Alkhwarizmi.
Muir, Th., 370, 373.
Müller, Ad., 370, 372.
Müller, E., 452.
Müller, Felix, 170, 173, 282, 300, 321, 334, 341, 344, 357, 359, 370, 374, 448, 450.
Muratori, L. A., 61.
Murr, C., 196.

Nabonassar, 199, 201, 202.
Nachschon, 61.
Nadim, siehe ibn en-Nedim.
Nagel, Chr. H. von, 295, 340.
Nagy, A., 450.
Nahlik, J., von, 331.

Nallino, C. A., 204.
Napier, J. R., 247, 256.
Napoléon I., 166.
Narducci, E., 152, 201, 340, 341.
Nash, A. M., 341.
Nasir Eddin Attusi, 235, 256.
Nasmyth, J., 391.
Natani, L., 240—242, 247, 256.
Néama, I., 147.
Nebel, B., 171.
Nebukadnezar, 199, 204.
Neil, W., 232, 301.
Neirizi, 9, 11, 160, 170, 171, 363—366, 448, 449.
Neison, E., 391.
Nekrasoff, P. A., 332, 336, 337.
Nemorarius, siehe Jordanus.
Neper, J., 105, 226, 284, 372, 387.
Netchajeff, N., 345, 448, 450.
Netto, E., 89, 178.
Neubauer, A., 58, 59, 61, 62, 64—76, 197, 198.
Neuberg, J., 240, 256, 301, 339.
Neumann, C., 431.
Neumann, Fr., 262, 291, 292, 341, 373, 438.
Newton, H. A., 339, 341.
Newton, I., 77, 86—95, 97, 103, 149, 153, 155, 224, 227, 234, 245, 247, 255, 256, 284, 290—293, 297, 318, 360, 367, 376.
Nicole, F., 245, 247, 256, 445.
Niesten, L., 384, 385, 390.
Nikomachos, 64, 70, 320, 362, 363.
Nikomedes, 300.
Nirizi, siehe Neirizi.
Nix, L., 175, 370, 371.
Nöggerath, E. J., 428.
Nokk, A., 5.
Nöther, M., 292, 330, 332, 335, 338, 347, 370, 373, 395.
Novarese, E., 337, 341.
Noviomagus, J., 449.

Obadja di Bertinoro Jare, 74.
Obenrauch, F. J., 164, 168, 370, 372.
d'Ocagne, M., 289, 348.
Ofterdinger, L., 341.
Ohm, G. S., 291.
Ohrtmann, K., 341.
Ökinghaus, E., 247, 256.
Olbers, H. W. M., 142, 373.
Oldenburg, H., 87, 155.
Olivier, T., 248, 256.
Olivieri, A., 185.
Onnen, H., 236—238, 241, 256, 267.
Oppel, Fr. W., 104, 108—110.
Oppermann, L. H. F., 341.
Oresme, N., 171.
Ortu-Carboni, S., 453.
d'Orvieto, Fr., 59.
Oseibia, siehe ibn abi Oseibia.
Osgood, W. F., 111.
Osiander, A., 222.
Oettingen, A. von, 376.
Otto, G., 123.
Oudemans, J. A. C., 222.
Overbeck, A., 341.
d'Ovidio, E., 328, 331, 333, 334, 348, 421.
Ovidius, 191.
Ozanam, J., 88, 295, 320, 360.

Paciuolo, L., 215, 217, 301, 392.
Padelletti, D., 331, 341.
Padoa, A., 176, 453.
Padova, E., 329, 341, 426, 436, 440.
Padula, F., 341.
Painlevé, P., 370, 374.
Painvin, L. F., 256.
Paladini, E., 348.
Palomeque, 364.
Pánek, A., 345, 349.
Pankiewicz, J., 341.
Pantanelli, D., 343.
Panzer, G. W., 444.
Paolis, R. de, 292, 342, 394.
Papperitz, E., 334, 448, 449.
Pappos, 5, 6, 161, 292, 300, 302, 318, 319.
Parent, A., 303.
Paris, G., 328.
Pascal, Bl., 232, 235, 245, 249, 255, 280, 292, 298, 301, 319.
Pascal, E., 328—331, 370, 373, 374.
Peacock, G., 376.
Peano, G., 176, 334, 341, 354, 442, 453.
Pearson, Ch. H., 345.
Peaucellier, A., 292.
Peebles, D. B., 343.
Peirce, C. S., 448, 449.
Pell, J., 293, 309, 360, 361, 449.

Pellet, A. E. C., 241, 256.
Pellis, E., 256.
Pena, J., 142.
Pennachietti, G., 350.
Pepe, 343.
Perigal, H., 235, 257, 342.
Perro, P., 288.
Perrot, G., 328.
Perseus, 300.
Pertsch, W., 12, 13.
Pesch, J. G. van, 160, 161, 170, 171, 370, 371.
Peterson, K., 122—132, 342, 373.
Peterson, M., 122.
Petreius, J., 145.
Petrus (der heilige), 387.
Petrus Hispanus, 61.
Petzval, J., 342.
Peurbach, G. von, 60, 73, 145, 198.
Peverone, F., 372.
Pfaff, J. F., 290, 293, 306, 310, 319, 361.
Philipp IV., 386, 389, 390.
Philipps, A. W., 341.
Philipps, E., 330, 343.
Philo . . ., siehe Filo . . .
Picard, E., 170, 172, 310, 335, 347, 348, 370, 372, 374.
Piccolomini, O., 386, 387, 390.
Pick, G., 329, 370, 373.
Pico de la Mirandola, J., 67.
Pieri, M., 176.
Pietzker, F., 370, 374.
Pincherle, S., 328, 348, 432.
Pinto, L., 328, 329, 341.
Piorek, J., 236, 256.
Pirondini, G., 241, 248, 256.
Pisano, L., 144, 152, 215, 293, 351, 352, 441.
Pitiscus, B., 284, 361.
Pittarelli, G., 392, 453.
Pizzetti, P., 174.
Plana, G. A. A., 373.
Plarr, G., 342.
Plateau, J. A. F., 293.
Platon, 7, 8, 161, 171, 284, 300, 305, 318, 361, 371, 386.
Platone Tiburtino, 171, 204, 352.
Plauzolles, S. de, 141.
Plettner, Fr., 244, 256.
Plinius der Ältere, 194, 362, 385.
Plinius der Jüngere, 362.
Plotinos, 161.
Plücker, J., 165, 238, 257, 286, 288, 293, 299, 303—305, 318.
Plutarchos, 9, 385.
Pochhammer, L., 349.
Pococke, R., 162.
Poël, siehe Jakob Poël.
Poggendorff, J. C., 122, 146, 326, 327, 376.
Pohlke, K., 292.
Poincaré, H., 176, 335, 338, 347, 348.
Poincaré, L., 335.
Poinsot, L., 290, 302.
Poisson, S. D., 111, 120, 292, 319, 439.
Pokrowskij, P. M., 332, 346, 348, 349, 375.
Polak, G. L., 74.
Pollack, J. Fr., 288.
Polybios, 7, 8, 362.
Poncelet, J. V., 286, 292, 293, 319, 427, 432.
Porfyrios, 161.
Porjetzkij, P. C., 176, 336.
Porro, F., 328, 370, 373, 375.
Poseidonios, 7, 10, 11, 161, 190, 362, 387.
Poske, F., 335, 344.
Pothenot, L., 274, 293.
Prediger, J. C., 342.
Price, B., 342.
Pringsheim, A., 150, 170, 172, 368.
Proctor, R. A., 236, 241, 243, 245—247, 256.
Proklos, 8—10, 160, 161, 171, 371.
Pröll, R., 289.
Prou, V., 380.
Prouhet, E., 428.
Prowe, L. Fr., 198, 342.
Prümm, E., 26.
Prym, F., 308.
Ptolemaios, 5, 53, 67, 71, 75, 76, 156, 161, 171, 185, 188, 190—211, 235, 292, 353, 362, 387, 449.
Puchewicz, Wl., 342.
Puiseux, V. A., 241, 247, 256, 290, 292, 342.
Purkiss, H., 237, 256.
Purser, F., 246, 257.
Pythagoras, 292, 305, 318, 362, 387.
Pytheas, 387.

Quatremère, E. M., 164.
Quetelet, L. A. J., 292, 319.
Quintilianus, 5.

Raabe, J. L., 246, 257, 258.
Rabbi Jehuda (Juda), 198—200.
Rahn, siehe Rhonius.
Ramaswami Aiyar, 247, 257.
Rambaud, A., 347.
Ramus, P., 361.
Raukine, W. J. M., 245, 257.
Rauyard, A. C., 342.
Ravius, Chr., 147, 148.
Razzaboni, C., 342.
Realis, S., 342.
Rebière, A. M., 342.
Recorde, R., 152, 372.
Regiomontanus, J., 66, 67, 69, 70, 145, 196, 353—356, 358, 387.
Rehm, A., 185, 187, 189—191, 194.
Reid, A. W., 174.
Reidt, F., 278.
Reimarus Ursus, N., 141.
Reina, V., 392.
Reincke, E. F. J. A., 236, 238, 240, 243, 257.
Reinemund, F., 237, 257.
Reinhold, E., 198.
Renau, E., 345.
Resal, H. A., 244, 248, 257, 342.
Reuleaux, F., 235, 244, 248, 257, 289.
Reusch, E., 257, 343.
Reuschle, C. G., 428.
Reuter, H., 355, 448.
Revillout, E., 177—180, 183, 184.
Reye, Th., 289, 346.
Reyher, S., 147.
Reyneau, Ch. R., 150.
Rheita, A. M., S. de, 387.
Rheticus, G. J., 235, 257.
Rhonius, J. H., 148.
Ribaucour, A., 257, 343.
Riccardi, P., 59, 60, 76, 343, 346, 443.
Riccati, J., 154, 240, 310.
Ricci, G., 341.
Ricci, M., 143, 387.
Riccioli, G. B., 141, 197—199, 389—391.
Rice, J. M., 375.
Richelot, F., 262, 373.
Ricius (Ritius), A., 196—200.
Ridolfi, L., 257.
Rieger, P., 72.
Riehm, G., 340.
Riemann, B., 112, 118, 239, 287, 292, 304, 308, 311, 319, 369, 405, 412, 414—416, 419—422.
Ritter, E., 343.
Rittershaus, T., 236, 244, 246, 257.
Rivals, 301.
Roberts, R. A., 257.
Roberts, S. O., 238, 257, 332, 343.
Roberts, W., 312.
Robertus Linconiensis (Grosseteste), 443, 444.
Roberval, G. P., 147, 252, 301.
Roch, G., 292, 319.
Rochas, A. de, 142.
Roche, E., 272.
Roeder, Chr., 355, 356.
Rodrigues, O., 292.
Rohn, K., 335.
Roiti, A., 436.
Rolle, M., 290, 292, 302.
Römer, O., 95, 235.
Roomen, A. van, 361.
Root, O., 257.
Rosen, Fr., 32.
Rosenberger, F., 2, 170, 171, 343.
Rosenhain, G., 308, 313.
Rossi, J. B. de, 58—60, 72.
Rossi, M. S. de, 327, 329.
Rossi, V. de, 343.
Rouché, E., 334, 338.
Rouquet, V., 241, 257.
Rowe, R. Ch., 343.
Rowland, H. A., 374, 375, 450.
Rubini, R., 341, 343.
Rücker, A. W., 335.
Rudio, F., 77, 224, 225, 346, 362, 442.
Rudolf von Brügge, 76.
Rudolff, Chr., 321.
Ruffini, F., 330.
Rulf, W., 257.
Runge, C., 125, 176, 263, 336.
Ruofs, H., 242, 257.
Russell, B. A. W., 176.
Rüstow, W., 379.

Saadia ben David al-Adeni, 69.
Saavedra, 141.
Sabbatai ben Obadja, 69.
Saccheri, G., 419.
Sacchi, G., 240, 257.

Sacerdote, G., 59.
Sacheri, G., 343.
Sacy, A. J. S. de, 164.
Safford, H. T., 451.
Said Abuothman, 46.
Saint-Venant, A. J. Cl. B. de, 292, 293, 343.
Saladini, G., 244, 292.
Salhani (Salihani), 162.
Salmon, G., 295, 302, 398, 433.
Salomo, siehe Schalom.
Salomo ben Elia Scharbit ha-Sahab, 64.
Salomo Cavaliero, 73.
Salomo Davin, 73.
Samuel ben Jehuda, 71.
Samuel ibn Sason, 74.
Samuel Sakut, 68.
Sang, E., 238, 257, 343.
Sannia, A., 343.
Saraval, 69.
Saussure, R. de, 236, 237, 239, 240, 248, 257.
Savart, F., 291.
Savary, 257.
Savasorda, siehe Abraham bar Chijja.
Sayce, A. H., 156.
Schalom (Salomo) ben Josef Anabi, 61.
Schalom ben Salomo, 69, 70.
Schalom, siehe Jehuda ben Samuel.
Schapira, H., 343.
Scheeffer, L., 344.
Scheiner, Chr., 387.
Schell, W., 397.
Schellbach, K. H., 344.
Schellen, H., 344.
Schering, E., 112, 344, 366, 368.
Schering, Elsbeth, 338.
Scherk, H. F., 292.
Schiaparelli, G. V., 394.
Schieck, O., 337.
Schiller, N. N., 346.
Schilling, F., 236, 237, 244, 258, 452.
Schindel, J., 65.
Schjellerup, H. C. Fr. Chr., 201, 206, 209, 344.
Schläfli, L., 344, 421, 423.
Schlesinger, L., 344.
Schlömilch, O., 174, 176, 243, 258, 260—263, 319, 374, 450.
Schmidt, A., 348.
Schmidt, C., 428.
Schmidt, Fr., 170, 172, 370, 373, 375, 450.
Schmidt, M. C. P., 362, 363, 370, 371, 448, 449.
Schmidt, W., 5, 170, 171, 370, 371, 377, 448, 449.
Schober, K., 344.
Schoelcher, 248, 258.
Schols, Ch. M., 344.
Schonberger, G., 387.
Schöne, R., 7, 378, 380.
Schoner, A., 289.
Schönflies, B., 175.
Schorr, D., 371.
Schott, C., 284, 361.
Schoute, P. H., 170, 301, 329, 334, 348, 448, 452.
Schpatschinskij, E. K., 337.
Schreiner, J., 258.
Schrentzel, W., 344.
Schröder, E., 176.
Schröter, H., 344.
Schubert, H., 349, 452.
Schudja, siehe Abu Kamil.
Schultén, N., 258.
Schumacher, H. Chr., 286, 369, 418.
Schumann, E., 334.
Schur, W., 344, 450, 451.
Schwab, J. Chr., 311.
Schwalbe, B., 291, 374, 375.
Schwarz, H. A., 122, 131, 307, 308, 409, 410.
Schweikart, F. K., 418.
Schwenter, D., 321.
Schwering, K., 299.
Scoresby, 387.
Scott, Charlotte A., 170, 173, 332.
Scultetus, B., 145.
Seares, F. H., 451.
Searle, A., 327.
Segner, J. A., 305.
Segre, C., 330, 338, 342.
Seidel, L., 344.
Seitz, E. B., 345.
Seki, 172.
Sella, Z., 341.
Seneca, 385.
Senff, K. E., 123.
Senigoff, N., 347.
Seraskir, 64.
Serret, J. A., 95, 345.

Serret, P., 123, 258, 302, 345.
Servois, F. J., 289.
Seydler, A., 345.
Sforza, G., 453.
Shanks, W., 345.
Shapochnikoff, N. A., 338.
Sharp, W. J. C. 241, 251, 345.
Shbikowsky, A., 173, 345, 450.
Shukowsky, N. E., 332, 336, 337.
Siacci, F., 245, 258, 330, 333, 340, 348.
Sibt el-Mâridînî, 163.
Siebeck, F. H., 302.
Sigiborus, 41.
Simerka, W., 345.
Simmons, T. C., 302.
Simon, M., 281, 370, 371, 448, 449.
Simpelius, 387.
Simplikios, 5, 8, 9—11, 363.
Simpson, Th., 87, 104, 105, 293.
Simson, R., 292, 297, 320, 430.
Sinram, H. Th., 345.
Sintzoff, D., 338, 370, 374, 448, 450.
Sircom, S., 255.
Sire, G. E., 338.
Slaby, A., 258.
Slechinsky, I., 349.
Sloman, H., 155.
Sludskij, Th., 338.
Sluginoff, N., 345.
Sluze, R. F. de, 301.
Smith, A. C., 453.
Smith, D. E., 170, 370, 374, 375, 452.
Smith, H. J. St., 345.
Smith, J. H., 451.
Smith, R., 88.
Snell, K., 345.
Snellius, W., 224, 225, 372, 387, 444.
Sohncke, L., 345, 349.
Sohncke, L. A., 258.
Somigliana, C., 328, 393.
Sommerfeld, A., 452.
Sonine, N., 348.
Sousa Pinto, R. R. de, 346.
Spieker, Th., 295.
Spott, M., 244, 258.
Spottiswoode, W., 345, 346.
Stäckel, P., 97, 111, 122, 133, 170, 172, 342, 362, 368, 370, 372—374, 376, 452.
Stahl, H., 402.
Stahl, W., 346.
Staigmüller, H., 370, 371.
Stammer, W., 428.
Stark, J., 370, 373, 448, 450.
Starkweather, G. Pr., 376.
Staudigl, R., 346.
Staudt, K. G. Chr., 165, 286, 373, 449.
Steen, A., 346.
Stefan, J., 331, 336, 339, 346.
Stegemann, W., 371.
Steichen, M., 346.
Steiner, J., 164, 165, 167, 172, 249, 258, 262, 286, 292, 295, 297, 302, 304, 307, 312, 318, 323, 373, 429, 430, 433.
Steinschneider, M., 12, 41, 58, 152, 196, 198, 200, 365, 370, 371.
Stephanus à Rupe, siehe De la Roche.
Steppes, C., 336.
Stern, M. A., 262, 346.
Stevin, S., 291, 358, 361, 372, 449.
Stewart, M., 292, 320.
Stewart, O. M., 451.
Stiborius, A., 444.
Stieber, C. G., 274.
Stieltjes, T. J., 346.
Stifel, M., 145, 215.
Stirling, J., 86, 87, 89—91, 94, 153, 292, 293, 372, 446.
Stokes, G. G., 292.
Stoljetoff, A., 337, 346.
Storchi, F., 346.
Strabon, 159, 362.
Strack, O., 346.
Strasser, G., 346.
Strafsmaier, J. N., 156, 369.
Streinz, F., 245, 258.
Strouhal, V., 345.
Struve, C., 428.
Struve, O., 392.
Studnicka, F. J., 170, 172, 370, 372.
Study, E., 452.
Sturm, A., 361, 448, 449.
Sturm, J. Chr., 319, 321.
Sturm, J. Ch. F., 290, 292, 293, 308, 311, 319.
Sturm, R., 344.
Sucharda, A., 174.
Susemihl, Fr., 8.
Süfs, E., 333, 342, 346, 349.

Suter, H., 11, 12, 14, 47, 151, 161—164, 170, 171, 200, 370, 371, 448, 449.
Snworoff, Th. M., 336.
Svechnikow, P., 242, 248, 258.
Sylow, L., 292, 338.
Sylvester, J. J., 172, 242, 290, 292, 305, 307, 331, 346.
Syrianus, 9, 161.

Tabit ben Kurra, 74, 147, 148, 387.
Tacquet, A., 235, 258, 387.
Tait, P. G., 376, 402, 450.
Talbot, W. H. F., 302.
Tannery, J., 134, 329.
Tannery, P., 8, 9, 41, 45, 141, 142, 146—149, 160, 170, 171, 194, 195, 197, 198, 209, 210, 213, 256, 284, 352, 363, 370, 371, 448—450.
Tarry, G., 295.
Tartaglia, N., 213, 354, 355.
Tartinville, A., 347.
Taylor, Br., 151, 154, 155, 172, 263, 264, 268, 271, 272, 278, 292, 311, 445.
Taylor, W. W., 301.
Tchebycheff, P., 172, 290, 292, 308, 347.
Teixeira, A. J., 346.
Teixeira, G., 169, 336, 339.
Temperley, E., 347.
Terquem, O., 258, 400.
Thaer, A., 327.
Thales, 362, 387.
Thallmayer, V., 244, 258.
Theodoretus, 385.
Theodorus, 144.
Theodosios, 69, 364, 365.
Theon von Alexandria, 5, 6.
Theon von Smyrna, 147, 320.
Thiele, G., 185, 189.
Thiele, T. N., 344.
Thirion, J., 370, 371.
Thomae, J., 308.
Thoman, F., 227.
Thomson, siehe Kelvin.
Thwing, Ch. B., 451.
Tichomandritzkij, M., 128, 348, 448, 450.
Tilly, J. de, 338.
Timaios, 7, 361.
Timocharis, 188, 189, 203, 205, 206, 210, 211, 387.
Timtchenko, I., 97, 113, 170, 171, 370, 374, 442.
Tischleder, Fr., 237, 258.
Tisserand, F., 329, 330, 342, 347.
Tittel, K., 160.
Tobias, 390.
Todhunter, I., 2, 347.
Torelli, G., 328, 341, 343, 348, 376.
Torka, J., 452.
Torricelli, E., 292, 301.
Townsend, R., 247, 258, 347.
Trajanus, 196, 197.
Trautmannsdorff, M. von, 386.
Trenchant, J., 356.
Treutlein, P., 346.
Trognitz, B., 248, 258.
Trudi, N., 348.
Tschirnhaus, E. W. von, 301, 309.
Tschumi, J., 258.
Tucker, R., 172, 241, 258, 301, 330, 331.
Turazza, D., 348.

Ulug Beg, 62.
Unverzagt, W., 348.
Unwin, W. C., 244, 258.
Uri, J., 67.
Urselius, 390.
Ursula (die heilige), 390.
Usener, H., 8.
Usiel, 71.
Uth, K., 348.

Vacca, G., 143, 149, 153, 356, 359, 370, 372, 442, 448, 449.
Vailati, H., 176, 453.
Valentin, G., 360, 448, 449.
Valentiniani [= Borgia, Herzog von Valentinois?], 72.
Valette, H., 340.
Valton, 436, 437.
Van den Berg, F. J., 348.
Van der Harst, A. D., 237, 253.
Vandermonde, A. Th., 306.
Vanecek, J. S., 249, 258.
Van t'Hoff, 170, 172, 370, 373.
Vaux, C. de, 142, 164, 256, 371, 377.
Venable, Ch. S., 173, 348.
Verdam, G. J., 243, 246, 259.
Vernier, 163.

Veronese, G., 330.
Vicaire, E., 374, 376.
Vicuña, G., 348.
Viète, Fr., 100, 101, 284, 321, 356.
Vietor, A., 236, 259.
Villarceau, Y., 292.
Vincent, J., 379, 371.
Vincentius (der heilige), 387, 391.
Vinci, L. da, 354.
Visconti, F. M., 61.
Vital, Ch., 68.
Vitruvius Pollio, 171, 377.
Vivanti, G., 359.
Viviani, V., 292, 293.
Vogelstein, H., 72.
Vogt, H., 344.
Voigt, W., 247, 259, 341.
Voit, C. von, 170, 173, 328, 330, 333, 335, 337—339, 341, 345, 346, 348.
Volkmann, P., 335, 341, 370, 373.
Volterra, V., 174.
Voretzsch, M., 350.
Voſs, A., 122, 335.

Wachter, F. L., 172.
Walker, J. J., 347, 348, 450.
Wallace, W., 295, 297, 320.
Wallenberg, G., 170, 448.
Wallis, J., 100, 101, 108, 152, 153, 155, 230—234, 292, 293, 304, 359, 449.
Walmesley, Ch., 94.
Wälsch, E., 349, 370, 374.
Walther, B., 388.
Walton, W., 259, 452.
Walz, Th., 93, 94.
Wangerin, A., 341.
Wappler, E., 348.
Wargny, C., 259.
Waring, E., 89, 95, 96, 241, 259, 293.
Wassilieff, A., 170, 172, 176, 331, 340, 347.
Weher, F., 237, 259.
Weber, H., 172, 333, 337.
Weber, W. E., 290, 291.
Weierstraſs, K., 290, 292, 297, 308, 348, 412.
Weilenmann, A., 349.
Weingarten, J., 172, 292, 304, 368, 400, 453.
Weisbach, L. J., 244, 259.
Weiſs, E., 336.
Weiſs, W., 329, 370, 373.
Weiſsenborn, H., 236, 237, 241, 259.
Wendelin, G., 387.
Werner, J., 300.
Wertheim, G., 144, 145, 147, 148, 170, 171, 213, 355, 357, 361, 370, 371, 448, 449.
Wessel, C., 4.
Wetzell, O., 244, 259.
Weyer, G. D. E., 347.
Weyr, Ed., 337.
Weyr, Em., 342, 346, 349.
Whewell, W., 240, 244, 259.
Whittaker, E. T., 170, 173.
Widman, J., 321.
Wiedeburg, O., 452.
Wiedemann, G., 335.
Wiener, Chr., 106, 110, 164, 165, 236, 242, 259, 304, 349.
Wilhelm, 387.
Williamson, B., 242, 259.
Willis (nicht Wittis), R., 254.
Wilson, J., 149, 247, 259, 292.
Wiltheiss, E., 349, 374.
Winckel, L., 336.
Winckler, A., 349.
Windelband, W., 332, 370, 373.
Wirtinger, W., 344, 349, 370, 374.
Wislicenus, W. F., 384.
Wissowa, G., 195.
Witzschel, B., 263.
Wohlwill, E., 453.
Wolf, Charles, 347.
Wolf, J. C., 72.
Wolf, R., 86, 89, 105, 195, 200, 222, 347, 349, 390, 391, 443.
Wolfer, A., 349.
Wolff, Chr., 285, 295, 320.
Wölffing, E., 170, 172, 235, 259, 329, 330, 350, 370, 373, 376, 448, 450.
Wollseife, J. J., 259.
Wolstenholme, J., 238, 242, 258, 259.
Wood, R. W., 451.
Woodward, R. S., 370, 373.
Woolhouse, W. St. B., 349.
Wöpcke, F., 17, 28.
Worpitzky, J., 349.
Wren, Chr., 232, 303.
Wronski, H., 290, 292.
Wüstenfeld, F., 162, 200.
Wylie, A., 143.

Xaverius (der heilige), 387.
Xenofanes, 387.
Xylander, W., 321, 355.

Young, M. (?), 293.
Young, W. H., 236, 344.

Zach, F. X. de, 103.
Zahradnik, K., 302.
Zajaczkowski, Wl., 349.
Zarkali, 60, 62, 64, 72, 171, 387.
Zebrawski, T., 349.
Zeeman, P., 170, 247, 250, 448.
Zehme, W., 240, 259.
Zelbr, K., 106, 349, 374.
Zeller, Chr. J. J., 350.
Zenodoros, 5—8, 354.
Zermelo, E., 452.
Zetzsche, K. E., 350.
Zeuthen, H. G., 3, 149, 160, 302, 341, 346, 370, 372.
Ziegler, H., 7.
Zillmer, A., 350.
Zindler, K., 171.
Zmurko, W., 350.
Zorawski, K., 338, 399.
Zunz, L., 60, 65, 68, 72, 75.
Zurria, G., 350.
Zwerger, M., 171.